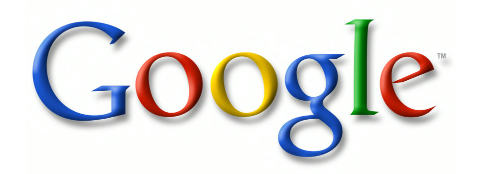
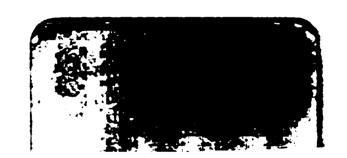






Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

Friedrich August

Friedr. Aug. Klingenfeld,

ordentl. Professor der darstellenden Geometrie und der mechanischen Technologie an der k. polytechnischen Schule zu München.

Nürnberg,

Bauer & Raspe.

(Ludwig Korn.)

1871.

Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

F. A. Klingenfeld.

Band I.

Mit fünf Tafeln.



.C Nürnberg,
Bauer & Raspe.
(Ludwig Korn.)
1871.

1878, June 4.
Minot fund.
(Bds. I.-III. + tafeln.)

Vorrede zur ersten Auflage.

Indem ich das vorliegende Lehrbuch der Oeffentlichkeit übergebe, beabsichtige ich damit nicht blos, meinen Schülern einen Leitfaden für meinen Unterricht in die Hand zu geben, sondern wünsche ich auch, dass sich dasselbe einer weiteren Verbreitung erfreuen möge, und zwar hauptsächlich desshalb, weil in ihm einige Abweichungen von bisher gebräuchlichen Regeln enthalten sind, von welchen (Abweichungen) ich mir bezüglich der Anwendung der darstellenden Geometrie auf technisches Zeichnen einen guten Erfolg verspreche. Es enthielt nemlich diese Wissenschaft bisher einige Bestimmungen, die ihrer praktischen Anwendung hinderlich im Wege lagen, und deren schädliche Wirkung Der am leichtesten zu erkennen Gelegenheit hat, der ausser der darstellenden Geometrie noch einen Gegenstand zu lehren hat, in welchem sie zur Anwendung kommt (wie dies z. B. bei mir der Fall ist, dem ausser dem Unterricht in der darstellenden Geometrie auch der im Maschinenzeichnen übertragen ist). In der darstellenden Geometrie war nemlich bisher festgesetzt und waren die Auflösungen ihrer Aufgaben darnach eingerichtet:

1) dass man den Tafeln bei ihrer Umklappung ihre Schnittlinie gemeinschaftlich behalten lässt, 2) dass eine Ebene erst dann als hinreichend bekannt zu betrachten ist, wenn ihre Spuren gezeichnet sind, während man in der Praxis (beim Maschinen- und Bauzeichnen) sehr oft die Tafeln so umzuklappen gezwungen ist, dass sie zwei verschiedenen Blättern angehören, und von den Spuren einer Ebene nie eine Rede ist. Ebensowenig pflegt man in der Anwendung, wie dies in der darstellenden Geometrie verlangt wird, die Schnittlinie der beiden Tafeln in ihren Umklappungen zu zeichnen, sondern man hält es damit, wie in Num. 16. angegeben ist. Ausserdem fehlt es in den bisher erschienenen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie an einer ausführlichen durch Zeichnungen erläuterten Auseinandersetzung des Uebergangs von einem Projectionssystem zu einem andern, was doch für die Anwendung von so grosser Wichtigkeit ist.

Den genannten Mängeln abzuhelfen war seit mehreren Jahren mein Streben, dessen Erfolg aus dem vorliegenden Buche beurtheilt werden kann. Mag dieses Urtheil ausfallen, wie es will, man wird nicht verkennen können, dass die genannten Mängel wirklich vorhanden sind; dass das Ziel, zu dem ich gelangt bin, nur durch Aufwand von Mühe, Geduld und Zeit zu erreichen war; dass es namentlich nicht leicht war, eine Bezeichnungsart zu finden, durch die es möglich ist, den in diesem Buche aufgestellten Sätzen (welche durch die Beseitigung der oben genannten Mängel zusammengesetzter sind, als sie bisher waren) eine einfache Form zu geben; dass ich daher hinreichende Gründe hatte zur Herausgabe dieses Buchs.

Wer die §§. 1. und 4. sorgfältig durchgeht, wird der von mir eingeführten Bezeichnung schwerlich Zweckmässigkeit und Consequenz absprechen können; er wird auch zugestehen müssen, dass sich die bisher eingeführte Bezeichnungsweise nicht in der Art hätte durchführen lassen; er wird es daher verzeihlich finden, wenn ich gleich bei meinem ersten literarischen Auftreten es wage, neue Bezeichnungen einzuführen. Wenn ich dabei weiter gehe, als nothwendig ist, wenn ich statt des Ausdruckes „Projection“ das Wort „Riss“ zu gebrauchen mir erlaube, so mag man dies meiner Liebe zur deutschen Sprache zu Gute halten, die es nicht über sich gewinnen konnte, das deutsche Wörtchen „Riss“ noch länger aus der Sprache der darstellenden Geometrie zu verbannen, um es durch ein anderes, fremdes Wort zu ersetzen. Dass ich für den Durchschnitt zweier Tafeln den neuen, aber deutschen, Namen „Kante“ zum Vorschlag bringe, wird man mir um so weniger verargen, als man bis jetzt über die Bezeichnung dieser Linie noch nicht übereingekommen ist.

Mein Streben ging nicht blos dahin, die oben angedeuteten Abänderungen durchzuführen, sondern auch dahin, den Lehrstoff so anzuordnen, dass es eher möglich ist, allgemeine Regeln über die Lösung der verschiedenartigen Aufgaben zu geben. Schon bei der Durchlesung des Inhaltsverzeichnisses dieses Buches wird man sehen, dass ich alle

Aufgaben (in welchen aber blos gerade Linien und ebene Flächen vorkommen dürfen) unter zehn Paragraphe gebracht habe. An die Spitze der einzelnen Paragraphe habe ich allgemeine Betrachtungen gestellt, die dem Schüler den Weg zeigen, auf welchem er die Auflösung der zu dem entsprechenden §. gehörigen Aufgaben findet, die es ihm daher möglich machen, auch ähnliche andere dahin gehörige Aufgaben zu lösen, wenn sie ihm auch noch nicht vorgekommen sein sollten. Ausserdem habe ich mich bemüht, (im §. 8.) auf Alles aufmerksam zu machen, was dem Schüler in der darstellenden Geometrie zu wissen nöthig ist. Ferner habe ich die Aufsuchung des Durchschnittes von Prismen und Pyramiden (§. 10.) in einer Weise durchgeführt, die es möglich macht, die Ordnung, in der die gesuchten Punkte verbunden werden müssen, leicht zu übersehen. Ich glaube, dass dies den Lehrern der d. G. nicht unwillkommen sein wird.

Wenn ich hier die Punkte aufgezählt habe, in denen sich das vorliegende Buch von den frühern unterscheidet, so geschah dies nicht blos desshalb, um die Herausgabe desselben zu rechtfertigen, sondern auch darum, um den Beurtheiler dieses Werkchens zu veranlassen, sich über die Zweckmässigkeit der darin enthaltenen Abweichungen auszusprechen. Bedenkt man, wie sehr ich in Folge dieser Abweichungen bei der Bearbeitung dieses Buches auf mich selbst angewiesen war, so wird man bei der Beurtheilung desselben nicht zu strenge sein.

Nürnberg, im Januar 1851.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der Umstand, dass meine beiden Lehrbücher der darstellenden Geometrie, das für Gewerb- und das für polytechnische Schulen, nach und nach an den technischen Anstalten in Bayern immer mehr Boden gewonnen, und seit mehreren Jahren an den meisten dieser Anstalten eingeführt sind, giebt mir die Ueberzeugung, dass der von mir eingehaltene Lehrgang sich des Beifalls der Lehrer der darstellenden Geometrie

zu erfreuen hat, und ich daher berechtigt bin, diesen Lehrgang in der neuen Auflage beizubehalten. Was aber den Umfang des Lehrstoffes betrifft, so finde ich mich durch den Umstand, dass das ganze Lehrbuch nun auch als Leitfaden für den Unterricht an technischen Hochschulen, namentlich an der technischen Hochschule zu München, dienen soll, veranlasst, denselben zu erweitern, und ihm die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf Schattenkonstruktion und Perspektive beizufügen. Diesen gesammten Lehrstoff nun werde ich auf drei Bände vertheilen, von denen der erste, hier vorliegende, als zweite Auflage meines Lehrbuches der darstellenden Geometrie für Gewerbschulen zu betrachten ist, und die Aufgaben umfasst, in denen nur gerade Linien und ebene Flächen vorkommen. Dieser Band dient zugleich als Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Gewerbschulen und Realgymnasien Bayerns.

Der zweite Band wird die Aufgaben über Curven und krumme Flächen enthalten, und ist zugleich als zweite Auflage meines Lehrbuches der darstellenden Geometrie für polytechnische Schulen zu betrachten. Dieser Band wird zu Anfang des nächsten zweiten Semesters im Buchhandel erscheinen.

Der dritte Band endlich wird die Schattenkonstruktion und die Perspektive enthalten.

Was den vorliegenden Band betrifft, so hat derselbe im Vergleich mit der früheren Auflage keine sehr bedeutende Erweiterung erfahren, und auch einer solchen nicht bedurft. Dass ich aber bestrebt war, überall zu verbessern und zu ergänzen, wird ein Vergleich mit der ersten Auflage wohl leicht ergeben.

Auch die Ausstattung des Buches ist, Dank dem bereitwilligen Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung, eine bessere geworden, als in seiner ersten Auflage.

So gebe ich mich denn der Hoffnung hin, es werde diese neue Auflage sich einer ebenso wohlwollenden Aufnahme zu erfreuen haben, als die erste.

München, im September 1871.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

§. 1. Graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen.

§. 2. Mittel, die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zu erkennen.

§. 3. Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

§. 4. Uebergang zu einem anderen Risssystem.

§. 5. Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in welchen Entfernungen, Winkel gesucht sind.

§. 6. Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in denen Entfernungen und Winkel gegeben sind.

§. 7. Aufgaben über das Dreikant.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben über Körper, die von Ebenen begrenzt sind.

§. 8. Darstellung von Körpern.

§. 9. Aufsuchung der Risse eines Körpers.

§. 10. Durchschnitte von Körpern mit Ebenen, Geraden und Körpern.

Errata:

Seite 100, Zeile 20 v. o. wurde folgende Bemerkung *) vergessen:

*) Die hier betrachtete Körperkante soll einem **konvexen** Körper, d. h. einem solchen, dessen Oberfläche von einer Geraden nach höchstens zwei Punkten geschnitten wird, angehören.

Darstellende Geometrie.

Erster Abschnitt.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

§. 1.

Graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen.

1. Wer die Wissenschaft, mit der wir uns beschäftigen wollen, die darstellende (descriptive) Geometrie, studiren will, hat die elementare Geometrie (Planimetrie und Stereometrie), die hier als bekannt vorausgesetzt wird, schon durchgemacht, und weiss, dass man in der Planimetrie nicht blos Lehrsätze beweist, sondern auch Aufgaben löst, in welchen geometrische Gebilde durch Zeichnung gesucht werden, die zu anderen, durch Zeichnung gegebenen Gebilden, in bestimmten Beziehungen stehen. In der Stereometrie werden dergleichen Aufgaben nicht gelöst. Warum? Weil in der Planimetrie jede Aufgabe nur solche Dinge enthält, die alle in einer einzigen Ebene liegen, nemlich in dem ebenen Zeichnungsblatte, auf welchem sie dargestellt sind, und die daher genau so gezeichnet werden können, wie sie sind. Anders in der Stereometrie. Diese betrachtet Gebilde, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, und die sich daher auf einem ebenen Blatte nicht darstellen lassen. Wer vermöchte z. B. einen Würfel auf einem ebenen Blatte zu zeichnen? Will man daher stereometrische Aufgaben graphisch lösen, so müssen vor Allem die Mittel angegeben werden, durch die man Raumgebilde (die, wie gesagt, nicht gezeichnet werden können) graphisch bestimmt, d. h. Mittel, durch die es möglich

ist, Zeichnungen zu entwerfen, aus denen die Gestalten von zu bestimmenden Raumgrössen klar hervorgehen. Diese Mittel anzugeben, und durch dieselben geometrische Aufgaben aller Art graphisch lösen zu lehren, ist der Gegenstand der darstellenden Geometrie.

Wir können daher sagen:

Die darstellende Geometrie ist die Wissenschaft, welche geometrische Gebilde **graphisch** bestimmen und Aufgaben über dieselben **auf graphischem Wege** lösen lehrt.

2. Wir wollen zunächst nur solche geometrische Körper betrachten, die von lauter Ebenen begrenzt sind, auf denen also blos gerade Linien vorkommen. Ein solcher Körper ist vollkommen bestimmt, wenn man die Lagen aller seiner Eckpunkte kennt, und ausserdem weiss, welche Ecken auf dem Körper durch gerade Linien verbunden sind. Zur Bestimmung eines solchen Körpers nun hat man es am zweckmässigsten gefunden, folgendes Verfahren einzuschlagen.

Man nimmt zwei auf einander senkrechte fest verbundene Ebenen an, und bringt damit den zu bestimmenden Körper in feste Verbindung. Nun fällt man von einem beliebigen Eckpunkte a des Körpers Senkrechte auf die beiden Ebenen und zeichnet auf diesen die Punkte a_1, a_2 (sprich: a eins, a zwei), in denen sie von jenen Senkrechten getroffen werden. Durch diese beiden Punkte a_1, a_2 ist offenbar der Punkt a des Körpers vollkommen bestimmt, und er lässt sich auffinden, auch wenn der Körper wieder entfernt ist. Denn die Punkte a_1, a_2 bestimmen vollkommen die aus dem Punkte a zu den beiden Ebenen errichteten Senkrechten und mit ihnen auch den Punkt a, in welchem sich die Senkrechten schneiden müssen, da beide durch den Punkt a gelegt wurden, und wegen ihrer gegenseitigen senkrechten Stellung nicht zusammenfallen können.

Verfährt man daher für einen zweiten Eckpunkt b ebenso, wie für a, so dass man die Fusspunkte b_1, b_2 erhält, u. s. f. für alle Eckpunkte des Körpers, so sind alle diese Eckpunkte vollkmmen bestimmt und der Körper kann daher entfernt werden. Verbindet man noch in jeder der beiden Ebenen die in ihr gezeichneten Punkte in derselben Weise, wie sie am

Körper selbst verbunden sind, so erhält man zwei Zeichnungen (auf jeder der beiden Ebenen eine) die zusammen den Körper vollkommen bestimmen. Denn man kann nach Entfernung des Körpers dessen Eckpunkte und deren Verbindungslinien, also auch die ganze Gestalt des Körpers, wieder auffinden.

3. Wir werden daher zur Bestimmung von Gestalten zwei Fig. 1. *) aufeinander senkrechte zu einem Systeme verbundene Ebenen anwenden, von denen wir eine die erste Tafel oder Tafel eins (abgekürzt: $\mathfrak{T}_1$), die andere zweite Tafel oder Tafel zwei ($\mathfrak{T}_2$) und deren Durchschnitt wir Kante ($\mathfrak{K}$) nennen. Um mit Hülfe dieser Tafeln (abgekürzt: $\mathfrak{T}$) einen Punkt a im Raume zu bestimmen, denken wir uns von ihm aus eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ und eine zur $\mathfrak{T}_2$ gefällt, und zeichnen die Punkte a_1, a_2, in denen die $\mathfrak{T}$ von diesen Senkrechten getroffen werden. Diese Punkte a_1, a_2, nennen wir die Risse (Projektionen) des Punktes a, und zwar den in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkt a_1 seinen ersten Riss ($\mathfrak{R}_1$), den in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Punkt a_2 seinen zweiten Riss ($\mathfrak{R}_2$); die auf die $\mathfrak{T}_1$ gefällte Senkrechte das erste Loth ($\mathfrak{L}_1$), die auf die $\mathfrak{T}_2$ gefällte Senkrechte das zweite Loth ($\mathfrak{L}_2$) des Punktes a.

Hat man daher die Risse a_1, a_2 eines Punktes a, so finden wir diesen, indem wir in a_1 eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ errichten, welche das $\mathfrak{L}_1$ des Punktes a ist; ferner in a_2 eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_2$, das $\mathfrak{L}_2$; der Durchschnitt von $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ ist der Punkt a.

Hat man blos einen Riss eines Punktes, so weiss man bloss, dass der Punkt in dem, durch diesen Riss bestimmten, Lothe liegen muss.

NB. $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, und ähnliche Abkürzungen, die noch in der Folge festgesetzt werden, gebrauchen wir, wenn das für die Abkürzung zu setzende Wort in der Einheit oder in der Mehrheit steht; z. B. kann $\mathfrak{R}_1$ sowohl erster Riss, als auch erste Risse heissen. Aus dem Zusammenhange wird sich immer ergeben ob die Einheit oder die Mehrheit zu nehmen ist.

Anmerkung 1. Da es uns freisteht, welche von den beiden Tafeln wir als die erste ansehen, und nur verlangt wird, dass,

---

*) Auf die vor einer Nummer angegebene Figur beziehen sich alle in der ganzen Nummer aufgeführten Buchstaben, so weit nicht ausnahmsweise im Text auf eine andere Figur verwiesen ist.

wenn eine davon als erste bezeichnet ist, die andere als zweite angesehen werden muss, so bleibt jeder Satz wahr, wenn man in ihm durchweg e i n s und z w e i mit einander vertauscht. Deshalb werden wir künftighin alle Entwicklungen blos für die $\mathfrak{T}_1$ machen, und es dem Schüler überlassen, durch Vertauschen von eins und zwei sich das Resultat derselben Entwicklung für die $\mathfrak{T}_2$ zu verschaffen.

Anmerkung 2. In anderen Lehrbüchern werden die beiden Tafeln auch Projektionsebenen, Grundebenen genannt, und durch die Bezeichnungen horizontal und vertikal von einander unterschieden. Den Schnitt der beiden Tafeln nennen andere auch Axe, Basis, Grundschnitt.

Fig. 1. 4. Man denke sich wieder einen ausser der Tafel liegenden Punkt a und seine beiden Lothe aa_1, aa_2. Da sich diese in a schneiden, so bestimmen sie eine Ebene, die wir die Lothebene des Punktes a nennen wollen. Weil nun diese Lothebene ein Loth zur $\mathfrak{T}_1$ und eines zur $\mathfrak{T}_2$ enthält, so steht sie senkrecht auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ (Anh. 16.)*), also auch (nach Anh. 20.) auf der $\mathfrak{K}$, und schneidet diese in einem Punkte $\mathfrak{a}$, den wir den Kantenriss ($\mathfrak{KR}$) des Punktes a nennen wollen. Weil aber die Lothebene senkrecht ist zur $\mathfrak{K}$, so sind es auch die in ihr liegenden Geraden $a_1\mathfrak{a}$ und $a_2\mathfrak{a}$; und da $a_1\mathfrak{a}$ senkrecht zu $\mathfrak{K}$ ist und in der zur $\mathfrak{T}_2$ senkrechten Ebene $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist auch $a_1\mathfrak{a} \perp \mathfrak{T}_2$, und daher auch (nach Anh. 22.) parallel zum Lothe aa_2. Ebenso ist $\mathfrak{a}a_2 \perp \mathfrak{T}_1$ und $\parallel aa_1$. Es bilden also die Geraden aa_1, aa_2, $\mathfrak{a}a_1$ und $\mathfrak{a}a_2$ ein Rechteck, und es ist daher $aa_1 = a_2\mathfrak{a}$ und $aa_2 = a_1\mathfrak{a}$. Ferner sieht man, dass die aus a_1 in der $\mathfrak{T}_1$ und aus a_2 in der $\mathfrak{T}_2$ zur $\mathfrak{K}$ gezogenen Senkrechten in einem Punkte der $\mathfrak{K}$, nemlich im $\mathfrak{KR}$ des Punktes a zusammen kommen.

Fig. 1. 5. Um die aus diesen Betrachtungen sich ergebenden Sätze leichter ausdrücken zu können, wollen wir vorerst noch einige darauf bezügliche Benennungen einführen. Wir wollen die in den $\mathfrak{T}$ aus den Rissen zur $\mathfrak{K}$ gezogenen Senkrechten $a_1\mathfrak{a}$ und $a_2\mathfrak{a}$ Kantenlothe ($\mathfrak{KL}$) nennen, und zwar die in der $\mathfrak{T}_1$ das erste Kantenloth ($\mathfrak{KL}_1$), die in der $\mathfrak{T}_2$ das zweite Kantenloth

*) Jede Nummer in ( ), vor welcher „Anh." steht, bezieht sich auf die entsprechenden Nummern des Anhanges zu diesem Buche.

($\mathfrak{KL}_2$) des Punktes a. Ferner nennen wir die Länge aa_1, welche den Abstand des Punktes a von der $\mathfrak{T}_1$ angibt, den *ersten Abstand* ($\mathfrak{A}_1$), die Länge aa_2 den *zweiten Abstand* ($\mathfrak{A}_2$); die Länge $a_1\mathfrak{a}$, welche den Abstand des $\mathfrak{R}_1$ des Punktes a von der $\mathfrak{K}$, oder, was dasselbe ist, von seinem $\mathfrak{KR}$ angibt, die *erste Ordinate* ($\mathfrak{O}_1$), die Länge $a_2\mathfrak{a}$, d. i. die Entfernung des $\mathfrak{R}_2$ von der $\mathfrak{K}$, die *zweite Ordinate* ($\mathfrak{O}_2$). Es lauten demnach die aus Num. 4 hervorgehenden Sätze folgendermassen:

1) *Wenn ein Punkt ausser den Tafeln liegt, so bilden seine Lothe und Kantenlothe ein Rechteck;*
2) *seine Kantenlothe schneiden sich in einem Punkte der $\mathfrak{K}$, und zwar in seinem $\mathfrak{KR}$;*
3) *es ist sein $\mathfrak{A}_1$ gleich seiner $\mathfrak{O}_2$* (s. 3. Anm. 1.)

6. Wir denken uns jeden zu bestimmenden Punkt im Raume mit einem Buchstaben aus dem *kleinen lateinischen Alphabete* bezeichnet und schreiben an seinen $\mathfrak{R}_1$ *denselben Buchstaben, aus demselben Alphabete, versehen (rechts unten) mit der Ziffer 1*; an seinen $\mathfrak{R}_2$ denselben Buchstaben mit der Ziffer 2; an seinen $\mathfrak{KR}$ *denselben Buchstaben, aber aus dem deutschen Alphabete.* Ist z. B. ein Punkt, den wir durch seine Risse bestimmen, mit a bezeichnet gedacht, so bezeichnen wir seinen $\mathfrak{R}_1$ mit a_1, seinen $\mathfrak{R}_2$ mit a_2 und seinen $\mathfrak{KR}$ mit $\mathfrak{a}$.

Wir verstehen daher unter Punkt a oder, abgekürzt, $\mathfrak{P}$ (a) den Punkt, dessen Risse mit a_1, a_2 bezeichnet sind, und dessen $\mathfrak{KR}$, wenn man ihn bezeichnet, mit dem Buchstaben $\mathfrak{a}$ versehen wird. Der $\mathfrak{P}$ (a) selbst liegt also im Allgemeinen gar nicht in einer Tafel und ist demnach auch nicht gezeichnet; in den Tafeln sind blos seine Risse a_1, a_2 zu finden, und diese müssen so liegen, dass das $\mathfrak{KL}_1$ und das $\mathfrak{KL}_2$ des $\mathfrak{P}$ (a) in *einem* Punkte der $\mathfrak{K}$ zusammenkommen (s. 5. Satz 2).

7. Da wir auf den Ebenen, die wir Tafeln genannt haben, zeichnen wollen, so muss sich hinter einer solchen Tafel ein materieller Körper befinden. Es ist daher jede Tafel eine ebene Fläche eines materiellen Körpers (eines aufgespannten Papierbogens, eines ebenen Brettes etc. etc.), den wir *Zeichnungsblatt, Reissblatt* oder *Blatt* nennen. Denkt man sich diese Ebene nach allen Seiten verlängert, so theilt sie den Raum in

zwei Theile, in deren einem die von der Tafel begrenzte Materie des Zeichnungsblattes liegt, während im anderen das Auge des Zeichners sich befindet. Den letzteren Raum nennen wir den positiven (+), den ersteren, (in welchem die Materie des von der Tafel begrenzten Zeichnungsblattes liegt) den negativen (—) Raum der Tafel, und sagen wir von einem Punkte ausser der Tafel sein Abstand ist + oder —, je nachdem der Punkt in dem + oder — Raum dieser Tafel liegt.

Ebenso wird jede der beiden Tafeln durch die $\mathfrak{K}$ in zwei Theile getheilt, von denen der eine die positive, der andere die negative Tafel genannt wird, und zwar setzen wir fest, dass die positive erste Tafel ($+ \mathfrak{T}_1$) der Theil der $\mathfrak{T}_1$ ist, welcher in dem + Raum der $\mathfrak{T}_2$, und die $+ \mathfrak{T}_2$ der Theil der $\mathfrak{T}_2$, der im + Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt. Man nennt wieder die Entfernung eines in einer Tafel liegenden Risses von der $\mathfrak{K}$, d. h. seine Ordinate (s. 5) positiv (+) oder negativ (—), je nachdem er in der + oder — Tafel liegt. Wenn daher z. B. der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes in der $+ \mathfrak{T}_1$ liegt, so ist seine $\mathfrak{O}_1$ positiv.

Wir sagen von zwei Dingen sie haben gleiche Vorzeichen, wenn beide + oder beide — sind; ungleiche, wenn eines + und das andere — ist.

Fig. 1. 8. Denkt man sich die beiden Tafeln ins Unbegrenzte verlängert, so theilen sie den Raum in 4 Theile. Liegt ein Punkt a, der in keiner Tafel sich befindet, in einem dieser 4 Theile, so bilden (5. Satz 1.) sein $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ ein Rechteck, und da $aa_2 \parallel \mathfrak{T}_1$ ist (Anh. 30), so liegen a und a_2 entweder beide im + oder beide im — Raum der $\mathfrak{T}_1$; im ersten Falle ist der $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$ + und sein $\mathfrak{R}_2$ liegt in der $+ \mathfrak{T}_2$, also ist auch seine $\mathfrak{O}_2$ positiv; im zweiten Falle ist der $\mathfrak{A}_1$ und die $\mathfrak{O}_2$ negativ. Es gehen hieraus und aus den Num. 5 und 7 folgende Sätze für einen ausser den Tafeln liegenden Punkt hervor:

1) Die $\mathfrak{O}_1$ eines ausser den Tafeln liegenden Punktes ist + oder — je nachdem sein $\mathfrak{R}_1$ in der $+ \mathfrak{T}_1$ oder in der — $\mathfrak{T}_1$ liegt;
2) der $\mathfrak{A}_1$ eines solchen Punktes ist der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seiner $\mathfrak{O}_2$.

9. Liegt ein Punkt in der $\mathfrak{T}_1$, so wird diese von seinem $\mathfrak{L}_1$ in dem Punkte selbst getroffen, so dass also ein solcher Punkt

mit seinem $\mathfrak{R}_1$ zusammenfällt; demnach fallen auch das $\mathfrak{L}_2$ und und das $\mathfrak{KL}_1$ dieses Punktes zusammen, und daher auch sein $\mathfrak{R}_2$ mit seinem $\mathfrak{KR}$. Es ist daher für einen solchen Punkt der $\mathfrak{A}_1$ und die $\mathfrak{O}_2 = 0$ und der $\mathfrak{A}_2$ und die $\mathfrak{O}_1$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich. Ebenso fällt ein Punkt der $\mathfrak{T}_2$ mit seinem $\mathfrak{R}_2$ und sein $\mathfrak{KR}$ mit seinem $\mathfrak{R}_1$ zusammen. Endlich fällt ein Punkt der $\mathfrak{K}$, d. i. ein Punkt, der in beiden Tafeln zugleich liegt, mit seinem $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{KR}$ zusammen. Es geht daraus, aus dem zweiten Satze der Num. 8 und aus dem zweiten Satze der Num. 5 hervor, dass

1) *das* $\mathfrak{KL}_1$ *und* $\mathfrak{KL}_2$ *eines jeden Punktes* (auch wenn er in einer Tafel oder in der Kante liegt) *sich in seinem* $\mathfrak{KR}$ *schneiden;*
2) *der* $\mathfrak{A}_1$ *eines jeden Punktes der Länge und dem Vorzeichen gleich seiner* $\mathfrak{O}_2$ *ist;*
3) *jeder Punkt in der* $\mathfrak{T}_1$ *mit seinem* $\mathfrak{R}_1$, *sein* $\mathfrak{KR}$ *mit seinem* $\mathfrak{R}_2$ *und*
4) *jeder Punkt der* $\mathfrak{K}$ *mit seinem* $\mathfrak{KR}$, $\mathfrak{R}_1$ *und* $\mathfrak{R}_2$ *zusammenfällt.*

10. Aus den vorhergehenden Sätzen geht hervor, dass man die Risse eines gegebenen Punktes und den Punkt, dessen Risse gegeben sind, auch in anderer Art, als anfangs (3.) angegeben worden, finden kann. Hat man nemlich den zu bestimmenden Körper mit dem rechtwinkeligen Tafelsystem fest verbunden, so fällt man von einem Eckpunkte a des Körpers sein $\mathfrak{L}_1$ und findet daraus seinen $\mathfrak{R}_1$. Anstatt nun durch das $\mathfrak{L}_2$ des Punktes den $\mathfrak{R}_2$ zu finden, kann man folgendermassen verfahren: Man zieht aus a_1 die zur $\mathfrak{K}$ Senkrechte $a_1\alpha$, wodurch man den $\mathfrak{KR}(\alpha)$ erhält; legt man nun durch α in der $\mathfrak{T}_2$ eine Senkrechte zur $\mathfrak{K}$, so ist diese das $\mathfrak{KL}_2$; trägt man endlich auf dieses von α aus den $\mathfrak{A}_1$ dieses Punktes auf (und zwar in der + oder − $\mathfrak{T}_2$, je nachdem der $\mathfrak{P}$ (a) in dem + oder − Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt), so erhält man den gesuchten $\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}$ (a). In ähnlicher Art kann man auch mit Hülfe des $\mathfrak{R}_2$ und des $\mathfrak{A}_2$ den $\mathfrak{R}_1$ finden. Ebenso verfährt man für die übrigen Eckpunkte des Körpers. Sind umgekehrt a_1, a_2 die Risse eines Punktes a, so kann dieser auch so erhalten werden, dass man entweder das $\mathfrak{L}_1$ errichtet und darauf von a_1 aus eine Länge gleich der $\mathfrak{O}_2$ aufträgt (und zwar Fig. 1.

in dem + oder — Raum der $\mathfrak{T}_1$, je nachdem a_2 in der + oder — $\mathfrak{T}_2$ liegt); oder dass man das $\mathfrak{L}_2$ errichtet und darauf von a_2 aus eine Länge gleich der $\mathfrak{O}_1$ aufträgt, und zwar in dem + oder — Raum der $\mathfrak{T}_2$, je nachdem a_1 in der + oder — $\mathfrak{T}_1$ liegt. Man braucht also wie man sieht, sowohl wenn man die Risse eines gegebenen Punktes, als auch, wenn man mit Hilfe der Risse den durch sie bestimmten Punkt suchen will, nur zu einer Tafel ein Loth zu errichten. Diese Tafel, zu der wir das Loth errichten, wollen wir die Haupttafel, die andere die Nebentafel nennen.

Anm. Der Nutzen dieses neuen Verfahrens liegt einfach darin, dass man dadurch zur Bestimmung eines Punktes nur ein Loth braucht. Dies ist deshalb von Vortheil, weil wir die Lothe nicht zeichnen können, da sie ausserhalb unserer Tafeln liegen. Will man aus einem Punkte im Raume auf eine Tafel eine Senkrechte errichten, so braucht man dazu eines besonderen Apparates oder, wenn die Tafel horizontal gelegt wird, eines Senkels. Bedient man sich des Senkels, und stellt zu dem Ende die $\mathfrak{T}_1$ horizontal und daher die $\mathfrak{T}_2$ vertikal, so kann man von jedem Punkte blos das $\mathfrak{L}_1$, aber nicht das $\mathfrak{L}_2$ errichten, es ist also vortheilhaft, die $\mathfrak{R}$ eines Punktes mit einem einzigen Lothe auffinden zu können.

10 a. Will man mittelst eines Tafelsystems die gegenseitige Lage von beliebigen Punkten, ohne dass man die Risse derselben zeichnet, so bestimmen, dass Jeder darnach im Stande ist, die Lagen ihrer Risse anzugeben, so nimmt man in der Kante einen beliebigen Punkt (Ursprung) an, und bestimmt für jeden Punkt, ausser seinen Ordinaten ($\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$), noch die Entfernung seines Kantenrisses vom Ursprung. Diese Länge nennt man die Abscisse (Abg: Ab) des Punktes und bezeichnet sie als positiv (+) oder negativ (—), je nachdem sie von einem bestimmten Standpunkte aus, den wir für alle Punkte einhalten, rechts oder links vom Ursprung aufzutragen ist. In diesem Falle wird dann jeder Punkt durch drei Längen (Ab, $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$) bestimmt, die man dann auch seine Coordinaten nennt, und zwar die Ab seine x Coordinate, oder sein x, die $\mathfrak{O}_1$ sein y, die $\mathfrak{O}_2$ sein z. Um kurz und doch klar sein zu können, setzt man dann fest, dass die 3 Coordinaten in Zahlen

nach einem bestimmten Massstabe, z. B. in Millimetern, gegeben werden, und dass immer von den drei zur Bestimmung der Coordinaten eines Punktes gegebenen Zahlen (von denen jede, wie üblich, als positiv gilt, wenn entweder kein Zeichen oder + vorgesetzt ist, als negativ aber **nur** dann, wenn das Zeichen — voransteht) die **erste** die $\mathfrak{Ab}$ oder das x, die **zweite** die $\mathfrak{O}_1$ oder das y, die **dritte** die $\mathfrak{O}_2$ oder das z vorstellen. Spricht man also von dem Punkt (24, 18, 36), so ist sein x = 24, sein y = 18 und sein z = 36.

Bemerkung. Diese Art, die Punkte durch ihre drei Coordinaten zu geben, ist besonders zweckmässig für den Lehrer der darstellenden Geometrie, wenn er seinen Schülern eine gemeinschaftliche Aufgabe zur Ausarbeitung (z. B. bei Prüfungen) vorlegt. Ueberlässt er dabei den Schülern die Annahme der gegebenen Punkte, so fällt natürlich die Zeichnung für die einzelnen Schüler verschieden aus, bei manchen so, dass die Aufgabe unmöglich oder schwer ausführbar ist. Gibt er aber alle Punkte durch ihre Coordinaten, und zwar natürlich so, dass dieselben eine wünschenswerthe gegenseitige Lage erhalten, so gestaltet sich die Zeichnung für alle Schüler gleich.

11. Die Betrachtungen der Nr. 10 geben uns Mittel an die Hand, um ein Hinderniss zu beseitigen, das sich der graphischen Bestimmung von Gestalten, in der bis jetzt angegebenen Weise, entgegengesetzt hätte. Es wäre nemlich höchst unbequem auf zwei zu einander wirklich senkrechten Tafeln zu zeichnen, indem die Materie des einen Blattes bei der Ausführung der Zeichnungen auf dem andern hindernd im Wege steht. Dieses Hinderniss können und werden wir nun dadurch beseitigen, dass wir uns die Tafeln zwar senkrecht zu einander **denken**, aber nicht senkrecht zu einander **stellen**. Denkt man sich nemlich die beiden Tafeln nebst den zu bestimmenden Punkten, ihren Rissen, Lothen und Kantenlothen, und stellt sich vor, dass die $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{KL}_1$ und $\mathfrak{R}_1$ fest mit der $\mathfrak{T}_1$, die $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{KL}_2$ und $\mathfrak{R}_2$ fest mit der $\mathfrak{T}_2$ verbunden sind, so werden, wenn man die $\mathfrak{T}$ von einander entfernt und beliebig wohin legt, (man nennt dieses Auseinanderlegen der Tafeln „**Umklappen**") das $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ eines beliebigen Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}$ (a), nicht mehr diesen Punkt gemein haben, sondern es wird dieser zweimal erscheinen, einmal in

seinem $\mathfrak{L}_1$ und einmal in seinem $\mathfrak{L}_2$. Nennen wir den in $\mathfrak{L}_1$ liegenden $\mathfrak{P}$ (a) *den ersten Punkt* a, den in $\mathfrak{L}_2$ *den zweiten Punkt* a, so werden alle ersten Punkte durch das Umklappen der $\mathfrak{T}_1$ ihre Lage gegen die $\mathfrak{T}_2$, nicht aber gegen die $\mathfrak{T}_1$ verändern, und es wird ihre gegenseitige Lage, also auch die Gestalt, die sie bestimmen, unverändert bleiben. Ebenso wird die gegenseitige Lage sowohl der in der $\mathfrak{T}_1$, als der in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Punkte und Linien durch das Umklappen sich nicht ändern; dagegen werden die in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkte gegen die in der $\mathfrak{T}_2$ nach dem Umklappen eine andere Lage einnehmen, als vorher. Bestimmt man nun in den umgeklappten Tafeln wie sie zusammengestellt gedacht sind, so werden wir uns überzeugen, dass man, welche Tafel auch als Haupttafel angenommen wird, mit Hilfe der obigen (10.) Betrachtungen, sowohl die Risse eines Punktes, wenn dessen Lage gegen die Haupttafel bekannt ist, als auch aus den Rissen eines Punktes seine Lage gegen die Haupttafel finden kann, ohne die Tafeln *aufzuklappen*, d. h. *ohne sie in die Lage wirklich zu versetzen*, die von ihnen vorausgesetzt wird. Nur wenn man nachsehen will, ob richtig angegeben ist, wie die Tafeln gegen einander stehen, muss man sie, wie sich zeigen wird, in gewisser Weise gegen einander bewegt denken.

Fig. 2. 12. Wir werden in unseren Blättern die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ stets so umklappen, dass beide in dieselbe Ebene, nemlich in die unseres Zeichnungsblattes fallen. In diesem Falle ist es am einfachsten, die Umklappung noch dazu so vorzunehmen, dass die beiden Tafeln die $\mathfrak{K}$ gemeinschaftlich behalten. Dann werden die Punkte der $\mathfrak{K}$ in den umgeklappten Tafeln gegen die Punkte in der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{T}_2$ dieselbe Lage haben, wie in den aufgeklappten Tafeln. Sind nun beide Tafeln in unser Zeichnungsblatt, in dem die Fig. 2 liegt, so umgeklappt worden, dass $\mathfrak{K}$ die gemeinschaftliche Kante ist und liegt $+\ \mathfrak{T}_1$, wie es in unserer Figur angegeben ist, *vor* $\mathfrak{K}$, so muss $+\ \mathfrak{T}_2$ hinter $\mathfrak{K}$ liegen; denn da (nach 7.) der Raum ober dem Zeichnungsblatte*) der $+$ Raum

*) Obgleich es ohnehin stattfinden wird, so wollen wir doch, um allenfallsigen Irrungen zu begegnen, hier ein für allemal erklären, dass, wenn wir auf unsere Figuren verweisen, immer vorausgesetzt

der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{T}_2$ ist, so muss, wenn man sich die $\mathfrak{T}$ so aufgeklappt denkt, dass man die $\mathfrak{T}_2$ liegen lässt und die $\mathfrak{T}_1$ um $\mathfrak{K}$ dreht, bis sie senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ steht, die + $\mathfrak{T}_1$ oberhalb unseres Zeichnungsblattes (s. 7.) erscheinen, und wird ihr + Raum, also auch die + $\mathfrak{T}_2$ hinter der $\mathfrak{T}_1$ oder hinter der $\mathfrak{K}$ liegen, wie dies unserer Annahme zufolge der Fall ist

Hieraus geht zunächst der Satz hervor:

> Wenn man die beiden Tafeln eines Systems so in eine Ebene umklappt, dass sie die Kante gemeinschaftlich behalten (und selbstverständlich die Zeichnungen darauf einander nicht zu decken), so erscheinen die + $\mathfrak{T}_1$ und die + $\mathfrak{T}_2$ auf **entgegengesetzten** Seiten der Kante.

Haben wir in der angegebenen Art umgeklappt, so erscheinen die beiden Kantenlothe eines Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}$ (a), da beide durch denselben Punkt in der Kante gehen und auf dieser senkrecht stehen, als eine einzige zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade, und ist demnach die Verbindungslinie der beiden Risse a_1, a_2 nach der Umklappung eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade. Wir haben daher den Satz:

> **Wenn man die beiden Tafeln so in eine Ebene umklappt, dass sie die $\mathfrak{K}$ gemeinsam behalten, so steht die Verbindungslinie der beiden Risse eines Punktes senkrecht zur Kante. Wir sagen dann, die Risse eines Punktes liegen senkrecht übereinander.**

Anmerkung. Bei der eben angeführten Art der Umklappung zeichnen wir stets die $\mathfrak{K}$ so, dass sie mit dem vorderen (oder hinteren) Rand des Zeichnungsblattes parallel ist, und dass + $\mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}$ und daher + $\mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}$ liegt.

---

wird, der Schüler habe das Zeichnungsblatt vor sich liegen und zwar so, dass selbstverständlich die Zeichnung nach oben gerichtet ist, damit man sie sieht, und die darin befindlichen Buchstaben aufrecht stehen, wodurch sich das rechts, oben und unten klar herausstellt.

Fig. 3. **13. So einfach und leichtverständlich auch die eben beschriebene Umklappungsart ist, so werden wir sie doch selten anwenden; denn sie hat den Nachtheil, dass in den Fällen, wo die Ordinaten der gegebenen Punkte theils positiv, theils negativ sind, die beiden Risse des von den Punkten bestimmten Gebildes einander theilweise decken.** In der That liegnn ja v o r der $\mathfrak{K}$ sowohl die $\mathfrak{R}_1$ von Punkten mit positiven $\mathfrak{O}_1$, als auch die $\mathfrak{R}_2$ von Punkten mit negativen $\mathfrak{O}_2$, und werden sich daher z. B in der Fig. 2, wenn man a_1 und b_1 sowie a_2 und b_2 mit einander verbindet, diese Verbindungslinien gegenseitig durchschneiden. Solches Ineinandergreifen der beiden Risse eines Gebildes führt aber leicht zu Unklarheiten der Zeichnung und muss gewöhnlich vermieden werden. Demgemäss werden wir in der Regel folgende Umklappungsart anwenden. Wir denken uns zunächst die Tafeln so umgeklappt, wie in voriger Nummer, und schieben dann (wie in Fig. 3) die beiden Tafeln (ohne sie von der Ebene des Zeichnungsblattes abzuheben) so auseinander, dass die $\mathfrak{K}$ z w e i m a l erscheint (einmal als $\mathfrak{K}_1$ durch Verschiebung der $\mathfrak{T}_1$ und als $\mathfrak{K}_2$ durch Verschiebung der $\mathfrak{T}_2$), und dass jeder Punkt der $\mathfrak{K}$ bei dieser Vorschiebung eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade beschreibt. Dann erscheint auch jeder $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ doppelt, einmal in der $\mathfrak{K}_1$, wo wir ihn $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_1$ nennen und dem Buchstaben zu seiner Bezeichnung eine 1 anhängen, und einmal in der $\mathfrak{K}_2$ als $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_2$. Die Verbindungslinie zweier solchen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ eines Punktes z. B. $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ steht auf $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ senkrecht, und die beiden Kantenlothe eines Punktes fallen daher immer noch in e i n e Gerade. Ebenso ist immer noch die $+ \mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}_1$ und die $+ \mathfrak{T}_2$ hinter der $\mathfrak{K}_2$; es ist Alles so, wie in voriger Nummer, nur dass wir z w e i Kanten haben statt e i n e r, und dass dadurch die beiden Risse des gegebenen Gebildes nicht mehr in einander greifen, sobald man nur, wie in unserer Figur, die Tafeln weit genug auseinander schiebt, (was ja immer geschehen kann).

Auf eine kleine Veränderung müssen wir aber noch aufmerksam machen, die das Erscheinen zweier $\mathfrak{K}$, statt einer, mit sich bringt. Unter $\mathfrak{O}_1$ eines Punktes ist in diesem Falle zu verstehen: D i e   E n t f e r n u n g   d e r $\mathfrak{R}_1$ v o m   K a n t e n r i s s   eins (während es früher bei nur einer $\mathfrak{K}$ geheissen hat vom Kantenriss), und ebenso haben wir von nun an immer statt der $\mathfrak{K}$ die-

jenige der beiden Kanten ($\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$) zu nennen, die entsprechend ist; wenn z. B. früher gesagt wurde: „ein Punkt in der $\mathfrak{T}_1$ hat seinen $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}$“, so muss es jetzt dafür heissen „in der $\mathfrak{K}_2$“.

14. Obgleich wir in unseren Blättern die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ immer so umklappen, wie in den Num. 12. und 13. angegeben ist, so muss sich der Schüler dennoch mit der allgemeinsten Art der Umklappung der Tafeln bekannt und vertraut machen, theils weil wir später selbst bei anderer Gelegenheit davon Gebrauch machen, theils weil man in der Anwendung der darstellenden Geometrie (auf Maschinen- und Bauzeichnen, Darstellung von Werkzeugen, Fabrikaten) mitunter in anderer Art, als in Num. 12. und 13, ja sogar oft so umklappt, dass die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ verschiedenen Blättern angehören, wie dies z. B. der Fall ist, wenn von zwei auf zwei verschiedenen Papierbögen ausgeführten Zeichnungen die eine den $\mathfrak{R}_1$ und die andere den $\mathfrak{R}_2$ desselben Körpers vorstellen. Solche von der vorigen Nr. abweichende Umklappungen stellen sich als nothwendig heraus, wenn der Raum des Blattes die einfache Umklappungsart nicht zulässt. Fig. 4.

Wir wollen daher die allgemeinste Art des Umklappens der beiden Tafeln besprechen, und angeben, wie man überhaupt von nun an, wo die Tafeln stets umgeklappt werden, zu verfahren hat, um einen Körper graphisch zu bestimmen.

Man nimmt eine der beiden Tafeln an, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, und bringt damit den zu bestimmenden Körper in feste Verbindung. Nun fällt man von allen Ecken des Körpers Lothe zu der Tafel, zeichnet deren Fusspunkte d. h. die ersten Risse a_1, b_1, c_1 etc. und misst die $\mathfrak{A}_1$ der Punkte (entweder mit einem Zirkel um die wirkliche Länge derselben sich aufzuzeichnen, oder mit einem Massstabe um die Längen in Zahlen auszudrücken) unter Berücksichtigung des Vorzeichens (das übrigens gewöhnlich für alle diese $\mathfrak{A}_1$ positiv oder -0 sein wird, da man den Körper so aufstellen wird, dass seine Ecken theils in der $\mathfrak{T}_1$ theils in dem $+$ Raume dieser Tafel liegen). Sobald dies geschehen, kann der Körper entfernt werden, denn seine Gestalt ist durch die gefundenen Dinge vollkommen bestimmt, sobald man noch durch die richtige Verbindung der gezeichneten $\mathfrak{R}_1$ bestimmt hat, in welcher Ordnung die Ecken des Körpers verbunden sind.

Nun hat man noch die $\mathfrak{R}_2$ der Punkte zu finden, und demnach eine $\mathfrak{T}_2$ anzunehmen, die man in irgend einer Linie zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehend voraussetzt aber nicht wirklich so stellt, sondern irgendwie umklappt, so dass die $\mathfrak{K}$ zweimal erscheint (als $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$). Denken wir uns dabei vor dem Umklappen der Tafeln einen Punkt auf der $\mathfrak{K}$ angenommen, den wir als Ursprung ($\mathfrak{U}$) betrachten (s. 10 a.) und der die $\mathfrak{K}$ in eine $+ \mathfrak{K}$ und $- \mathfrak{K}$ theilt, so sieht man, dass durch die Umklappung der Tafeln jede Abscisse doppelt erscheint, als Abscisse eins ($\mathfrak{Ab}_1$) auf der $\mathfrak{K}_1$ und als $\mathfrak{Ab}_2$ auf der $\mathfrak{K}_2$, und dass offenbar diese beiden Abscissen gleiche Länge haben, da sie vor dem Umklappen sich decken. Nennen wir noch die durch Umklappen doppelt erscheinenden $+ \mathfrak{K}$ in der einen Lage $+ \mathfrak{K}_1$ in der anderen $+ \mathfrak{K}_2$ (ebenso $- \mathfrak{K}_1$, $- \mathfrak{K}_2$), so sieht man, dass die beiden Umklappungen der $\mathfrak{Ab}$ eines Punktes gleiche Vorzeichen haben, und es gilt daher für die allgemeine Umklappung der Satz:

die $\mathfrak{Ab}_1$ eines Punktes ist der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{Ab}_2$.

Dieser Satz in Verbindung mit einem früher angeführten, wornach

die $\mathfrak{O}_1$ eines Punktes (d. h. die Entfernung seines $\mathfrak{KR}_1$ von seinem $\mathfrak{R}_1$) der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seinem $\mathfrak{A}_1$ ist, [illegible]

wird uns dazu dienen, die zweiten Risse unserer Punk[illegible] den, nachdem wir deren $\mathfrak{R}_1$ gezeichnet, und deren [illegible] haben. Es ist aber noch auf einen wichti[illegible] sam zu machen, den wir mit Hilfe uns[illegible] hervorheben wollen. Hat man nemlich [illegible] c_1) der gegebenen Punkte gezeichnet [illegible] so nimmt man, wie oben angegeben, d[illegible] liegt die $\mathfrak{T}_2$ in einer Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$), [illegible] betrachtet irgend einen Punkt der $\mathfrak{K}_1$ (h[illegible] einen Punkt der $\mathfrak{K}_2$ (hier a_2) als $\mathfrak{U}_2$. Nun [illegible] bestimmen, auf welcher Seite von a_1 un[illegible] bezw. die $+ \mathfrak{K}_2$, und auf welcher Seite von [illegible] $\mathfrak{T}_1$ und bezw. die $+ \mathfrak{T}_2$ liegen. In Bezug [illegible] mungen nun ist zu bemerken, dass von [illegible] ($+ \mathfrak{K}_1$, $+ \mathfrak{K}_2$, $+ \mathfrak{T}_1$, $+ \mathfrak{T}_2$) drei beli[illegible]

den können, während das Vierte daraus bestimmt ist. Denn denken wir uns die eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_2$ verschoben bis $\mathfrak{a}_2$ auf $\mathfrak{a}_1$, $+\mathfrak{K}_1$ auf $+\mathfrak{K}_2$, und die beiden Tafeln in einer Ebene liegen, so müssen (s. Nr. 12) die beiden positiven Tafeln auf entgegengesetzten Seiten der $\mathfrak{K}$ erscheinen; es geht also hieraus hervor, dass der Theil der $\mathfrak{T}_2$, welcher bei der eben genannten Verschiebung hinter die $\mathfrak{K}_1$ fällt, d. i. der Theil, in welchem $\mathfrak{a}_2$ liegt, die $+\mathfrak{T}_2$ ist. Es geht aber auch aus dieser Betrachtung hervor:

Liegen die beiden Tafeln in **einer** Ebene, und sind zugleich **beide** Kanten ($\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$) parallel zum vorderen Rande des Zeichnungsblattes, und liegt, wie das von nun an immer vorausgesetzt wird, $+\mathfrak{T}_1$ **vor** der $\mathfrak{K}_1$ und $+\mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}_2$, so müssen die positiven Kanten (die $+\mathfrak{K}_1$ und die $+\mathfrak{K}_2$) entweder beide rechts oder beide links liegen. Dasselbe gilt, wenn die Tafeln in verschiedenen Ebenen liegen, in jeder die $\mathfrak{K}$ parallel zum vorderen Rande des entsprechenden Blattes ist, und $+\mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}_1$, $+\mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}_2$ sich befindet.

Anm. Man wird nun sehen, wie sich bei der Aufsuchung der Risse von Punkten die in den Num. 12. und 13. angegebene Umklappungsart von der in vorliegender Nummer unterscheidet. Der Unterschied besteht darin, dass man nach ersterer (12. und 13.) Art mit dem $\mathfrak{KL}_1$ eines Punktes auch sein $\mathfrak{KL}_2$ hat, weil bei dieser Umklappung die beiden Kantenlothe in eine Gerade fallen; nach letzterer Umklappungsart hingegen muss man die $+\mathfrak{K}_1$, $+\mathfrak{K}_2$, $+\mathfrak{T}_1$, $+\mathfrak{T}_2$ so, wie angegeben, wählen, damit die Umklappung richtig ausgeführt ist, und dann mit Hilfe der $\mathfrak{Ab}_1$ und $\mathfrak{Ab}_2$ aus dem $\mathfrak{KL}_1$ das $\mathfrak{KL}_2$ erst aufsuchen. Das Uebrige ist [illegible] beide Arten gleich.

[illegible] wir nun in vorliegender Num. angegeben haben, wie man [illegible] $\mathfrak{KL}_1$ eines Punktess ein $\mathfrak{KL}_2$ findet, so werden wir [illegible] in der Folge die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nach 12. oder [illegible] cht dabei aufhalten, zu zeigen, wie [illegible], wenn anders umgeklappt worden [illegible] gut thun, wenn er bei einigen [illegible] ersucht, sie für den Fall zu

Nun hat man noch die $\mathfrak{R}_2$ der Punkte zu finden, und demnach eine $\mathfrak{T}_2$ anzunehmen, die man in irgend einer Linie zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehend *voraussetzt* aber nicht wirklich so *stellt*, sondern irgendwie umklappt, so dass die $\mathfrak{K}$ zweimal erscheint (als $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$). Denken wir uns dabei vor dem Umklappen der Tafeln einen Punkt auf der $\mathfrak{K}$ angenommen, den wir als Ursprung ($\mathfrak{U}$) betrachten (s. 10 a.) und der die $\mathfrak{K}$ in eine $+ \mathfrak{K}$ und $- \mathfrak{K}$ theilt, so sieht man, dass durch die Umklappung der Tafeln jede Abscisse doppelt erscheint, als Abscisse eins ($\mathfrak{Ab}_1$) auf der $\mathfrak{K}_1$ und als $\mathfrak{Ab}_2$ auf der $\mathfrak{K}_2$, und dass *offenbar diese beiden Abscissen gleiche Länge haben*, da sie vor dem Umklappen sich decken. Nennen wir noch die durch Umklappen doppelt erscheinenden $+ \mathfrak{K}$ in der einen Lage $+ \mathfrak{K}_1$ in der anderen $+ \mathfrak{K}_2$ (ebenso $- \mathfrak{K}_1$, $- \mathfrak{K}_2$), so sieht man, dass die beiden Umklappungen der $\mathfrak{Ab}$ eines Punktes *gleiche* Vorzeichen haben, und es gilt daher für die allgemeine Umklappung der Satz:

> *die $\mathfrak{Ab}_1$ eines Punktes ist der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{Ab}_2$.*

Dieser Satz in Verbindung mit einem früher angeführten, wornach

> *die $\mathfrak{O}_1$ eines Punktes* (d. h. die Entfernung seines $\mathfrak{KR}_1$ von seinem $\mathfrak{R}_1$) *der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seinem $\mathfrak{A}_1$ ist,*

wird uns dazu dienen, die zweiten Risse unserer Punkte zu finden, nachdem wir deren $\mathfrak{R}_1$ gezeichnet, und deren $\mathfrak{A}_1$ gemessen haben. Es ist aber noch auf einen wichtigen Umstand aufmerksam zu machen, den wir mit Hilfe unserer Figur (Fig. 4) klar hervorheben wollen. Hat man nemlich die ersten Risse (a_1, b_1, c_1) der gegebenen Punkte gezeichnet und deren $\mathfrak{A}_1$ gemessen, so nimmt man, wie oben angegeben, die $\mathfrak{T}_2$ (in unserer Figur liegt die $\mathfrak{T}_2$ in einer Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$), die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ an, und betrachtet irgend einen Punkt der $\mathfrak{K}_1$ (hier a_1) als $\mathfrak{U}_1$, irgend einen Punkt der $\mathfrak{K}_2$ (hier a_2) als $\mathfrak{U}_2$. Nun hat man noch zu bestimmen, auf welcher Seite von a_1 und a_2 die $+ \mathfrak{K}_1$ und bezw. die $+ \mathfrak{K}_2$, und auf welcher Seite von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ die $+ \mathfrak{T}_1$ und bezw. die $+ \mathfrak{T}_2$ liegen. In Bezug auf diese Bestimmungen nun ist zu bemerken, dass *von diesen vier Dingen* ($+ \mathfrak{K}_1$, $+ \mathfrak{K}_2$, $+ \mathfrak{T}_1$, $+ \mathfrak{T}_2$) *drei beliebig gewählt wer-*

den können, während das Vierte daraus bestimmt ist. Denn denken wir uns die eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_2$ verschoben bis a_2 auf $a_{,,}$ $+\ \mathfrak{K}_1$ auf $+\ \mathfrak{K}_2$, und die beiden Tafeln in einer Ebene liegen, so müssen (s. Nr. 12) die beiden positiven Tafeln auf entgegengesetzten Seiten der $\mathfrak{K}$ erscheinen; es geht also hieraus hervor, dass der Theil der $\mathfrak{T}_2$, welcher bei der eben genannten Verschiebung hinter die $\mathfrak{K}_1$ fällt, d. i. der Theil, in welchem a_2 liegt, die $+\ \mathfrak{T}_2$ ist. Es geht aber auch aus dieser Betrachtung hervor:

Liegen die beiden Tafeln in **einer** Ebene, und sind zugleich **beide** Kanten ($\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$) parallel zum vorderen Rande des Zeichnungsblattes, und liegt, wie das von nun an immer vorausgesetzt wird, $+\ \mathfrak{T}_1$ **vor** der $\mathfrak{K}_1$ und $+\ \mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}_2$, so müssen die positiven Kanten (die $+\ \mathfrak{K}_1$ und die $+\ \mathfrak{K}_2$) entweder beide rechts oder beide links liegen. Dasselbe gilt, wenn die Tafeln in verschiedenen Ebenen liegen, in jeder die $\mathfrak{K}$ parallel zum vorderen Rande des entsprechenden Blattes ist, und $+\ \mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}_1$, $+\ \mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}_2$ sich befindet.

Anm. Man wird nun sehen, wie sich bei der Aufsuchung der Risse von Punkten die in den Num. 12. und 13. angegebene Umklappungsart von der in vorliegender Nummer unterscheidet. Der Unterschied besteht darin, dass man nach ersterer (12. und 13.) Art mit dem $\mathfrak{KL}_1$ eines Punktes auch sein $\mathfrak{KL}_2$ hat, weil bei dieser Umklappung die beiden Kantenlothe in eine Gerade fallen; nach letzterer Umklappungsart hingegen muss man die $+\ \mathfrak{K}_1$, $+\ \mathfrak{K}_2$, $+\ \mathfrak{T}_1$, $+\ \mathfrak{T}_2$ so, wie angegeben, wählen, damit die Umklappung richtig ausgeführt ist, und dann mit Hilfe der $\mathfrak{Ab}_1$ und $\mathfrak{Ab}_2$ aus dem $\mathfrak{KL}_1$ das $\mathfrak{KL}_2$ erst aufsuchen. Das Uebrige ist für beide Arten gleich.

Da wir nun in vorliegender Num. angegeben haben, wie man überhaupt aus dem $\mathfrak{KL}_1$ eines Punktess ein $\mathfrak{KL}_2$ findet, so werden wir der Einfachheit wegen in der Folge die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nach 12. oder 13. umklappen, und uns nicht dabei aufhalten, zu zeigen, wie man zu verfahren gehabt hätte, wenn anders umgeklappt worden wäre. Der Schüler jedoch wird gut thun, wenn er bei einigen folgenden Aufgaben zur Uebung versucht, sie für den Fall zu

lösen, dass die in der vorliegenden Num. angegebene allgemeine Umklappungsart angewendet wird.

15. Hat man die Tafeln in irgend einer der oben aufgeführten Arten umgeklappt, und will man die Lage eines Punktes a aus seinen Rissen finden, so hat man vor Allem zu sehen, ob die Punkte, die als Risse des zu suchenden Punktes angegeben sind, wirklich als solche auftreten können, d. h. ob sie (nach 12. und 13.) in einer zur $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ senkrechten Geraden liegen, oder, im Falle der allgemeinen Umklappung, ob $\mathfrak{Ab}_1 = \mathfrak{Ab}_2$ ist und die positiven Tafeln richtig angegeben sind. Ferner hat man zu bedenken, dass es (nach 11.) zwei $\mathfrak{P}$(a) gibt, einen ersten und einen zweiten; man wird daher fragen können, welcher von diesen Punkten gemeint sei? Allein wir haben oben (11.) gezeigt, dass die gegenseitige Lage aller ersten oder aller zweiten Punkte durch das Umklappen nicht verändert wird, und dass es daher gleichgültig ist, ob man den ersten oder zweiten Punkt a nimmt, d. h. ob man die $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ als Haupttafel annimmt, wenn man für alle Punkte die nemliche Tafel als Haupttafel festsetzt. Nimmt man nun die $\mathfrak{T}_1$ als Haupttafel an, so wird (in den Figuren 2, 3 und 4) der $\mathfrak{P}$(a) in seinem $\mathfrak{L}_1$ liegen, und zwar, weil seine $\mathfrak{O}_2$ in der + $\mathfrak{T}_2$ liegt, also positiv ist, in dem + Raum der $\mathfrak{T}_1$, d. h. über dem Zeichnungsblatt, so weit als seine $\mathfrak{O}_2$ angibt. Der $\mathfrak{P}$(b), dessen $\mathfrak{O}_2$ negativ ist, wird in dem — Raum der $\mathfrak{T}_1$, also unter unserem Blatte so tief liegen, als seine $\mathfrak{O}_2$ angibt (s. 10.) Wählt man dagegen $\mathfrak{T}_2$ als Haupttafel, so liegt der $\mathfrak{P}$(a), da seine $\mathfrak{O}_1$ positiv ist, in dem + Raum der $\mathfrak{T}_2$, also über dem Zeichnuugsblatte, der $\mathfrak{P}$(b), dessen $\mathfrak{O}_1$ negativ ist, unter demselben, so weit davon entfernt, als seine $\mathfrak{O}_1$ angibt. Wenn wir daher von nun an von einem $\mathfrak{P}$(a) reden, also (nach 6.) von einem Punkte, dessen Risse mit a_1, a_2 bezeichnet sind, so setzen wir allemal voraus, dass

1) die Risse a_1, a_2 des Punktes die Bedingungen erfüllen, die sie zu erfüllen haben, also in unseren Zeichnungen (wo die Umklappung der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nach 12. oder 13. ausgeführt wird) in einer zur $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ senkrechten Geraden liegen, oder, wenn die Umklappung anders ausgeführt ist, dass $\mathfrak{Ab}_2$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich $\mathfrak{Ab}_1$ ist, und die positiven Tafeln richtig gewählt sind, dass ferner

2) *für alle Punkte dieselbe Haupttafel angenommen wird.*

16. Es sei irgend eine Gestalt durch die Risse so vieler Punkte a, b, c etc. derselben bestimmt, als zu ihrer Bestimmung nothwendig sind. Wenn man nun statt der gegebenen $\mathfrak{K}_1$ eine andere *damit parallele* Linie z. B. $\mathfrak{K}'_1$ als $\mathfrak{K}_1$ ansieht, *ausserdem aber Alles unverändert lässt*, so wollen wir sehen

1) ob die gegebenen Risse eines Punktes noch immer als solche betrachtet werden können, und wenn diess der Fall ist, ob

2) die nun durch sie bestimmten Punkte dieselbe gegenseitige Lage haben, wie die gegebenen Punkte.

ad 1) Da $\mathfrak{K}_1 \parallel \mathfrak{K}'_1$ ist, so sind die $\mathfrak{KL}_1$ für die $\mathfrak{K}'_1$ dieselben, wie für die $\mathfrak{K}_1$, und sind die Abscissen auf der neuen Kante ($\mathfrak{K}'_1$) ebenso gross als für die $\mathfrak{K}_1$, also gleich den $\mathfrak{Ab}_2$. Da ferner ausser der Verschiebung der $\mathfrak{K}_1$ nichts geändert worden ist, also auch die $+\ \mathfrak{K}'_1$ auf derselben Seite des Ursprungs liegt wie die $+\ \mathfrak{K}_1$, so sind auch die Vorzeichen für die neuen und alten $\mathfrak{Ab}_1$ gleich geblieben, und demnach erfüllen, *nach* der Veränderung der $\mathfrak{K}_1$, die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die regelrechten Bedingungen.

ad 2) Da die $\mathfrak{R}_1$ der Punkte liegen geblieben sind, und die $\mathfrak{O}_2$ sich nicht geändert haben, so kommen wir, wenn die $\mathfrak{T}_1$ als Haupttafel angesehen wird, auf dieselben Punkte, gleichviel, ob wir die Linie $\mathfrak{K}_1$ oder die $\mathfrak{K}'_1$ als $\mathfrak{K}_1$ ansehen.

Es haben also die durch die gezeichneten Risse bestimmten Punkte dieselbe gegenseitige Lage, und bestimmen also dieselbe Gestalt, gleichviel, ob wir die gegebene $\mathfrak{K}_1$ oder eine damit Parallele als solche ansehen. Ebenso lässt sich zeigen, dass statt der gegebenen $\mathfrak{K}_2$ jede mit ihr Parallele als $\mathfrak{K}_2$ angesehen werden kann, ohne dass die durch die gezeichneten Risse bestimmten Punkte eine andere gegenseitige Lage einnehmen.

Man kann daher die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, die man zum Entwurfe einer Zeichnung benützt hat, gewöhnlich (wo man die Kanten parallel zum vorderen Rande des Blattes macht) weglassen, da man weiss, dass sie parallel sind zu dem vorderen Rande des Blattes, in dem sie liegen. Man kann ferner, wenn die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in genannter Weise gegeben sind, jede von beiden irgendwohin parallel verschieben. Wenn man daher in irgend einer folgenden Figur

keine $\mathfrak{K}$ gezeichnet findet, so weiss man, dass sie parallel zum vorderen Rande des Blattes *irgendwo* angenommen werden können. Wir werden daher in den folgenden Figuren in der Regel die Kanten weglassen. Sobald wir aber eine Kante brauchen, z. B. die $\mathfrak{K}_1$, so nehmen wir sie (versteht sich parallel zum vorderen Rande des Blattes) so an, *dass der* $\mathfrak{R}_1$ *eines Punktes in ihr liegt*, meistens zugleich so, *dass die* $\mathfrak{O}_1$ *der übrigen Punkte* positiv sind.

17. Nachdem wir nun wissen, wie ein beliebiger Punkt durch Zeichnung bestimmt werden kann, gehen wir über zur Bestimmung von Geraden und Ebenen. Ehe wir aber darüber sprechen, wollen wir erst über die graphische Bestimmung von Raumgrössen überhaupt Folgendes bemerken. Um irgend eine Raumgrösse zu bestimmen, genügt es, so viele Punkte derselben (durch ihre Risse) zu bestimmen, als ihrer Natur nach zu ihrer Bestimmung nothwendig sind; allein für sehr viele Aufgaben begnügt man sich damit nicht, sondern denkt sich von allen Punkten der zu bestimmenden Raumgrösse Lothe zur $\mathfrak{T}_1$ gezogen, so dass man alle $\mathfrak{R}_1$ der einzelnen Punkte der Raumgrösse erhält. Den Inbegriff aller dieser $\mathfrak{R}_1$ nennt man den $\mathfrak{R}_1$ der Raumgrösse. Ein ähnliches hat man unter dem $\mathfrak{R}_2$ einer Raumgrösse zu verstehen. Es gehen daraus folgende Sätze hervor:

1) *Die Risse von Punkten, die auf einer gegebenen Raumgrösse liegen, liegen in den entsprechenden Rissen dieser Raumgrösse.*

2) *Hat man die Risse von zwei Raumgrössen, so muss jeder Punkt, den sie gemeinschaftlich enthalten, seinen* $\mathfrak{R}_1$ *in den* $\mathfrak{R}_1$, *seinen* $\mathfrak{R}_2$ *in den* $\mathfrak{R}_2$ *beider Raumgrössen haben*; daraus folgt:

3) *Sollen zwei Raumgrössen einen Punkt gemein haben, so müssen sowohl die* $\mathfrak{R}_1$ *als die* $\mathfrak{R}_2$ *derselben einen Punkt gemein haben.*

4) Ausserdem ist noch allgemein zu bemerken, dass man den Schnitt irgend eines geometrischen Gebildes mit einer Tafel seine *Spur* nennt, und zwar *erste* oder *zweite* Spur, je nachdem der Schnitt mit der $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ bezeichnet werden soll.

18. Von jeder begrenzten Geraden, die wir zu bestimmen haben, geben wir die Risse ihrer Endpunkte an, und weil damit ihre Endpunkte bestimmt sind, so ist es auch die Gerade selbst. Allein wir begnügen uns nicht damit, sondern zeichnen auch die Risse der Geraden. Untersuchen wir daher, was die Risse einer Geraden sind.

Um den $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden A, die wir als *unbegrenzt* voraussetzen, zu finden, müssen wir von allen Punkten derselben Lothe zur $\mathfrak{T}_1$ errichten und zusehen, wo sie diese treffen. Ist nun die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so fallen alle $\mathfrak{L}_1$ ihrer Punkte mit der Geraden selbst zusammen, und ist daher in diesem Falle der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden der Punkt, in welchem sie die $\mathfrak{T}_1$ schneidet. Steht aber die Gerade schief gegen die $\mathfrak{T}_1$, so werden die $\mathfrak{L}_1$ ihrer Punkte Parallellinien sein und daher eine Ebene bilden (Anh. 6), die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (Anh. 16.). Nennen wir diese Ebene die *erste Lothebene* oder die *Lothebene eins* ($\mathfrak{LE}_1$) der Geraden, so ist die Gerade, nach welcher diese $\mathfrak{LE}_1$ die $\mathfrak{T}_1$ schneidet, der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden A. Es gehen daraus folgende Sätze hervor:

1) *Wenn eine Gerade auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ihre erste Spur, d. h. der Punkt, in welchem sie die $\mathfrak{T}_1$ schneidet;*
2) *in jedem andern Falle ist der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden wieder eine Gerade, und zwar* **die erste Spur** *der $\mathfrak{LE}_1$ der Geraden, d. h. der Ebene, welche durch die Gerade geht, und auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht.*

Anm. Eine jede Gerade, die auf einer Tafel senkrecht steht, nennen wir ein *Loth* (abg. $\mathfrak{L}$) und zwar ein *Loth eins* ($\mathfrak{L}_1$) oder *Loth zwei* ($\mathfrak{L}_2$), je nachdem sie auf der $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht.

19. Ist der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden der Punkt a_1 (s. 18. Satz 1.), so ist die Gerade in a_1 auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht; da es aber durch a_1 nur eine einzige Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ gibt, so ist die Lage der Geraden durch ihren $\mathfrak{R}_1$ *bestimmt*. Ist die Gerade A_1 der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden A, d. h. (nach 18. Satz 2.) schneidet die $\mathfrak{LE}_1$ die $\mathfrak{T}_1$ nach A_1, so ist damit die $\mathfrak{LE}_1$ *bestimmt*; denn es gibt (Anh. 18.) durch A_1 nur eine einzige Ebene, die zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht

steht. Ist zugleich die Gerade A_2 der $\mathfrak{R}_2$ der Geraden A, so ist dadurch ihre $\mathfrak{LE}_2$ bestimmt. Hat man daher die Risse einer Geraden A, so sind dadurch im Allgemeinen zwei Ebenen bekannt, in denen A liegt, und es erscheint daher die zu bestimmende Gerade als Durchschnitt dieser Ebenen. Wir sagen im Allgemeinen, weil auch der Fall eintreten kann, dass die beiden Lothebenen zusammenfallen, und die beiden Risse der Geraden demnach nur diese einzige Ebene bestimmen. In diesem Falle, aber nur dann, muss offenbar diese gemeinschaftliche Lothebene auf der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{T}_2$, also auch auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht stehen, und demnach die beiden Risse der Geraden, wie die beiden Kantenlothe eines Punktes, in einem einzigen Punkte auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht stehen, so dass nach der gewöhnlichen Umklappungsart der Tafeln, die beiden Risse in eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade zusammenfallen. Wir haben demnach folgende Sätze:

1) Steht eine Gerade senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt, und die Gerade ist durch ihren $\mathfrak{R}_1$ bestimmt.
2) Ist der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden A eine Gerade A_1, so ist sie dadurch nicht bestimmt, wohl aber ist ihre $\mathfrak{LE}_1$ bekannt; diese geht durch A_1 und steht auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht.
3) Stehen beide Risse in dem nemlichen Punkte a der $\mathfrak{K}$ auf dieser senkrecht, so ist dadurch eine einzige (auf der $\mathfrak{K}$ senkrechte) Ebene bestimmt, in der die Gerade liegt, und die Gerade steht dann selbst senkrecht zur $\mathfrak{K}$. In diesem Falle ist die Gerade durch ihre Risse nicht bestimmt; und es müssen daher zwei Punkte derselben angegeben werden.
4) In allen andern Fällen sind die beiden Risse einer Geraden A gerade Linien, welche die Lage der Geraden vollkommen bestimmen. Es ist nemlich die Gerade der Durchschnitt, der durch den $\mathfrak{R}_1$ bestimmten $\mathfrak{LE}_1$ mit der durch den $\mathfrak{R}_2$ bestimmten $\mathfrak{LE}_2$.

Haben wir daher in Bezug auf Gerade Aufgaben zu lösen, bei denen ihre Endpunkte ausser Acht bleiben können, so lassen sich dieselben zwar auch dadurch bestimmen, dass man die Risse

zweier beliebigen Punkte a, b derselben angiebt; gewöhnlich aber werden wir, zur Bestimmung ihrer Lage, von einer auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Geraden blos den Punkt, der ihr $\mathfrak{R}_1$ ist, und von einer schiefen Geraden ihre beiden Risse zeichnen; nur bei einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Geraden genügen zur Bestimmung ihrer Lage ihre Risse *nicht*, sondern *müssen* wir zwei Punkte derselben (durch ihre Risse) angeben.

Anm. Giebt man von einer zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Geraden zwei Punkte an, so fallen ihre $\mathfrak{R}_1$ in einen Punkt zusammen.

20. Wir wollen nun festsetzen, wie wir die Geraden in den verschiedenen Fällen bezeichnen.

a) Ist eine unbegrenzte Gerade senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so genügt es, den Punkt zu zeichnen, der der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden (und jedes Punktes derselben) ist. Wir bezeichnen diesen Punkt, wie alle Punkte der $\mathfrak{T}_1$, mit a_1, b_1 etc. und benennen eine solche Gerade durch den Buchstaben, mit welchem ihr $\mathfrak{R}_1$ bezeichnet ist. Wir nennen also eine zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechte Gerade, deren $\mathfrak{R}_1$ mit a_1 bezeichnet ist, *die Gerade* a_1 (abg. $\mathfrak{G}(a_1)$).

b) Stehen die Risse einer unbegrenzen Geraden auf der $\mathfrak{K}$ in demselben Punkt senkrecht, und ist also die Gerade selbst senkrecht zur Kante, so *müssen* wir zur Bestimmung ihrer Lage (19. Satz 3.) zwei Punkte a, b von ihr (versteht sich durch ihre Risse) angeben und nennen wir sie dann (wie jede Gerade, welche die Punkte a, b enthält) *die Gerade* ab (abg. $\mathfrak{G}(ab)$).

c) In *allen* andern Fällen zeichnen wir von einer unbegrenzten Geraden ihren $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, denken uns die Gerade selbst mit einem Buchstaben aus dem *grossen* lateinischen Alphabete bezeichnet und schreiben an jeden Riss derselben den nemlichen Buchstaben, rechts unten versehen mit der Ordnungszahl der Tafel, in der er liegt. Heisst z. B. die Gerade A, so bezeichnen wir ihren $\mathfrak{R}_1$ mit A_1, ihren $\mathfrak{R}_2$ mit A_2. Die Gerade A (abgekürzt $\mathfrak{G}(A)$) ist also diejenige Gerade, deren $\mathfrak{R}_1$ mit A_1 und deren $\mathfrak{R}_2$ mit A_2 bezeichnet ist. Die Gerade A selbst ist nicht gezeichnet. Es bleibt uns übrigens unbenommen, eine solche Gerade, wenn in ihr zwei Punkte a, b gegeben sind, Gerade ab zu nennen.

Fig. 5. 21. Wir haben nun noch zu untersuchen, welche verschiedene Lagen eine Gerade gegen die Tafeln annehmen kann, und wie sich dabei ihre Risse herausstellen. Wir werden folgende Fälle zu unterscheiden haben: Eine Gerade kann

a) senkrecht zu einer Tafel;
b) senkrecht zur $\mathfrak{K}$ (ohne zugleich senkrecht zu einer Tafel zu sein);
c) parallel zu einer Tafel;
d) parallel zur $\mathfrak{K}$;
e) in einer Tafel;
f) in der $\mathfrak{K}$;
g) ganz allgemein

sein.

ad a) Ist die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt a_1; ihr $\mathfrak{R}_2$ hingegen kann kein Punkt sein, weil die Gerade auf der $\mathfrak{T}_2$ nicht senkrecht steht. Suchen wir daher, welche Gerade der $\mathfrak{R}_2$ unserer Geraden a_1 (s. 20. a.) ist. Da jeder Punkt a dieser Geraden in a_1 seinen $\mathfrak{R}_1$ und daher in $\mathfrak{a}_1$ seinen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_1$ und in $\mathfrak{a}_2$ seinen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_2$ hat, so liegt sein $\mathfrak{R}_2$ in der aus $\mathfrak{a}_2$ zur $\mathfrak{K}_2$ gezogenen Senkrechten $\mathfrak{a}_2 a_2$; es ist diese also der $\mathfrak{R}_2$ unserer Geraden.

ad b) Ist die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{K}$, und sind daher zwei Punkte derselben gegeben, hier die Punkte b und c, so liegen die beiden Risse ($b_1 c_1$, $b_2 c_2$) der Geraden (s. 19. Satz 3.) in einer einzigen zur Kante senkrechten Geraden.

ad c) Ist die Gerade B parallel zur $\mathfrak{T}_1$, so wird (Anh. 29.) ihre $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1$ die $\mathfrak{T}_1$ nach einer Geraden B_1 schneiden, die parallel zu B ist. Da ferner alle Punkte der Geraden B gleichweit von der $\mathfrak{T}_1$ abstehen, so müssen auch die $\mathfrak{R}_2$ dieser Punkte (nach 5.) gleichweit von der $\mathfrak{K}_2$ entfernt sein, daher in einer Geraden B_2 liegen, die parallel zur $\mathfrak{K}_2$ ist.

ad d) Ist die Gerade parallel zur $\mathfrak{K}$, so ist sie auch parallel zur $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$; demnach ist ihr $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ parallel zur $\mathfrak{K}$, wie dies für die $\mathfrak{G}$(C) der Fall ist.

ad e) Liegt die Gerade in der $\mathfrak{T}_1$, so haben alle Punkte der Geraden (nach Num. 9. Satz 3, und Num. 13.) ihre $\mathfrak{R}_1$ in sich selbst und ihre $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}_2$; demnach fällt diese Gerade mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ zusammen und ihr $\mathfrak{R}_2$ liegt in der $\mathfrak{K}_2$.

ad f) In diesem Falle liegt die Gerade in $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, also fällt ihr $\mathfrak{R}_1$ in die $\mathfrak{K}_1$ und ihr $\mathfrak{R}_2$ in die $\mathfrak{K}_2$.

ad g) Ist die Gerade zu keiner Tafel senkrecht oder parallel und auch in keiner zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene, wie die Gerade D, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ eine Gerade, die weder parallel noch senkrecht zur $\mathfrak{K}$ ist. Wäre sie $\parallel \mathfrak{K}$, so ständen die $\mathfrak{R}_1$ ihrer Punkte gleichweit von der $\mathfrak{K}$, also (nach 8.) ihre Punkte selbst gleichweit von der $\mathfrak{T}_2$ ab, und es müsste demnach die Gerade parallel zur $\mathfrak{T}_2$ sein. Wäre der $\mathfrak{R}_1 \perp \mathfrak{K}$, also auch (Anh. 22.) $\perp \mathfrak{T}_2$, so wäre (Anh. 16.) die $\mathfrak{LE}_1$ senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ und, da sie als $\mathfrak{LE}_1$ senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ ist, auch senkrecht zur $\mathfrak{K}$. Hieraus geht noch weiter hervor, dass eine Gerade, deren $\mathfrak{R}_1 \perp \mathfrak{K}_1$, in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene liegt, und dass demnach ihr $\mathfrak{R}_2$ entweder ein Punkt ist, wenn die Gerade zufällig senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ steht, oder wenn dieser Zufall nicht stattfindet, dass ihr $\mathfrak{R}_2$ senkrecht steht zur $\mathfrak{K}_2$. Es gehen daraus folgende Sätze hervor:

1) Ist eine Gerade senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, wie die $\mathfrak{G}(a_1)$, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt, ihr $\mathfrak{R}_2$ eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade. (Diese Gerade trifft die $\mathfrak{K}_2$ in dem $\mathfrak{KR}_2$ des $\mathfrak{P}(a)$).

2) Ist die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{K}$ (ohne zugleich senkrecht zu einer Tafel zu sein), so steht ihr $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ auf der $\mathfrak{K}$ in dem nemlichen Punkte senkrecht.

3) Ist die Gerade parallel zur $\mathfrak{T}_1$, so erkennt man dies daran, dass ihr $\mathfrak{R}_2$ parallel zur $\mathfrak{K}_2$ ist; ausserdem ist die Gerade selbst parallel zu ihrem $\mathfrak{R}_1$.

4) Ist eine Gerade $\parallel \mathfrak{K}$, so sind auch ihr $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ beziehungsweise $\parallel \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

5) Liegt eine Gerade in der $\mathfrak{T}_1$, so erkennt man dies daran, dass ihr $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}_2$ liegt; ausserdem fällt die Gerade selbst mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ zusammen.

6) Liegt eine Gerade in der $\mathfrak{K}$, so fällt die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ resp. mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zusammen.

7) Ist eine Gerade weder parallel noch senkrecht zu einer Tafel und auch nicht senkrecht zur

$\mathfrak{K}$, **so sind ihre Risse Gerade, die weder parallel noch senkrecht zur $\mathfrak{K}$ sind.**

8) Es giebt also keine Gerade, deren $\mathfrak{R}_1$ senkrecht zu $\mathfrak{K}_1$ steht, während ihr $\mathfrak{R}_2$ eine Gerade ist, die nicht senkrecht zu $\mathfrak{K}_2$ steht.

Anm. Wenn eine Gerade || oder ⊥ zu einer Tafel ist, so sagen wir, sie hat eine besondere Lage gegen die Tafeln, oder wir nennen sie ein besondere Gerade (insbesondere nennen wir sie, wie oben bemerkt wurde, ein $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, wenn sie auf der $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht). Eine Gerade, die weder zu einer Tafel noch zur $\mathfrak{K}$ || oder ⊥ ist, nennen wir eine allgemeine Gerade.

22. Da die Lage einer Ebene durch drei Punkte bestimmt ist, die nicht in einer Geraden liegen, oder durch eine Gerade und einen Punkt ausser ihr, oder durch zwei Gerade, die sich schneiden oder || sind, so werden wir die Lage einer Ebene graphisch bestimmen, indem wir die Risse dreier Punkte derselben, oder die Risse eines Punktes und einer Geraden, die den Punkt nicht enthält, oder zweier Geraden der Ebene zeichnen. Sind zur Bestimmung der Ebene die Punkte a, b, c gegeben, so nennen wir sie die Ebene abc (abg. $\mathfrak{E}$(abc)); sind gegeben die $\mathfrak{G}$(A) und der $\mathfrak{P}$(a), so nennen wir sie die Ebene Aa (abgek. $\mathfrak{E}$(Aa)); sind endlich gegeben die beiden Geraden A und B, so nennen wir sie die Ebene AB (abg. $\mathfrak{E}$(AB)). Was nun die Risse einer Ebene (16.) betrifft, so haben wir zu unterscheiden, ob die Ebene auf einer Tafel senkrecht steht oder nicht. Steht nemlich eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so ist sie die $\mathfrak{LE}_1$ von allen ihren Geraden, und es ist daher der Durchschnitt A_1 dieser Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ aller ihrer Geraden; also liegen in A_1 die $\mathfrak{R}_1$ aller Punkte der Ebene, oder es ist A_1 der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene (17). Steht aber die Ebene nicht senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so kann jeder Punkt a_1 der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes a der Ebene sein. Denn der Punkt a liegt dann in der Ebene und in dem $\mathfrak{L}_1$, welches in a_1 senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ errichtet wird, also im Durchschnittspunkte dieses $\mathfrak{L}_1$ und der Ebene. Ein solcher Durchschnitt ist aber allemal vorhanden, wenn die Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht steht. Es kann daher auch jede in der $\mathfrak{T}_1$ gezogene Gerade A_1

den $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden der Ebene vorstellen, da jeder Punkt in A_1 der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes der Ebene sein kann.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Steht eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so liegen alle $\mathfrak{R}_1$ ihrer Punkte und Linien in der Geraden, nach welcher sie die $\mathfrak{T}_1$ schneidet. Diese Gerade ist daher der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene.
2) Steht eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht, so kann jeder Punkt und jede Linie der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes oder resp. einer Linie der Ebene sein, und es ist daher der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene die ganze $\mathfrak{T}_1$.

Anm. Wir werden von nun an jede auf einer Tafel senkrechte Ebene eine Lothebene ($\mathfrak{LE}$) und zwar Lothebene eins ($\mathfrak{LE}_1$) oder Lothebene zwei ($\mathfrak{LE}_2$) nennen, je nachdem sie $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ oder $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ ist; jede zu einer Tafel $\parallel$ oder $\perp$ Ebene eine besondere, jede andere eine allgemeine Ebene.

23. Steht eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so ist ihre Lage durch ihren $\mathfrak{R}_1$ (s. 22. Satz 1.) vollkommen bestimmt; denn durch diesen lässt sich nur eine einzige Ebene legen, die zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (Anh. 18.) Wir werden daher die Lage einer solchen Ebene dadurch bestimmen, dass wir blos ihren $\mathfrak{R}_1$ zeichnen. Wir bezeichnen diesen, wie jede Gerade in $\mathfrak{T}_1$ mit A_1, B_1 etc. und nennen dann die Ebene „Ebene A_1, Ebene B_1" etc. Wir verstehen also unter Ebene A_1 abg. ($\mathfrak{E}(A_1)$) eine Ebene, die auf der $\mathfrak{T}_1$ in der Linie A_1 senkrecht steht. Ein Aehnliches ist unter $\mathfrak{E}(A_2)$ in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ zu verstehen.

Anm. Wir können natürlich auch eine $\mathfrak{LE}_1$, wie eine allgemeine Ebene durch drei Punkte bestimmen. Es werden aber dann die $\mathfrak{R}_1$ dieser Punkte in einer Geraden liegen. Aehnliches gilt, wenn wir eine $\mathfrak{LE}$ durch zwei Gerade, oder durch einen Punkt und eine Gerade geben.

24. Eine Ebene, die zu der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht ist, kann noch nebenbei auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht stehen, oder mit der $\mathfrak{T}_2$ parallel sein. Im ersten Falle schneiden sich (Anh. 20.) die Ebene und die $\mathfrak{T}_1$ nach einer Geraden, die auf der $\mathfrak{T}_2$, also auch auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht steht. Ist aber der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene $\perp$ $\mathfrak{K}$, so folgt daraus schon, dass sie senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ ist. Ebenso ist es noth-

wendig und genügend, dass der $\mathfrak{N}_2$ der Ebene $\perp$ $\mathfrak{K}$ ist. — Im zweiten Fall schneiden sich die Ebene und die $\mathfrak{T}_1$ nach einer zur $\mathfrak{K}$ parallelen Geraden (Anh. 17.) Ist diess aber der Fall, so folgt daraus schon, dass die Ebene mit der $\mathfrak{T}_2$ parallel ist. (Anh. 33.) Es folgen hieraus die Sätze:

1) Damit eine Ebene auf beiden Tafeln, also auch auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht steht, ist es nothwendig aber genügend, dass ihr $\mathfrak{N}_1$ oder auch ihr $\mathfrak{N}_2$ eine Gerade ist, die auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht steht.

2) Damit eine Ebene parallel zur $\mathfrak{T}_2$ ist, ist es nothwendig aber genügend, dass ihr $\mathfrak{N}_1$ eine zur $\mathfrak{K}_1$ parallele Gerade ist.

Da offenbar der $\mathfrak{N}_1$ einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene von der $\mathfrak{K}_1$ so weit entfernt ist, als die Ebene selbst von der $\mathfrak{T}_2$, so folgt, dass wenn die Ebene mit der $\mathfrak{T}_2$ zusammenfällt, ihr $\mathfrak{N}_1$ auf $\mathfrak{K}_1$ fällt. Hieraus folgt

3) die $\mathfrak{T}_2$ ist eine Lothebene eins deren $\mathfrak{N}_1$ die $\mathfrak{K}_1$ ist, oder die Ebene $\mathfrak{K}_1$ (abg. $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$) ist die $\mathfrak{T}_2$. Es wird also die $\mathfrak{T}_2$ dadurch graphisch bestimmt, dass man die $\mathfrak{K}_1$ (welche den $\mathfrak{N}_1$ der $\mathfrak{T}_2$ vorstellt) zeichnet. In ähnlicher Weise wird die $\mathfrak{T}_1$ durch die $\mathfrak{K}_2$ bestimmt.

25. Mitunter bestimmt man eine Ebene durch ihre Spuren (s. 17. 4.) d. h. durch die Geraden A, B, nach denen sie die Tafeln schneidet. Da die Spuren einer Ebene und die $\mathfrak{K}$ die drei Geraden vorstellen, nach denen sich die $\mathfrak{T}_1$, die $\mathfrak{T}_2$ und die Ebene schneiden, so folgt (nach Anh. 8.) der Satz:

1) Die Spuren einer Ebene kommen entweder in einem Punkte der $\mathfrak{K}$ zusammen, oder sie sind beide parallel zur $\mathfrak{K}$.

Wollte man nun auch von einer Ebene A_1 die Spuren angeben, so ist vor Allem (22. Satz 1.) A_1 ihre erste Spur; ihre zweite Spur aber muss, weil die Ebene A_1 und die $\mathfrak{T}_2$ auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehen, senkrecht sein zur $\mathfrak{K}$. Es könnte aber auch die Ebene A_1 zugleich $\parallel$ $\mathfrak{T}_2$, und eine zweite Spur gar nicht vorhanden sein. Es geht hieraus hervor:

2) Die erste Spur einer Ebene A_1 ist A_1 und ihre zweite Spur ist $\perp$ 𝔎 oder (wenn die Ebene $\parallel$ $\mathfrak{T}_2$ ist) gar nicht vorhanden.

26. Ehe wir diesen §. beschliessen, wollen wir noch einmal zusammengestellt aufführen die von uns angenommene Bezeichnung für die verschiedenen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen, und zugleich die Abkürzungen beifügen, die wir dafür anwenden.

a) Punkt a (abg. $\mathfrak{P}$(a)) bedeutet den Punkt, dessen Risse a_1, a_2 sind (6);

b) Gerade a_1 (abg $\mathfrak{G}(a_1)$) bedeutet die Gerade, welche im $\mathfrak{P}(a_1)$ auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (20. a.);

c) Gerade A (abg. $\mathfrak{G}$(A)) bedeutet die Gerade, deren Risse A_1, A_2 heissen (20. c.);

d) Gerade ab (abg. $\mathfrak{G}$(ab)) bedeutet die Gerade, welche durch die Punkte a und b geht;

e) Ebene A_1 (abg. $\mathfrak{E}(A_1)$) bedeutet die Ebene, welche in A_1 auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht;

f) Ebene abc, Ebene Aa, Ebene AB (abg. $\mathfrak{E}$(abc), $\mathfrak{E}$(Aa), $\mathfrak{E}$(AB)) bedeutet eine Ebene, die durch die Punkte a, b, c, durch die $\mathfrak{G}$(A) und $\mathfrak{P}$(a), durch die Geraden A, B bestimmt ist.

Was endlich unsere Zeichnungen betrifft, so bemerken wir hier ein für allemal, dass wir alle gegebenen und gesuchten Linien durch zusammenhängende Striche (wie die Linie 𝔎 in Fig. 2.), alle Hilfslinien (wie a_1a_2 in Fig. 2.) durch abwechselnd auf einander folgende Striche und Punkte zeichnen.

Ferner wollen wir hier noch bemerken, dass wir in unsern Zeichnungen, damit man auch ohne Text die Aufeinanderfolge der Zeichnungsoperationen erkennen kann, zur Bezeichnung der nach einander gezeichneten Punkte und Linien die auf einander folgenden Buchstaben des Alphabets benützen werden, so dass wir den zuerst gezeichneten Punkt mit a, den zweiten mit b etc.; die zuerst gezeichnete Linie mit A, die zweite mit B etc. bezeichnen werden.

§. 2.

Mittel, die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zu erkennen.

27. Wir werden in diesem §. untersuchen, wie man aus den Zeichnungen erkennen kann, ob die durch sie bestimmten Punkte, Geraden und Ebenen gewisse Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen sollen folgende sein, und werden wir sie künftighin mit den ihnen in Klammern beigesetzten Zeichen bezeichnen:

a) Schneiden ($\times$),
b) Parallelsein ($\parallel$),
c) Zusammenfallen ($|$),
d) Senkrechtstehen ($\perp$).

(Es heisst also z. B. $\mathfrak{E}(AB) \parallel \mathfrak{G}(C)$ so viel als (s. auch 26.): die Ebene AB ist parallel zur Geraden C; $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{P}(a)$ so viel als: die Gerade A geht durch den Punkt a, oder der Punkt a liegt in der Geraden A).

Es sind demnach folgende Untersuchungen zu machen: Zu erkennen

1) ob ein Punkt und eine Gerade zusammenfallen,
2) ein Punkt und eine Ebene zusammenfallen,
3) ob zwei Gerade zusammenfallen,
4) parallel sind,
5) sich schneiden,
6) auf einander senkrecht stehen;
7) ob eine Gerade und eine Ebene zusammenfallen,
8) parallel sind,
9) auf einander senkrecht stehen;
10) ob zwei Ebenen zusammenfallen,
11) parallel sind,
12) auf einander senkrecht stehen.

Fig. 5. 28. Wenn ein Punkt und eine Gerade in einander fallen, so müssen (17. Satz 1.) die Risse des Punktes in den entsprechenden Rissen der Geraden liegen. Sehen wir nun zu, ob diese Bedingung auch ausreicht.

Steht die Gerade auf einer Tafel senkrecht, wie $\mathfrak{G}(a_1)$, und liegen die Risse des Punktes in denen der $\mathfrak{G}(a_1)$, wie diess für

den $\mathfrak{P}(a)$ der Fall ist, so folgt daraus schon, dass $\mathfrak{P}(a) \mid \mathfrak{G}(a_1)$; denn schon aus dem Umstande, dass a_1 der $\mathfrak{R}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$ ist, folgt, dass er in der $\mathfrak{G}(a_1)$ liegt (s. 3.)

Haben wir eine allgemeine Gerade, wie die $\mathfrak{G}(D)$, und liegen die Risse eines $\mathfrak{P}(d)$ in denen der $\mathfrak{G}(D)$, so folgt auch hieraus im Allgemeinen, dass $\mathfrak{P}(d) \mid G(D)$. Denn die $\mathfrak{G}(D)$ liegt (19. Satz 2.) in der $\mathfrak{E}(D_1)$ und der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(d_1)$; nun liegt aber auch (Anh. 35.) die $\mathfrak{G}(d_1)$ in der $\mathfrak{E}(D_1)$, folglich liegt der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{E}(D_1)$. Aus ähnlichen Gründen liegt auch der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{E}(D_2)$. Ist nun die $\mathfrak{G}(D)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{E}(D_1)$ und $\mathfrak{E}(D_2)$ — und diess ist (nach 19.) allemal der Fall, wenn nicht D_1 und $D_2 \perp \mathfrak{K}$ sind — so liegt der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(D)$. Wäre aber D_1 und $D_2 \perp \mathfrak{K}$, so wäre die $\mathfrak{G}(D)$ nicht der Durchschnitt der $\mathfrak{E}(D_1)$ mit der $\mathfrak{E}(D_2)$, und wir könnten daher auch nicht behaupten, dass $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(D)$ liege. Es gilt daher folgender Satz:

> Damit eine Gerade und ein Punkt in einander fallen, ist es nothwendig und im Allgemeinen hinreichend, dass die Risse des Punktes in den entsprechenden Rissen der Geraden liegen; eine Ausnahme hievon findet nur dann statt, wenn die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{K}$ steht.

29. Liegt ein Punkt in einer Ebene, so müssen die Risse des Punktes in denen der Ebene liegen. Sehen wir wieder zu, ob diess genügt. Fig. 6.

Ist die Ebene auf keiner Tafel senkrecht, so sind (22. Satz 2.) die Tafeln ihre Risse. Die Bedingung also, dass die Risse des Punktes in denen der Ebene liegen sollen, ist die nemliche als die, dass die Risse des Punktes in den Tafeln liegen sollen, was natürlich ohnedies stattfindet und daher nicht genügen kann.

Hat man aber eine $\mathfrak{E}(A_1)$ und einen $\mathfrak{P}(a)$, so liegt dieser schon in der Ebene, wenn nur sein $\mathfrak{R}_1$ in dem $\mathfrak{R}_1$ der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt; denn in diesem Falle liegt der Punkt in der $\mathfrak{G}(a_1)$; da aber die $\mathfrak{G}(a_1)$ in der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt (Anh. 35), so liegt auch der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{E}(A_1)$. Es ergiebt sich daher folgender Satz:

> Damit ein $\mathfrak{P}(a)$ in einer $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt, ist es nothwendig, aber auch hinreichend, dass a_1 in der $\mathfrak{G}(A_1)$ liegt.

Steht die Ebene auf keiner Tafel senkrecht, so müssen von ihr bekanntlich drei Punkte oder eine Gerade und ein Punkt oder zwei Gerade gegeben sein; dann ist ausser den gegebenen Punkten der Ebene nur von denjenigen Punkten zu behaupten, dass sie der Ebene angehören, die in einer Geraden der Ebene liegen (s. 28.)

30. Sollen zwei Gerade zusammenfallen, so müssen ihre $\mathfrak{R}_1$ sowohl, als auch ihre $\mathfrak{R}_2$ zusammenfallen. Dies genügt aber auch im Allgemeinen. Denn stehen die Geraden auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so genügt es schon, wenn ihre $\mathfrak{R}_1$ zusammenfallen, weil durch den Punkt, der ihren $\mathfrak{R}_1$ vorstellt, nur eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ möglich ist. Stehen aber die Geraden auf keiner Tafel senkrecht, und fallen sowohl ihre $\mathfrak{R}_1$ als ihre $\mathfrak{R}_2$ zusammen, so haben beide die nemliche $\mathfrak{LE}_1$ und die nemliche $\mathfrak{LE}_2$, jede von beiden ist also die Gerade, welche die $\mathfrak{LE}_1$ und die $\mathfrak{LE}_2$ gemein haben. Im Allgemeinen haben aber die beiden Lothebenen nur eine Gerade gemein. Sind jedoch beide Risse in demselben Punkte der $\mathfrak{A}$ auf dieser senkrecht, dann haben die ihnen entsprechenden Lothebenen unendlich viele Gerade gemein, und dann fallen die Geraden nicht nothwendig zusammen. Es geht hieraus der Satz hervor:

> Damit zwei Gerade zusammenfallen, ist es nothwendig und im Allgemeinen genügend, dass sowohl ihre $\mathfrak{R}_1$ als auch ihre $\mathfrak{R}_2$ zusammenfallen; eine Ausnahme hievon macht nur der Fall, wenn die Geraden in einer zur $\mathfrak{A}$ senkrechten Ebene liegen.

Fig. 7. 31. Wenn zwei Gerade sich schneiden, so müssen (nach 17. Satz 3.) ihre $\mathfrak{R}_1$ sowohl, als ihre $\mathfrak{R}_2$ wenigstens einen Punkt gemein haben. Dabei kann es auch sein, dass ihre $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$ mehr als einen Punkt gemein haben, also zusammenfallen. Es sind daher folgende verschiedene Fälle möglich:

1) Es ist der $\mathfrak{R}_1$ der einen Geraden ein Punkt a_1, der $\mathfrak{R}_2$ der anderen Geraden ein Punkt a_2; sollen sich diese Geraden schneiden, so müssen a_1, a_2 die Risse des Schnittpunktes sein, folglich müssen a_1 und a_2 in einer zur $\mathfrak{A}$ senkrechten Geraden liegen.

2) Es ist der $\mathfrak{R}_1$ der einen Geraden eine Gerade A_1, der der andern ein $\mathfrak{P}(a_1)$ in der $\mathfrak{G}(A_1)$. In diesem Falle geht hieraus schon hervor, dass beide Gerade in der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegen und, da sie nicht parallel sind, sich schneiden (parallel können sie desshalb nicht sein, weil die eine $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ ist, die andere nicht.)

3) Es sind die $\mathfrak{R}_1$ der beiden Geraden B und C Gerade, die zusammenfallen, während B_2 und C_2 sich schneiden. In diesem Falle haben die beiden Geraden den $\mathfrak{P}(b)$ (und nur diesen) gemein, dessen $\mathfrak{R}_2$ im Durchschnitt von B_2 und C_2 und dessen $\mathfrak{R}_1$ in B_1 liegt.

4) Es schneiden sich sowohl die $\mathfrak{R}_1$ der Geraden D, E, als auch ihre $\mathfrak{R}_2$. In diesem Falle muss, wenn die Geraden sich schneiden sollen, der $\mathfrak{R}_1$ des Schnittpunktes in c_1 (wo sich D_1 und E_1 schneiden), der $\mathfrak{R}_2$ desselben in c_2 sein; es müssen dann aber noch c_1 und c_2 der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes sein, also, nach der gewöhnlichen Umklappungsart senkrecht übereinanderliegen. Dies genügt aber auch im Allgemeinen. Denn es liegt dann der $\mathfrak{P}(c)$ in der $\mathfrak{G}(D)$ und in der $\mathfrak{G}(E)$, also haben sie diesen Punkt gemein, und da sie nur diesen Punkt gemein haben, so schneiden sie sich. Eine Ausnahme hievon findet nur dann statt, wenn eine der beiden Geraden $\perp$ $\mathfrak{K}$ ist; denn dann können wir nicht behaupten, dass der Punkt c in ihr liegt. (28. Satz). Es geht hieraus folgender Satz hervor:

> Wenn die Risse eines Punktes in den entsprechenden Rissen zweier Geraden liegen, die nicht zusammenfallen (30.), so schneiden sich die Geraden im Allgemeinen in diesem Punkte. Eine Ausnahme hievon findet statt, wenn eine von den Geraden $\perp$ $\mathfrak{K}$ ist.

32. Sollen zwei Gerade parallel sein, so muss, wenn eine auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht ist, es auch die andere sein. Sind sie aber nicht senkrecht auf einer Tafel, so können sie entweder in einer zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Ebene liegen oder nicht. Im ersten Falle ist die Ebene, in der sie liegen, die $\mathfrak{LE}_1$ von beiden, und es fallen daher ihre $\mathfrak{R}_1$ zusammen. Im zweiten Falle, wo also ihre $\mathfrak{LE}_1$ nicht zusammenfallen, sind die Lothe in der einen $\mathfrak{LE}_1$ parallel zu denen in der andern, und die Gerade in der einen parallel zur Geraden in der andern. Da nun die Geraden und die Lothe Fig. 8.

nicht parallel sind (weil wir vorausgesetzt haben, dass die Geraden auf keiner Tafel senkrecht stehen), so müssen (Anh. 38.) diese $\mathfrak{LE}_1$ parallel sein und demnach die $\mathfrak{T}_1$ nach parallelen Linien schneiden, d. h. es müssen die $\mathfrak{R}_1$ der Geraden parallel sein. Wenn also zwei Gerade, die auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht stehen, parallel sind, so müssen ihre $\mathfrak{R}_1$ parallel sein. (Zwei Gerade, die zusammenfallen, sind auch parallel). Dasselbe lässt sich auch für ihre $\mathfrak{R}_2$ nachweisen. Es genügt aber auch im Allgemeinen, damit zwei Gerade parallel sind, wenn sowohl ihre $\mathfrak{R}_1$ als $\mathfrak{R}_2$ parallel sind. Denn in diesem Falle ist die eine der Durchschnitt von zwei Ebenen (der $\mathfrak{LE}_1$ und der $\mathfrak{LE}_2$), die mit den Ebenen, die sich nach der andern Geraden schneiden, parallel sind. (Anh. 39.) Man sieht, es bietet wieder der Fall eine Ausnahme, wo die $\mathfrak{LE}_1$ und die $\mathfrak{LE}_2$ der Geraden sich nicht schneiden, d. i. wo die Geraden $\perp \mathfrak{K}$ sind. Demnach erhalten wir den Satz:

Sollen zwei Gerade parallel sein, so müssen entweder beide auf derselben Tafel senkrecht stehen (wie $\mathfrak{G}(a_1)$ und $\mathfrak{G}(b_1)$), oder es ist nothwendig, aber im Allgemeinen genügend, dass ihre $\mathfrak{R}_1$ sowohl, als auch ihre $\mathfrak{R}_2$ parallel sind (wie $\mathfrak{G}$(A) und $\mathfrak{G}$(B) oder $\mathfrak{G}$(C) und $\mathfrak{G}$(D). Eine Ausnahme von dieser Regel bietet nur der Fall, wenn die Risse der Geraden $\perp \mathfrak{K}$ sind.

Anm. Nachdem wir aus den Rissen zweier Geraden erkennen können, ob sie zusammenfallen, sich schneiden, oder parallel sind, so sind wir natürlich auch im Stande, zu sagen, ob sie nicht in einer Ebene liegen. Es wird diess der Fall sein, wenn sie weder zusammenfallen, noch sich schneiden oder parallel sind. Zwei solche Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, nennt man windschiefe, oder man sagt von ihnen sie kreuzen sich.

Fig. 9. 33. Wir haben oben gesehen, dass wir zur Bestimmung der Lage einer schiefen Ebene gegen irgend etwas anderes blos die von ihr gegebenen Punkte und Linien benützen können, indem die Risse einer jeden schiefen Ebene die Tafeln selbst sind, und demnach über die Lage der Ebene keinen Aufschluss geben. Wir können demnach nur dann behaupten, dass eine $\mathfrak{G}$(A) und eine schiefe Ebene

a) zusammenfallen, wenn die $\mathfrak{G}(A)$ zwei Punkte der Ebene enthält (28.), oder durch einen Punkt der Ebene geht und mit einer Geraden der Ebene parallel ist (32.);

b) parallel sind, wenn die $\mathfrak{G}(A)$ mit einer Geraden der Ebene parallel ist.

Steht aber die Ebene $\perp \mathfrak{T}_1$, wie die $\mathfrak{E}(A_1)$ und soll

α) eine Gerade mit ihr zusammenfallen, so muss der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden in $\mathfrak{G}(A_1)$ liegen; dies ist aber auch genügend; denn ist $\mathfrak{G}(A_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ einer $\mathfrak{G}(A)$, so ist $\mathfrak{E}(A_1)$ ihre $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1$ und es ist daher $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{E}(A_1)$. Ist der in der $\mathfrak{G}(A_1)$ liegende $\mathfrak{P}(a_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ einer $\mathfrak{G}(a_1)$, so ist wieder (nach Anh. 35.) $\mathfrak{G}(a_1) \mid \mathfrak{E}(A_1)$.

β) Soll eine Gerade $\parallel \mathfrak{E}(A_1)$ sein, so kann sie entweder $\perp \mathfrak{T}_1$ sein, wie die $\mathfrak{G}(b_1)$, oder es muss, wenn dies nicht der Fall ist, ihre $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1 \parallel \mathfrak{E}(A_1)$, also auch ihr $\mathfrak{R}_1 \parallel A_1$ sein. Ist aber dies der Fall, so folgt schon daraus, dass ihre $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1 \parallel \mathfrak{E}(A_1)$, daher auch, dass die Gerade selbst $\parallel \mathfrak{E}(A_1)$ ist. Es gehen hieraus folgende Sätze hervor:

1) *Damit eine Gerade und eine $\mathfrak{E}(A_1)$ zusammenfallen, ist es nothwendig, aber genügend, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden in dem $\mathfrak{R}_1$ der Ebene liegt.*

2) *Soll eine Gerade $\parallel \mathfrak{E}(A_1)$ sein, so muss sie entweder $\perp \mathfrak{T}_1$ sein, wie $\mathfrak{G}(b_1)$, oder es ist nothwendig, aber hinreichend, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden eine Parallele zu A_1 ist,* wie diess bei der $\mathfrak{G}(B)$ der Fall ist.

3) *Sollen daher eine Gerade und eine $\mathfrak{E}(A_1)$ sich schneiden, also nicht parallel sein, so ist es nothwendig, aber genügend, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden die $\mathfrak{G}(A_1)$ schneidet.*

34. Von zwei schiefen Ebenen können wir behaupten,

a) dass sie zusammenfallen, wenn zwei Gerade der einen Ebene in der andern liegen. (33. a.);

b) dass sie parallel sind, wenn zwei sich schneidende Gerade der einen Ebene parallel sind zur andern Ebene. (33. b);

c) dass sie sich schneiden, wenn eine Gerade der einen Ebene die andere Ebene schneidet.

Ist die eine Ebene senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, die andere nicht, so müssen sie sich allemal schneiden.

Sind zwei Ebenen senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, wie $\mathfrak{E}(A_1)$ und $\mathfrak{E}(B_1)$, so werden sie zusammenfallen, oder parallel sein, oder sich schneiden, je nachdem $A_1 \mid B_1$ oder $A_1 \parallel B_1$ oder $A_1 \times B_1$. (Anh. 18. 33.)

Fig. 10. 35. Soll eine $\mathfrak{G}(a_1)$ auf einer Ebene senkrecht stehen, so muss diese $\parallel \mathfrak{T}_1$, also ihr $\mathfrak{R}_2 \parallel \mathfrak{K}_2$ sein.

Soll eine $\mathfrak{G}(A)$ auf einer Ebene senkrecht stehen, so muss die $\mathfrak{E}(A_1)$ zur gegebenen Ebene senkrecht sein (Anh. 16.); da aber auch $\mathfrak{E}(A_1) \perp \mathfrak{T}_1$, so ist zugleich $\mathfrak{E}(A_1) \perp$ zur ersten Spur der Ebene. Ist aber diese erste Spur der Ebene $\perp \mathfrak{E}(A_1)$, so ist sie auch $\perp A_1$. Ebenso lässt sich zeigen, dass die zweite Spur der Ebene $\perp A_2$ sein muss. Wir sehen daher, dass, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht stehen soll, die Risse der Geraden auf den entsprechenden Spuren der Ebene senkrecht stehen müssen. Es ist diess aber auch genügend; denn ist die Spur eins der Ebene $\perp A_1$, also auch $\perp \mathfrak{E}(A_1)$, so ist auch die Ebene selbst $\perp \mathfrak{E}(A_1)$. Ebenso folgt aus dem Umstande, dass $A_2 \perp$ zur zweiten Spur der Ebene, dass diese $\perp \mathfrak{E}(A_2)$. Es ist daher auch der Durchschnitt der $\mathfrak{E}(A_1)$ und der $\mathfrak{E}(A_2)$, d. i. die $\mathfrak{G}(A) \perp$ zur Ebene. Man sieht wieder, dass eine Gerade, die $\perp \mathfrak{K}$, deren Lothebenen zusammenfallen, eine Ausnahme bietet. Es gilt demnach folgender Satz:

> *Sollen eine Ebene und eine Gerade auf einander senkrecht stehen, so muss entweder die Gerade senkrecht auf einer Tafel und die Ebene parallel zu dieser sein, oder es ist nothwendig, aber im Allgemeinen genügend, dass die Risse der Geraden senkrecht stehen auf den entsprechenden Spuren der Ebene. Eine Ausnahme bietet nur der Fall, wo die Gerade $\perp \mathfrak{K}$ ist.*

Anm. Ist die Ebene $\perp \mathfrak{T}_1$, wie die $\mathfrak{E}(D_1)$, so ist (25. Satz 2.) D_1 die erste Spur und eine Senkrechte zur $\mathfrak{K}$ die zweite Spur der Ebene; es muss also $E_1 \perp D_1$ und $E_1 \parallel \mathfrak{K}$, daher $\mathfrak{G}(E) \parallel \mathfrak{T}_1$ sein, wenn die $\mathfrak{G}(E) \perp \mathfrak{E}(D_1)$ sein soll.

Fig. 11. 36. Sollen zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, so muss durch eine derselben eine Ebene gelegt werden können, die auf der andern senkrecht steht. Da wir nun von jeder allgemeinen Geraden zwei sie enthaltende Ebenen haben, nemlich die Loth-

ebenen, so können wir unmittelbar nur dann behaupten, dass zwei allgemeine Gerade auf einander senkrecht sind, wenn eine Lothebene der einen Geraden senkrecht steht auf der andern. Soll aber diess der Fall sein, so muss diese Gerade, da sie auf einer Lothebene senkrecht steht (s. 35. Anm.) $\parallel \mathfrak{T}$ sein. Ist diess der Fall, ist nemlich $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{T}_1$ und ist $A_1 \perp B_1$, so ist auch $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{E}(B_1)$, also $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(B)$. Ist aber eine der beiden Geraden $\perp \mathfrak{T}_2$, wobei sie also ebenfalls $\parallel \mathfrak{T}_1$ ist, (wie $\mathfrak{G}(a_2)$), so ist es nothwendig, aber genügend, dass die zweite Gerade $\parallel \mathfrak{T}_2$ ist. Diese Gerade ist daher entweder eine $\mathfrak{G}(b_1)$ oder eine $\mathfrak{G}(C)$, deren $\mathfrak{R}_1$, nemlich C_1, $\parallel \mathfrak{K}$ ist. *Man sieht demnach, dass man in der Zeichnung nur dann unmittelbar erkennen kann, ob zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, wenn wenigstens eine von ihnen parallel zu einer Tafel ist, und es gilt folgender Satz:*

> *Sollen zwei Gerade, von denen eine parallel zur $\mathfrak{T}_1$ ist, auf einander senkrecht stehen, so ist entweder die eine Gerade $\perp \mathfrak{T}_2$, und die andere $\parallel \mathfrak{T}_2$, oder es ist nothwendig, aber hinreichend, dass die $\mathfrak{R}_1$ der beiden Geraden auf einander senkrecht stehen.*

37. Sollen zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muss eine Gerade der einen Ebene senkrecht auf der andern stehen. Wir können demnach nur dann unmittelbar erkennen, ob zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, wenn von einer Ebene die Spuren bekannt sind und von der andern eine Gerade vorhanden ist, deren Risse auf diesen Spuren senkrecht stehen (35.)

§. 3.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

38. In jeder Aufgabe des vorliegenden §. sind gegeben: Punkte, Gerade und Ebenen und gesucht: ein Punkt, eine Gerade oder Ebene, welche zu dem Gegebenen in den oben (27. a., b., c., d.) aufgeführten Beziehungen stehen sollen. Ist nun

a) ein Punkt gesucht, so wird in allen Aufgaben, die wir vorläufig in Bezug auf ihn bekommen können, verlangt, *er soll in gegebenen Dingen liegen*;

b) Ist eine Ebene gesucht, und haben die *gegebenen* Geraden oder Ebenen eine *besondere* Lage gegen die Tafeln, d. h. sind dieselben || oder ⊥ zu einer Tafel, so überlegen wir vor allem, ob nicht die gesuchte Ebene eine Lothebene ($\mathfrak{LE}$) ist, d. h. auf einer Tafel, z. B. auf der $\mathfrak{T}_1$, senkrecht steht. In diesem Falle suchen wir blos ihren $\mathfrak{N}_1$ (der bekanntlich eine in der $\mathfrak{T}_1$ gezeichnete Gerade ist), dessen Lage aus den gegebenen Bedingungen hervorgeht. Wird aber die Ebene nicht senkrecht zu einer Tafel, oder haben die gegeben Geraden und Ebenen keine besondere Lage gegen die Tafeln, so suchen wir uns durch die gegebenen Bedingungen zwei Gerade zu verschaffen, welche die gesuchte Ebene enthalten muss. Wir wollen die Mittel, die uns die Elementargeometrie dazu darbietet, hier zusammenstellen.

I) Soll eine Ebene parallel zu einer Geraden A sein, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der Ebene geht, und || A ist, in der Ebene liegen.

II) Soll eine Ebene senkrecht zu einer zweiten Ebene sein, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der ersten Ebene geht und zur zweiten Ebene senkrecht steht, in der ersten Ebene liegen.

III) Soll eine Ebene mit einer zweiten Ebene parallel sein, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der ersten Ebene geht und mit einer Geraden der zweiten Ebene parallel ist, in der ersten Ebene liegen.

IV) Soll eine Ebene auf einer Geraden A senkrecht stehen, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der Ebene geht, und auf der Geraden A senkrecht steht, in der Ebene liegen.

Diese vier Sätze lassen sich zusammenfassen in folgenden Satz:

V. Wenn eine Gerade einen Punkt einer Ebene enthält und zugleich eine Bedingung (|| oder ⊥) der Ebene erfüllt, so liegt sie in der Ebene.

c) Ist eine Gerade gesucht, und haben die gegebenen Geraden und Ebenen besondere Lagen gegen die Tafeln, so untersuchen wir zunächst, ob nicht diese gesuchte Gerade ein $\mathfrak{L}$ ist, d h. auf einer Tafel, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, senkrecht steht. In diesem Falle ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt, den wir allein durch die gegebenen Bedingungen aufzusuchen haben. Ist aber die Gerade kein $\mathfrak{L}$, so suchen wir uns durch die gegebenen Bedingungen zu verschaffen entweder zwei Punkte derselben (dann ist sie hinreichend bestimmt), oder einen Punkt und ihre Richtung, d. h. eine Gerade, mit der sie parallel ist. In letzterem Falle kann man mittelst der Sätze in Nr. 22 und 32 die Risse der Geraden zeichnen. Zur Auffindung der Richtung einer Geraden dienen folgende Bedingungen, die in nachstehender Weise verwendet werden:

VI. Ist eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so ist jede Senkrechte zu dieser Ebene die Richtung der gesuchten Geraden.

VII. Ist eine Gerade parallel mit zwei Ebenen, so ist der Schnitt beider Ebenen ihre Richtnng.

VIII. Ist eine Gerade senkrecht zu zwei Geraden, so ist sie parallel mit zwei Ebenen, die bezw. auf den beiden Geraden senkrecht stehen, oder senkrecht zu einer Ebene, die mit beiden Geraden parallel ist.

IX. Ist eine Gerade parallel zu einer Ebene und senkrecht zu einer Geraden A, so ist sie auch parallel mit einer zu A senkrechten Ebene, und der Schnitt dieser und der gegebenen Ebene geben die Richtung.

Zur Aufsuchung eines Punktes einer Geraden dient folgender Satz:

X. Soll eine Gerade in einer Ebene liegen, und eine gegebene Gerade A schneiden, so enthält sie den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden A.

Haben wir so die gegebenen Bedingungen benützt, um das Gesuchte zu erhalten, so kann es sein, dass es nur eine einzige Lage gibt, die es einnehmen kann; in diesem Falle sagen wir: die Aufgabe oder das Gesuchte ist vollkommen oder eindeutig bestimmt. Gibt es aber zwei, drei oder mehrere Lagen, die das Gesuchte einnehmen kann, so sagen wir: es ist

unvollkommen oder zwei-, drei- etc. deutig bestimmt. Gibt es unzählige stetig auf einander folgende Lagen, die das Gesuchte einnehmen kann, so sagen wir: es ist unbestimmt.

Gibt es keine Lage des Gesuchten, die den gegebenen Bedingungen entspricht, so sagen wir: es ist unmöglich.

Anm. Wir geben in dem vorliegenden §. lauter Aufgaben, die im Allgemeinen vollkommen bestimmt sind, in denen daher so viele Bedingungen für das Gesuchte gegeben sind, dass es nur eine einzige Lage gibt, die es einnehmen darf. Kann der Schüler solche Aufgaben lösen, so wird es ihm nicht schwer fallen, das Gesuchte auch dann zu finden, wenn die angegebenen Bedingungen zur vollkommenen Bestimmung desselben nicht ausreichen. Denn in diesem Falle steht es ihm frei, so viele Bedingungen hinzuzufügen, als zur Bestimmung des Gesuchten nothwendig sind; er kann dann noch dazu diese Bedingungen so einrichten, dass das Gesuchte sich möglichst einfach bestimmen lässt; so z. B. wird man, wenn eine Ebene oder eine Gerade nicht bestimmt genug ist, womöglich die Bedingung hinzufügen, dass sie zu einer Tafel $\perp$ oder $\parallel$ ist.

Hat man aber eine vorgelegte Aufgabe gelöst, so darf man sich dabei nicht beruhigen; denn die Lösung der Aufgabe bezieht sich auf Linien und Punkte von bestimmten Lagen, und man kann daher nicht wissen, ob nicht besondere Lagen der gegebenen Dinge vorkommen können, auf die wir nicht gefasst sind. Daher muss man jede Aufgabe diskutiren, d. h. alle die verschiedenen Fälle untersuchen, die möglicher Weise erscheinen können; erst dann kann man sagen, dass die Aufgabe erschöpfend behandelt ist. Wie man aber die Aufgabe diskutirt, werden wir in vielen der folgenden Beispiele zu zeigen Gelegenheit haben. Um dergleichen Diskussionen zu vereinfachen, werden wir von parallelen Geraden oder Ebenen sagen, sie schneiden sich in unendlicher Ferne.

Fig. 7. 39. Aufg. Den Durchschnittspunkt zweier Geraden zu finden.

Aufl. Zwei Gerade werden sich nur dann schneiden, wenn die oben (31.) aufgeführten Bedingungen erfüllt sind. Ist dies aber der Fall, so stellt sich damit auch der $\mathfrak{P}$(a) heraus, nach welchem sie sich schneiden.

40. Aufg. Es ist gegeben, (Fig. a) eine 𝔈(A_1) und eine Gerade, die sie schneidet; gesucht der Schnittpunkt. Fig. 12.

Aufl. Der gesuchte Punkt muss seinen $\mathfrak{R}_1$ in der 𝔊(A_1) und in dem $\mathfrak{R}_1$ der Geraden haben; sein $\mathfrak{R}_2$ muss in dem $\mathfrak{R}_2$ der Geraden liegen. Es ist also 𝔓(a) oder 𝔓(b) der gesuchte Punkt, je nachdem 𝔊(a_2) oder 𝔊(B) die gegebene Gerade ist.

Anm. Mit Hülfe dieser Aufgabe können wir auch die Spuren einer Geraden (s. 17. 4.) finden. Denn die erste Spur einer 𝔊(A) ist nichts anderes, als der Durchschnitt der 𝔊(A) mit der $\mathfrak{T}_1$, d. i. mit der Ebene, deren $\mathfrak{R}_2$ die $\mathfrak{K}_2$ ist. Es liegt also von der zweiten Spur der 𝔊(A) (Fig. b) der $\mathfrak{R}_2$ in A_2 und in $\mathfrak{K}_2$, der $\mathfrak{R}_1$ in A_1; es ist also 𝔓(a) die erste Spur der 𝔊(A). Ebenso findet man, dass 𝔓(b) die zweite Spur derselben ist.

41. Aufg. Es ist gegeben eine 𝔈(A_1) und eine zweite Ebene, die ebenfalls auf einer Tafel senkrecht steht; gesucht der Schnitt der beiden Ebenen. Fig. 13.

Aufl. Die Bedingung, dass die gesuchte Gerade in 𝔈(A_1) liegen soll, drückt (nach 33. Satz 1.) dasselbe aus, als die, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden in der 𝔊(A_1) liegen soll.

1) Ist nun (Fig. a) die zweite Ebene eine 𝔈(B_1), so muss der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Schnittlinie auch in der 𝔊(B_1), also im Punkte a_1 sein, nach welchem 𝔊$(A_1) \times$ 𝔊(B_1). Es ist demnach in diesem Falle die gesuchte Schnittlinie die 𝔊(a_1).

2) Ist (Fig. b) die zweite Ebene eine 𝔈(B_2), die zugleich auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist (s. 24. und 25.) der $\mathfrak{R}_1$ dieser Ebene die 𝔊(C_1), welche mit B_2 zusammmenfällt, und es ist wieder der 𝔓(a_1), in welchem 𝔊$(A_1) \times$ 𝔊(C_1) der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Schnittlinie.

3) Ist die zweite Ebene eine 𝔈(A_2), die nicht auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, und ist 𝔈(A_1) nicht senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$, so ist die Schnittlinie eine schiefe Gerade, deren Risse A_1, A_2 sind, also die 𝔊(A).

4) Ist der Riss der ersten Ebene und der der zweiten senkrecht zur $\mathfrak{K}$, so sind die Ebenen parallel.

42. Aufg. Es ist gegeben eine 𝔈(A_1) und eine schiefe Ebene; man sucht die Schnittlinie der beiden Ebenen. Fig. 14.

Aufl. Da die gesuchte Gerade in einer schiefen Ebene liegt, also auf keiner Tafel senkrecht steht, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ eine Gerade,

und zwar, weil sie in der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt, die $\mathfrak{G}(A_1)$. Die vorliegende Aufgabe stimmt also ganz mit der Aufgabe überein, eine Gerade einer schiefen Ebene zu finden, deren $\mathfrak{R}_1$ die $\mathfrak{G}(A_1)$ ist.

Wäre nun blos verlangt, eine beliebige Gerade einer schiefen Ebene, z. B. der $\mathfrak{E}$(abc) (Fig. a) zu finden, so würden wir entweder eine $\mathfrak{G}$(A) angeben, die durch zwei Punkte a, b der Ebene geht, deren Risse also die Risse dieser Punkte enthalten müssten (27.), oder eine $\mathfrak{G}$(B), die durch einen $\mathfrak{P}$(c) der Ebene geht und mit einer $\mathfrak{G}$(A) der Ebene parallel ist, wobei wir (nach 29.) statt der gegebenen Punkte auch solche nehmen können, die in Geraden der Ebene liegen. Da aber verlangt ist, dass $\mathfrak{G}(A_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Geraden sein soll, so kann diese nur solche Punkte enthalten, deren $\mathfrak{R}_1$ in A_1 liegen (28.) und nur mit solchen Geraden parallel sein, deren $\mathfrak{R}_1 \parallel A_1$ sind (32). Wir werden daher die gesuchte Gerade auf folgendem Wege finden:

1) wenn die Geraden B, C der $\mathfrak{E}$(BC) so liegen, dass $A_1 \times B_1$ und $\times$ C_1 (Fig. b). In diesem Falle können wir unmittelbar zwei Punkte a, b der Ebene finden, die der gesuchten Geraden angehören, diejenigen nemlich, deren $\mathfrak{R}_1$ im Durchschnitte der $\mathfrak{G}(A_1)$ mit $\mathfrak{G}(B_1)$ und $\mathfrak{G}(C_1)$ liegen; es ist dann die $\mathfrak{G}$(A), welche die Punkte a, b enthält, die gesuchte Gerade;

2) wenn (wie Fig. c) $A_1 \times B_1$ und $\parallel C_1$. In diesem Falle bekommen wir unmittelbar nur einen Punkt a der gesuchten Geraden A; aber da diese die $\mathfrak{G}$(C) nicht schneidet und doch mit ihr in einer Ebene liegt, so muss sie parallel zur $\mathfrak{G}$(C) sein und es ist daher auch $A_2 \parallel C_2$;

3) wenn (wie Fig. d) $A_1 \parallel B_1 \parallel C_1$. In diesem Falle muss wieder $A_2 \parallel B_2$ sein; um aber einen $\mathfrak{P}$(a) der gesuchten $\mathfrak{G}$(A) zu erhalten, müssen wir vorerst eine $\mathfrak{G}$(D) der Ebene aufsuchen, die mit $\mathfrak{G}$(A) nicht parallel ist, also auch die $\mathfrak{G}$(B) und $\mathfrak{G}$(C) schneidet. Haben wir die $\mathfrak{G}$(D), so lässt sich die $\mathfrak{G}$(A) mit Hülfe der Geraden B und D ebenso, wie im vorhergehenden Falle durch die Geraden B und C finden.

4) Sind von der schiefen Ebene drei Punkte gegeben, so verschaffen wir uns zuerst zwei beliebige Gerade der Ebene, und suchen dann mit Hülfe derselben die $\mathfrak{G}$(A).

Anm. Ehe wir zu folgenden Aufgaben übergehen, müssen wir noch bemerken, dass in denselben die gegebenen

und gesuchten Dinge alle möglichen Lagen gegen die Tafeln haben können, nur werden wir es vermeiden, eine Gerade auftreten zu lassen, die senkrecht zur $\mathfrak{K}$ steht (deren beide Risse bekanntlich $\perp \mathfrak{K}$ stehen, und die nur durch zwei Punkte gegeben werden müssen), da die Lage einer solchen Geraden gegen andere Dinge aus der Zeichnung nicht erkennbar ist, und dadurch Aufgaben in Bezug auf dieselbe schwer lösbar werden. Die Mittel zur Lösung von Aufgaben, in denen auch solche Gerade vorkommen, werden sich in dem nächsten §. ergeben.

43. **Aufg.** Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}$(abc), gesucht die zweite Spur dieser Ebene. Fig. 15.

Aufl. Da die zweite Spur der Ebene ihr Durchschnitt mit mit der $\mathfrak{T}_2$ ist, so ist die vorliegende Aufgabe ein besonderer Fall der vorhergehenden, den Durchschnitt einer schiefen Ebene mit einer $\mathfrak{LE}_1$ zu finden. Diese $\mathfrak{LE}_1$ ist hier die $\mathfrak{T}_2$ und ihr $\mathfrak{R}_1$ ist daher die $\mathfrak{K}_1$. Da wir aber die $\mathfrak{K}_1$ beliebig annehmen können, wenn sie nur parallel zum vorderen Rande des Blattes ist, so wählen wir sie, wie schon oben (16.) allgemein angegeben, so, dass sie durch a_1 geht. Suchen wir nun die verlangte Spur eins, d. h. den Schnitt der Ebene abc mit der $\mathfrak{T}_2$ oder mit der $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$, d. h. mit der Ebene, deren erster Riss $\mathfrak{K}_1$ ist, so müssen wir nach der vorigen Nummer suchen, wo zwei Gerade der $\mathfrak{E}$(abc) die $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$ schneiden. Man wird aber leicht gewahr werden, dass die Gerade ac die $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$ in dem $\mathfrak{P}$(a) schneidet, den wir schon haben (in demselben Punkte schneidet auch die $\mathfrak{G}$(ab) die $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$); wir werden also noch suchen, wo die $\mathfrak{G}$(bc) die $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$ schneidet, und dies geschieht in dem Punkte d. Verbinden wir daher a mit d durch die $\mathfrak{G}$(A), so ist dies die verlangte Spur zwei. In ganz ähnlicher Art erhalten wir als erste Spur der Ebene abc die Gerade B. Da aber die beiden Geraden A, B, weil sie beide in derselben Ebene liegen, s i c h s c h n e i d e n müssen, so müssen die Punkte f_1 (in welchem sich A_1 und B_1 treffen) und f_2 (wo A_2 und B_2 zusammenstossen) s e n k r e c h t ü b e r e i n a n d e r liegen. Zugleich sieht man, dass der Punkt f, in welchem sich die Spuren der $\mathfrak{E}$(abc) schneiden, in der Kante liegt, wie dies oben (25.) bereits nachgewiesen wurde.

Anm. Würden wir die beiden umgeklappten Tafeln so verschieben, dass $\mathfrak{K}_1$ auf $\mathfrak{K}_2$ (und auch alle $\mathfrak{KR}_1$ auf die ihnen ent-

sprechenden $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_2$) fielen, so würde (wie in Fig. 15 a) A_1 und B_2 in $\mathfrak{K}$, sowie f_1 und f_2 in f zusammenfallen, und es kommen dann A_2, B_1 und $\mathfrak{K}$ in einem Punkte f zusammen. Dieser Punkt f kann aber auch in unendliche Ferne fallen, in welchem Falle sowohl A als B $\parallel \mathfrak{K}$ werden.

Fig. 16. 44. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(a_1)$ und eine $\mathfrak{E}$(bcd); gesucht ihr Schnittpunkt.

Aufl. Da der gesuchte Punkt seinen $\mathfrak{R}_1$ in a_1 haben muss (28.), so ist die vorliegende Aufgabe übereinstimmend mit der: einen $\mathfrak{P}$(a) einer $\mathfrak{E}$(bcd) zu suchen, dessen $\mathfrak{R}_1$ ein gegebener $\mathfrak{P}(a_1)$ ist.

Wäre nun ein beliebiger Punkt der $\mathfrak{E}$(bcd) verlangt, so würden wir in der Ebene eine beliebige Gerade und in dieser einen beliebigen Punkt annehmen; da aber der $\mathfrak{R}_1$ des Punktes a gegeben ist, so muss auch die Gerade der Ebene, in welcher der $\mathfrak{P}$(a) liegen soll, so gewählt werden, dass ihr $\mathfrak{R}_1$ durch a_1 geht. Wir werden demnach eine $\mathfrak{G}$(A) der $\mathfrak{E}$(bcd) aufsuchen, deren $\mathfrak{R}_1$ durch $\mathfrak{P}(a_1)$ geht. Haben wir die $\mathfrak{G}$(A) gefunden (42.), so ist der $\mathfrak{P}$(a), dessen $\mathfrak{R}_2$ in C_2 liegen muss, der gesuchte Punkt.

NB. Wir haben der Bequemlichkeit wegen C_1 so gewählt, dass es durch b_1 geht; dann ist die Aufsuchung von C_2, weil es durch b_2 gehen muss, einfacher.

Anm. Da in der $\mathfrak{G}(a_1)$ der $\mathfrak{P}$(a) der einzige Punkt ist, den sie mit der $\mathfrak{E}$(bcd) gemein hat, also jeder andere Punkt, der in a_1 seinen $\mathfrak{R}_1$ hat, nicht in der $\mathfrak{E}$(bcd) liegen kann, so gibt uns die vorliegende Aufgabe ein Mittel an die Hand, zu untersuchen, ob ein $\mathfrak{P}$(a) in einer Ebene (bcd) liegt. Man darf nur den Durchschnitt der $\mathfrak{G}(a_1)$ mit der $\mathfrak{E}$(bcd) aufsuchen. Je nachdem der gefundene Schnittpunkt mit $\mathfrak{P}$(a) zusammenfällt oder nicht, liegt der $\mathfrak{P}$(a) in der $\mathfrak{E}$(bcd) oder nicht.

Fig. 17. 45. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{E}$(AB) und eine $\mathfrak{G}$(C); gesucht ihr Schnittpunkt.

Aufl. Sollte der gesuchte Punkt blos in der $\mathfrak{E}$(AB) liegen, so würden wir in ihr eine beliebige Gerade D und in dieser einen beliebigen Punkt annehmen. Da aber der Punkt auch in der $\mathfrak{G}$(C) liegen muss, so müssen die Geraden C und D diesen Punkt gemein haben, also in einer Ebene liegen, deren Durchschnitt mit der $\mathfrak{E}$(AB) die $\mathfrak{G}$(D) ist. Wir müssen demnach

durch die 𝔊(C) eine Ebene legen, ihren Schnitt D mit der 𝔈(AB) aufsuchen, und es ist dann der gesuchte Punkt der Durchschnitt der 𝔊(C) mit der 𝔊(D). Unter allen Ebenen aber, die die 𝔊(C) enthalten, sind die einzigen, deren Schnitt mit der gegebenen 𝔈(AB) wir bis jetzt finden gelernt haben (42.), diejenigen, welche zugleich auf einer Tafel senkrecht stehen, also die $\mathfrak{LE}_1$ oder die $\mathfrak{LE}_2$ der 𝔊(C), d. i. die $\mathfrak{E}(C_1)$ oder die $\mathfrak{E}(C_2)$. Wir finden demnach den verlangten Punkt auf folgende Weise:

Man sucht (nach 42.) den Durchschnitt D der 𝔈(AB) mit der $\mathfrak{E}(C_1)$, wobei $D_1 \mid C_1$; der Punkt a, nach welchem 𝔊(C) $\times$ 𝔊(D) (s. 39. und 31. 2.) ist der gesuchte Punkt.

Anm. Fiele auch D_2 mit C_2 zusammen, so wäre die 𝔊(D) | 𝔊(C), also läge 𝔊(C) in der 𝔈(AB); wäre $D_2 \parallel C_2$, so wäre auch 𝔊(C) ∥ 𝔊(D) (32.), und daher auch (Anh. 30.) 𝔊(C) ∥ 𝔈(AB). Man sieht daher, dass uns diese Aufgabe zugleich ein Mittel an die Hand gibt, zu erkennen, ob eine 𝔊(C) |, ∥ oder $\times$ 𝔈(AB). Denn um dies zu erfahren, darf man nur den Schnitt der 𝔊(C) mit der 𝔈(AB) aufsuchen.

46. Aufg. Es sind gegeben eine 𝔈(AB) und eine 𝔈(CD); gesucht ihre Schnittlinie. Fig. 18.

Aufl. Liegt ein Punkt in beiden Ebenen, oder in der einen Ebene und in einer Geraden der andern Ebene, so gehört er der gesuchten Schnittlinie an. Suchen wir daher (nach 45.) den 𝔓(a), in welchem die 𝔈(CD) von der 𝔊(A) geschnitten wird, so ist er ein Punkt der gesuchten Schnittlinie. Suchen wir ferner den 𝔓(b), in welchem die 𝔈(CD) von der 𝔊(B) getroffen wird, so haben wir einen zweiten Punkt der gesuchten Linie. Diese ist daher die 𝔊(E), welche durch die Punkte a, b geht.

Anm. 1. Ist die 𝔊(A) ∥ 𝔈(CD) (s. 45. Anm.), so kann 𝔈(AB) ∥ 𝔈(CD) sein, oder nicht. Um dies zu erfahren, muss man in der 𝔈(AB) eine zweite Gerade haben, welche die 𝔊(A) schneidet, und den 𝔓(b) suchen, in welchem diese zweite Gerade die 𝔈(CD) trifft. Findet man einen solchen Punkt, so schneidet 𝔈(AB) die 𝔈(CD) nach einer Geraden, die | 𝔓(b) und ∥ 𝔊(A). Findet man keinen 𝔓(b), d. h. ist auch die zweite Gerade der 𝔈(AB) parallel zur 𝔈(CD), so ist, weil A und B sich schneiden, 𝔈(AB) ∥ 𝔈(CD).

Würde $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{E}(CD)$, so ist entweder die $\mathfrak{G}(A)$ selbst der Durchschnitt der Ebenen, oder sie fallen zusammen, in welchem Falle auch $\mathfrak{G}(B) \mid \mathfrak{E}(CD)$ wäre, was man (s. 45. Anm.) untersuchen kann.

Man sieht daher, *dass uns diese Aufgabe auch untersuchen lehrt, ob zwei gegebene schiefe Ebenen sich schneiden, oder parallel sind, oder zusammenfallen. Denn dies stellt sich heraus, wenn man den Schnitt der beiden Ebenen aufsucht.*

Anm. 2. Sind von den Ebenen die ersten Spuren gegeben, so ist der Schnitt von diesen schon ein Punkt ihrer Schnittlinie. Dasselbe gilt von ihren zweiten Spuren. Sind daher (Fig. 25.) $\mathfrak{K}$ die Kante, C_1 und D_2 die Spuren der einen, E_1 und F_2 die Spuren der anderen Ebene, so sind die Punkte a und b Punkte der Schnittlinie beider Ebenen und daher $\mathfrak{G}(ab)$ die verlangte Schnittlinie. Man sieht, dass in diesem Falle die Zeichnung sehr einfach wird.

47. Aufg. Es sind gegeben drei Ebenen, gesucht der Punkt, den sie gemein haben.

Aufl. Da dieser Punkt in der ersten und zweiten Ebene liegt, so gehört er auch ihrem Durchschnitt an, und da er auch in der dritten Ebene sich befindet, so ist er der Punkt, in welchem die dritte Ebene von dem Durchschnitte der ersten und zweiten getroffen wird. Man wird demnach zuerst (nach 47. oder 46.) den Schnitt der ersten und zweiten Ebene aufsuchen, sodann (nach 40., 44. oder 45.), wo diese Schnittlinie die dritte Ebene schneidet.

Fig. 19. 48. Aufg. Es sind gegeben zwei Gerade; gesucht eine Ebene, welche die eine Gerade enthält und mit der andern parallel ist.

Aufl. Ist eine der beiden Geraden ein Loth, wie die $\mathfrak{G}(a_1)$ (Fig. a), so ist auch die gesuchte Ebene eine $\mathfrak{LE}$. Soll nun diese durch die $\mathfrak{G}(A)$ gehen und mit $\mathfrak{G}(a_1)$ parallel sein, so ist A_1 ihr $\mathfrak{R}_1$ und die $\mathfrak{E}(A_1)$ die gesuchte Ebene. Soll sie durch $\mathfrak{G}(a_1)$ gehen, und $\parallel \mathfrak{G}(A)$ sein, so muss ihr $\mathfrak{R}_1$ durch den $\mathfrak{P}(a_1)$ gehen und $\parallel \mathfrak{G}(A_1)$ sein (nach 33. Satz 1. und 2.). Es ist demnach in diesem Falle $\mathfrak{E}(B_1)$ die gesuchte Ebene.

Sind aber beide Gerade schief, wie $\mathfrak{G}$ (A) und $\mathfrak{G}$ (B) (Fig. b), und soll die Ebene | $\mathfrak{G}$ (A) und || $\mathfrak{G}$ (B) sein, so muss die gesuchte Ebene, ausser der $\mathfrak{G}$ (A), jede $\mathfrak{G}$ (C) enthalten, die durch einen $\mathfrak{P}$ (a) dieser Ebene geht und || $\mathfrak{G}$ (B) ist. (38. I.) Nimmt man also in der Ebene, oder, was ebensoviel ist, in der $\mathfrak{G}$ (A) derselben einen $\mathfrak{P}$ (a) an, und legt dadurch die $\mathfrak{G}$ (C) || $\mathfrak{G}$ (B), so ist die $\mathfrak{E}$ (AC) die gesuchte Ebene.

Es trägt hiebei zur Vereinfachung der Zeichnung bei, wenn man, wie wir es gethan, den $\mathfrak{P}$ (a) so wählt, dass $\mathfrak{G}$ (B_1) | $\mathfrak{G}$ (C_1).

Anm. Es könnte sich treffen, dass $\mathfrak{G}$ (C) | $\mathfrak{G}$ (A), in welchem Falle $\mathfrak{G}$ (A) || $\mathfrak{G}$ (B) sein müsste. Wir hätten dann von der gesuchten Ebene blos eine Gerade, und es würde dann die Aufgabe unbestimmt.

NB. Wir haben die vorliegende Aufgabe auch für die Fälle gelöst, wo die gesuchte Ebene eine $\mathfrak{LE}$ wird; wir werden von nun an in der Regel blos den allgemeinsten Fall einer Aufgabe durchmachen, und die besondern Fälle dem Schüler selbst überlassen.

49. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}$ (A) und eine $\mathfrak{E}$ (BC); Fig. 20.
gesucht eine Ebene, die durch $\mathfrak{G}$ (A) geht und $\perp$ $\mathfrak{E}$ (BC).

Aufl. Wir brauchen hier wieder blos mit Hülfe der zweiten Bedingung eine Gerade zu suchen, die der verlangten Ebene angehört. Eine solche ist aber jede $\mathfrak{G}$ (D), die durch einen $\mathfrak{P}$ (a) der gesuchten Ebene geht und $\perp$ $\mathfrak{E}$ (BC). Wir müssen demnach in der gesuchten Ebene, also in der ihr gehörigen $\mathfrak{G}$ (A) einen beliebigen $\mathfrak{P}$ (a) annehmen und durch ihn eine $\mathfrak{G}$ (D) legen, welche $\perp$ $\mathfrak{E}$ (BC), d. h. deren Risse D_1, D_2 zu den Spuren E_1, F_2 (43.) der $\mathfrak{E}$ (BC) senkrecht stehen (35.), und es ist dann $\mathfrak{E}$ (AD) die gesuchte Ebene.

Anm. Fiele hier wieder $\mathfrak{G}$ (D) zusammen mit der $\mathfrak{G}$ (A), so müsste $\mathfrak{G}$ (A) $\perp$ $\mathfrak{E}$ (BC) sein; wir hätten dann zur Bestimmung unserer Ebene nur eine einzige Gerade, und die Ebene wäre unbestimmt.

50. Aufg. Es ist gegeben ein $\mathfrak{P}$ (a) und eine $\mathfrak{G}$ (A); gesucht eine Ebene | $\mathfrak{P}$ (a) und $\perp$ $\mathfrak{G}$ (A). Fig. 21.

Aufl. Wir legen durch $\mathfrak{P}$ (a) eine Gerade, welche $\perp$ $\mathfrak{G}$ (A) ist (s. 38. V). Es giebt aber unendlich viele solche Gerade (die zusammen die gesuchte Ebene bilden) von denen (s. 36.)

sich ohne Hilfsoperationen die $\mathfrak{G}(B)$ unmittelbar zeichnen lässt, wenn $B_1 \parallel \mathfrak{K}_1$ und $B_2 \perp A_2$ gewählt wird; ferner eine zweite Gerade C ($C_2 \parallel \mathfrak{K}_2$, $C_1 \perp A_1$). Die beiden Geraden bestimmen die Ebene, so dass die gesuchte Ebene die $\mathfrak{E}(BC)$ ist.

NB. Statt die $\mathfrak{G}(C)$ durch den $\mathfrak{P}(a)$ zu legen, hätten wir auch in der $\mathfrak{G}(B)$ einen anderen Punkt wählen und durch ihn die $\mathfrak{G}(C)$ legen können.

Anm. 1. Betrachtet man B_1 als $\mathfrak{K}_1$ und B_2 als $\mathfrak{K}_2$, so sind B und C die Spuren der Ebene.

Anm. 2. Ist die gegebene $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{T}_2$ (wie in Fig. 21. a), so führt diese besondere Gerade (s. 38. c) uns darauf, dass die gesuchte Ebene ein $\mathfrak{LE}_2$ ist, und demnach zu ihrer Bestimmung blos ihr $\mathfrak{R}_2$ zu suchen ist. Dieser muss aber durch a_2 gehen und $\perp A_2$ sein. Ziehen wir durch a_2 die Gerade $B_2 \perp A_2$, so ist die $\mathfrak{E}(B_2)$ die verlangte Ebene.

51. Wir lassen hier noch einige Aufgaben, in denen das Gesuchte eine Ebene ist, folgen, deren weitere Ausführung wir dem Schüler überlassen wollen.

1) Es sind gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$ und eine $\mathfrak{E}(AB)$; gesucht eine mit dieser parallele Ebene, die durch den Punkt geht.

Man legt durch den $\mathfrak{P}(a)$ eine $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{G}(A)$ und durch einen Punkt der $\mathfrak{G}(C)$, z. B. durch $\mathfrak{P}(a)$ selbst, eine $\mathfrak{G}(D) \parallel \mathfrak{G}(B)$, vorausgesetzt, dass $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ sich schneiden. Wäre $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$, so müsste man in $\mathfrak{E}(AB)$ eine $\mathfrak{G}(E)$ annehmen, die die $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ schneidet, und $\mathfrak{G}(D) \parallel \mathfrak{G}(E)$ sein lassen. Dann ist $\mathfrak{E}(CD)$ die gesuchte Ebene.

2) Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(A)$ und eine $\mathfrak{G}(B)$, die nicht parallel sind, und ein $\mathfrak{P}(a)$; gesucht eine Ebene, die | $\mathfrak{P}(a)$, $\parallel \mathfrak{G}(A)$ und $\parallel \mathfrak{G}(B)$.

Die gesuchte Ebene geht durch die $\mathfrak{G}(C)$, die | $\mathfrak{P}(a)$ und $\parallel \mathfrak{G}(A)$, und durch $\mathfrak{G}(D)$, die | $\mathfrak{P}(a)$ und $\parallel \mathfrak{G}(B)$. Wäre $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$, so erhielte man nur e i n e Gerade der gesuchten Ebene.

3) Es sind zwei Ebenen und ein Punkt gegeben; gesucht eine Ebene, die durch den Punkt geht, und auf den gegebenen Ebenen senkrecht steht.

Die gesuchte Ebene muss zwei Gerade enthalten, welche durch den Punkt gehen und beziehungsweise zu den Ebenen

senkrecht stehen; oder sie muss durch den Punkt gehen und senkrecht stehen auf der Geraden, nach der sich die Ebenen schneiden. (Wie müssen die gegebenen Ebenen gegeneinander liegen, wenn die gesuchte Ebene unbestimmt werden soll?)

4) Es sind gegeben ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene; gesucht eine Ebene, die durch den Punkt geht, mit der Geraden parallel und zur Ebene senkrecht ist.

Die gesuchte Ebene muss zwei Gerade enthalten, die durch den Punkt gehen, und beziehungsweise parallel zur gegebenen Geraden und senkrecht zur gegebenen Ebene sind. (Wie müssen die gegebene Gerade und Ebene gegeneinander liegen, wenn die Aufgabe unbestimmt ist?)

Anm. Wäre in den Aufgaben der vorliegenden Nr. der 𝔓 (a) nicht gegeben, so würden wir ihn beliebig annehmen und dann die Ebene nach dem angebenen Verfahren suchen. Die so gefundene Ebene ist aber nicht die einzige entsprechende, da wir ja den 𝔓 (a) auch anders hätten wählen können, sondern es giebt unzählige Ebenen, die alle ‖ laufen, also sich in einer unendlich fernen Geraden schneiden, oder, wie wir auch sagen können, die unendlich ferne Gerade gemein haben. Die Aufgabe ist also unbestimmt.

Da wir von parallelen Ebenen sagen wollen, sie haben gleiche Stellung, so sieht man, dass durch die Aufgaben der vorliegenden Nummer, wenn der 𝔓 (a) nicht gegeben ist, die Stellung einer Ebene gefunden werden kann.

52. Wir kommen nun zu den Aufgaben, in welchen das Gesuchte eine Gerade ist. Die Aufgabe, eine Gerade zu finden. die zwei Ebenen angehört, haben wir schon oben (41., 46.) gelöst. Die Aufgaben, eine Gerade zu finden, die durch einen Punkt geht, und entweder mit einer Geraden parallel oder zu einer Ebene senkrecht steht, gehen so einfach aus den Sätzen in 28, 31 und 35 hervor, dass wir sie nicht besonders durchführen zu müssen glaubten, und daher schon bisher als bekannt voraussetzten. Bei den übrigen Aufgaben, in denen eine Gerade gesucht wird, ist der Weg, den man einschlägt, der, dass man sich, wenn möglich, zuerst eine Gerade zu verschaffen sucht, mit der die gesuchte parallel ist. Man kann aber eine solche Geıade finden, wenn man (38. IX.) zwei

Ebenen hat, oder aus den Bedingungen bekommen kann (s. 38. VI. und X.), zu denen die gesuchte Gerade parallel ist; (wir müssen hier wiederholt darauf aufmerksam machen, dass eine Gerade, die in einer Ebene liegt, mit ihr auch parallel ist). Man wird demnach an den gegebenen Bedingungen gleich sehen, ob man eine Parallele zur gesuchten Geraden erhalten kann, oder nicht. In letzterem Falle muss man durch die gegebenen Bedingungen zwei Punkte der Geraden zu erhalten suchen, oder zwei Ebenen, in denen sie liegt. Zur Auffindung eines Punktes der Geraden dienen (nach 38. X.) die beiden Bedingungen $\times$ 𝔊(A), | 𝔈(BC). Sind nun diese beiden Bedingungen gegeben, so ist der Schnitt von 𝔊(A) mit 𝔈(BC) ein Punkt der gesuchten Geraden. Ist aber die Bedingung | 𝔈(BC) nicht gegeben, wohl aber die $\times$ 𝔊(A), so müssen wir uns aus den übrigen (ausser der letztgenannten) Bedingungen eine Ebene verschaffen, in der die Gerade liegt, deren Durchschnitt also mit A den verlangten Punkt liefert.

53. Aufg. Es sind gegeben zwei Gerade A, B und eine Ebene; gesucht eine Gerade C, die in der Ebene liegt, und beide Gerade A, B schneidet.

Aufl. Da man hier nur eine einzige Ebene hat, zu der die 𝔊(C) parallel ist, so kann man unmittelbar keine Gerade finden, die $\parallel$ 𝔊(C) ist. Man wird daher zwei Punkte der Geraden C zu erhalten suchen. Diese sind aber leicht zu erhalten; denn es müssen (nach 38. X.) die Punkte a, b, in welchen die Ebene von den Geraden A, B geschnitten wird, in der 𝔊(C) liegen. Um diese daher zu finden, sucht man (nach 45.) die Punkte a, b, in welchen die Geraden A, B die Ebene schneiden, so ist die 𝔊(ab) die gesuchte Linie.

Anm. Ist die 𝔊(A) parallel zur Ebene, so ist die 𝔊(C) unmöglich; liegt die 𝔊(A) in der Ebene, während diese von der 𝔊(B) im 𝔓(b) geschnitten wird, so erfüllt jede Gerade, die den 𝔓(b) mit einem Punkte der 𝔊(A) verbindet, die verlangten Bedingungen. Liegen 𝔊(A) und 𝔊(B) in der Ebene, so werden sie von jeder Geraden der Ebene geschnitten, die nicht mit einer von ihnen parallel ist.

54. **Aufg.** Es sind gegeben eine 𝔊(A), eine 𝔊(B) und ein 𝔓(a), der in keiner dieser Geraden liegt; gesucht eine Gerade, die | 𝔓(a), X 𝔊(A) und X 𝔊(B). Fig. 22.

Aufl. Man sieht hier leicht, dass sich aus den gegebenen Bedingungen die Richtung der Geraden nicht finden lässt, wir daher zwei Punkte der Geraden brauchen, und, da ein Punkt gegeben ist, ein Punkt gesucht werden muss. Wir müssen uns daher (nach 52.), da die Bedingung X 𝔊(A) gegeben ist, aus den übrigen Bedingungen [| 𝔓(a), X 𝔊(B)] eine Ebene verschaffen, in der die Gerade liegt. Eine solche Ebene ist aber offenbar die 𝔈(Ba). Wir haben also die Bedingungen X 𝔊(A), | 𝔈(Ba), woraus wir durch den Schnittpunkt b der 𝔊(A) mit der 𝔈(Ba) einen Punkt b der gesuchten Geraden, und mit ihm die 𝔊(ab) erhalten.

Was die Ausführung der Zeichnung betrifft, so ist der Gang, den wir zu nehmen haben, folgender:

Wir nehmen in der 𝔈(Ba) noch eine 𝔊(C) an (welche | 𝔓(a) und || oder X 𝔊(B)); suchen wir nun (nach 45.) *) den 𝔓(b), in welchen die 𝔈(BC) X 𝔊(A), so ist 𝔊(D), welche | 𝔓(a) und | 𝔓(b), die gesuchte Gerade.

Da diese Gerade | 𝔓(a) und | 𝔓(b), der in der 𝔊(A) liegt, so erfüllt sie offenbar die Bedingungen, dass sie | 𝔓(a) und X 𝔊(A); sie muss aber auch X 𝔊(B), wovon wir uns unmittelbar in der Zeichnung überzeugen können (31. Satz.) Sollte aber 𝔊(D) || 𝔊(B) sein, so wäre die Aufgabe unmöglich. In unserer Figur schneiden sich in der That die 𝔊(D) und die 𝔊(B) nach 𝔓(c).

Anm. Bei der Aufsuchung des 𝔓(b) können uns auch die Fälle (45. Anm.) vorkommen, dass die 𝔊(A) || oder | 𝔈(BC). Im ersten Falle giebt es keinen 𝔓(b), also auch keine 𝔊(D); die Aufgabe ist also unmöglich; im zweiten Falle kann jeder Punkt der 𝔊(A) den 𝔓(b) vorstellen, also giebt es unendlich viele 𝔊(D), und die Aufgabe ist unbestimmt.

---

*) Da die Aufgabe in Num. 45., so wie hier, auch in den folgenden Aufgaben gebraucht wird, so machen wir den Schüler darauf aufmerksam, sich diese Aufgabe recht geläufig zu machen.

Fig. 23. 55. **Aufg.** Es sind gegeben eine 𝔊(A) und ein 𝔓(a); gesucht eine Gerade, die | 𝔓(a), ╳ 𝔊(A) und ⊥ 𝔊(A).

Aufl. Da die 𝔊(A) von der gesuchten Geraden geschnitten wird, so brauchen wir nur noch eine Ebene, die sie enthält, um einen Punkt derselben finden zu können (38. X.) Eine solche Ebene geht aber aus der Bedingung hervor, dass die Gerade ⊥ 𝔊(A) und | 𝔓(a); denn sie muss desshalb (38. VI.) in einer Ebene liegen, die ⊥ 𝔊(A) und | 𝔓(a). Suchen wir daher (nach 50.) eine 𝔈(BC), die | 𝔓(a) und ⊥ 𝔊(A), so ist der 𝔓(b), in welchem 𝔊(A) ╳ 𝔈(BC), ein Punkt der gesuchten Geraden, und diese ist daher 𝔊(D), welche | 𝔓(a) und | 𝔓(b).

Anm. Fällt 𝔓(b) zusammen mit 𝔓(a), welcher Fall eintreten muss, wenn der 𝔓(a) | 𝔊(A), so erhält man durch das eben angegebene Verfahren keinen neuen Punkt der 𝔊(D), und diese ist unbestimmt (muss aber natürlich in der 𝔈(BC) liegen und | 𝔓(a)).

Fig. 24. 56. **Aufg.** Eine Gerade zu finden, die zwei gegebene Gerade A, B schneidet und mit einer dritten Geraden parallel ist.

Aufl. 1) Ist die dritte Gerade eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_{1}$, z. B. die 𝔊(a_1), so ist auch die gesuchte Gerade ein $\mathfrak{L}_1$ und ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt. Dieser Punkt muss aber offenbar in A_1 und B_1 liegen, weil die gesuchte Gerade sowohl A als B schneiden soll. Demnach ist der Punkt c_{1}, in welchem A_1 und B_1 sich schneiden, der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Geraden; diese ist also 𝔊(c_1).

2) Ist die dritte Gerade die 𝔊(C), so ist die Richtung der gesuchten Geraden gegeben; wir brauchen daher nur noch einen Punkt von dieser. Wegen der Bedingung, ╳ 𝔊(A) dürfen wir uns nur wieder eine Ebene verschaffen, in der die Gerade liegen muss. Eine solche Ebene muss aber ‖ 𝔊(C) sein, und, wegen ╳ 𝔊(B), eine 𝔈(BD) vorstellen, die | 𝔊(B) und ‖ 𝔊(C) (s. 48). Sucht man nun den 𝔓(a), in welchem 𝔊(A) ╳ 𝔈(BD), so ist er ein Punkt der verlangten Geraden. Diese kann daher keine andere sein, als die 𝔊(E), welche | 𝔓(a) und ‖ 𝔊(C).

In der That erfüllt auch die 𝔊(E) im Allgemeinen die verlangten Bedingungen; denn da wir sie durch den in der 𝔊(A) liegenden 𝔓(a) und ‖ 𝔊(C) gelegt haben, so ist nur noch nachzusehen, ob 𝔊(E) ╳ 𝔊(B). Dies wird aber im Allgemeinen der

Fall sein (in unserer Figur schneiden sich diese Linien im $\mathfrak{P}(b)$), da $\mathfrak{G}(E)$ und $\mathfrak{G}(B)$ in der $\mathfrak{E}(BD)$ liegen. Es könnte aber auch ausnahmsweise $\mathfrak{G}(E) \parallel \mathfrak{G}(B)$ sein, welcher Fall eintritt, wenn $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{G}(B)$.

Anm. Bei der Aufsuchung der $\mathfrak{E}(BD)$ könnte es sein, dass diese unbestimmt würde (48. Anm.), wenn $\mathfrak{G}(B) \parallel \mathfrak{G}(C)$ wäre; aber in diesem Falle müsste jede Gerade, die $\parallel \mathfrak{G}(C)$ ist, auch $\parallel \mathfrak{G}(B)$ und nicht $\times\, \mathfrak{G}(B)$; es wäre also dann die Aufgabe unmöglich.

Ferner bei der Aufsuchung des $\mathfrak{P}(a)$ könnte (45. Anm.) $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{E}(BD)$ sein, in welchem Falle kein $\mathfrak{P}(a)$, also auch kein $\mathfrak{G}(E)$ vorhanden, also die Aufgabe unmöglich wäre. Oder es könnte $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{E}(BD)$, in welchem Falle die $\mathfrak{G}(A)$ unzählige Punkte mit der $\mathfrak{E}(BD)$ gemein hätte, und daher auch unzählige $\mathfrak{G}(E)$ möglich wären, wenn diese $\times\, \mathfrak{G}(B)$, oder gar keine, wenn sie $\parallel \mathfrak{G}(B)$.

57. Aufg. Es sind gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$, eine $\mathfrak{G}(A)$ und eine Fig. 25.
$\mathfrak{G}(B)$; gesucht eine Gerade, die $\mid \mathfrak{P}(a)$, $\perp \mathfrak{G}(A)$ und $\perp \mathfrak{G}(B)$.

Aufl. Hier kann man zwei Ebenen erhalten, die parallel zur gesuchten Geraden sind, deren Schnitt also parallel zur gesuchten Geraden ist, nemlich zwei Ebenen, die auf den Geraden A, B beziehungsweise senkrecht stehen. Nehmen wir aber, was hier leicht geht, diese Ebenen so an, dass sie beide $\mid \mathfrak{P}(a)$, so ist ihr Schnitt die gesuchte Gerade selbst. Nehmen wir daher die $\mathfrak{K}$ so an, dass a_2 in ihr (und daher $\mathfrak{P}(a) \mid \mathfrak{T}_1$) liegt, so sind C_1, D_2 ($C_1 \perp A_1$ und $D_2 \perp A_2$) die Spuren einer auf A senkrechten, und in ähnlicher Art E_1, F_2 die Spuren einer auf B senkrechten Ebene. Die beiden Ebenen schneiden sich in dem gegebenen Punkt a, ferner in dem $\mathfrak{P}(b)$, den ihre zweiten Spuren gemein haben; also ist die $\mathfrak{G}(ab)$ die verlangte.

Anm. Die beiden durch den $\mathfrak{P}(a)$ gelegten Ebenen werden zusammenfallen, wenn $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$; in diesem Falle haben wir also blos eine Ebene, in der die gesuchte Gerade liegen muss, und diese ist unbestimmt.

NB. Wenn wir in unserer Zeichnung nur eine Kante, nemlich $\mathfrak{K}$, angenommen haben, während wir aus den früher (13.) angegebenen Gründen gewöhnlich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ annehmen, so liegt der Grund einfach darin, dass hier die $\mathfrak{K}$ blos vorüber-

gehend benützt wird, und nach Lösung der Aufgaben nebst den Hilfslinien C_1, D_2, E_1, F_2 weggelöscht werden kann.

58. Wir haben nun die Lösung so vieler Aufgaben, in denen das Gesuchte eine Gerade ist, durchgenommen, dass wir glauben, der Schüler werde die übrigen Aufgaben mit Hülfe der allgemeinen Andeutungen, die wir oben (52.) gegeben haben, lösen können. Gleichwohl wollen wir ihn bei der Lösung der folgenden Aufgaben, deren Durchführung wir ihm überlassen, noch ein wenig unter die Arme greifen.

1) Es sind gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$ und zwei Ebenen; gesucht eine mit diesen parallele Gerade, die $| \ \mathfrak{P}(a)$.

Die gesuchte Gerade muss zum Schnitt der Ebenen parallel sein und $| \ \mathfrak{P}(a)$, oder sie ist der Durchschnitt zweier Ebenen, die beide $| \ \mathfrak{P}(a)$ und von denen jede zu einer anderen der gegebenen Ebenen parallel ist.

2) Gegeben: $\mathfrak{P}(a)$, $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{E}(BC)$; gesucht: $\mathfrak{G}(D) \ | \ \mathfrak{P}(a)$, $\perp \mathfrak{G}(A)$ und $\parallel \mathfrak{E}(BC)$.

Die $\mathfrak{G}(D)$ muss $| \ \mathfrak{P}(a)$ und parallel zum Schnitt der $\mathfrak{E}(BC)$ mit einer zur $\mathfrak{G}(A)$ senkrechten Ebene sein.

3) Gegeben: $\mathfrak{E}(AB)$, $\mathfrak{G}(C)$ und $\mathfrak{G}(D)$; gesucht: $\mathfrak{G}(E) \ | \ \mathfrak{E}(AB) \times \mathfrak{G}(C)$ und $\perp \mathfrak{G}(D)$.

Die $\mathfrak{G}(E)$ muss durch den $\mathfrak{P}(a)$ gehen, in welchen $\mathfrak{G}(C) \times \mathfrak{E}(AB)$. Ferner muss sie $\parallel \mathfrak{E}(AB)$ und $\perp \mathfrak{G}(D)$; also die Aufgabe 2.

4) Gegeben: $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$; gesucht $\mathfrak{G}(C) \times \mathfrak{G}(A) \times \mathfrak{G}(B) \perp \mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(B)$.

Die $\mathfrak{G}(C)$ muss zum Durchschnitt zweier auf $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ resp. senkrechten Ebenen parallel sein (s. 57.) Hat man daher den Durchschnitt dieser Ebenen, so ist noch die Aufgabe der Num. 56. zu lösen.

Schliesslich müssen wir noch bemerken, dass jede Aufgabe, in der sich unter den gegebenen Bedingungen die findet, dass von der gesuchten Geraden ein Riss, z. B. der $\mathfrak{R}_1$, gegeben ist, diese Bedingung (nach 18. Satz 2.) so viel heisst, als sie soll in der Ebene liegen, deren $\mathfrak{R}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden ist.

59. Wir beschliessen diesen §., indem wir noch zeigen, durch welche Operation man finden kann, ob zwei Gerade oder zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen.

1) Soll $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(B)$, so muss $\mathfrak{G}(A)$ parallel einer jeden Ebene sein, die $\perp$ $\mathfrak{G}(B)$. Zeichnet man daher eine beliebige Ebene $\perp$ $\mathfrak{G}$ B) (35.) und untersucht, (45. Anm.) ob die $\mathfrak{G}(A)$ parallel ist zu dieser Ebene, so erhält man den verlangten Aufschluss.

2) Sollen zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muss jede Senkrechte zur einen Ebene parallel sein zur andern. Zeichnet man daher eine Senkrechte zur einen Ebene, und sieht nach, ob sie parallel zur andern ist, so erfährt man, ob die Ebenen zu einander senkrecht sind.

§. 4.

Uebergang zu einem anderen Risssystem
(Projektionssystem).

60. Schon in den bisherigen Aufgaben hat man sich überzeugt, dass die Lösungen derselben sehr leicht zu finden sind, wenn die gegebenen Geraden oder Ebenen besondere (d. h. parallel oder senkrecht zu einer Tafel) sind. Dies wird sich in der Folge, wo auch Winkel und Entfernungen auftreten, noch viel glänzender herausstellen. Man wird sich bei den folgenden Aufgaben sehr häufig überzeugen, dass sich ihre Lösungen oft von selbst ergeben, wenn die gegebenen Geraden und Ebenen besondere sind, während es schwer fiele, dieselben Aufgaben für allgemeine Gerade und Ebenen zu lösen. Deshalb ist es vor Allem wichtig zu bemerken, dass, wenn von irgend welchen Geraden und Ebenen die gegenseitige Lage bestimmt ist, und wir dann zu ihrer graphischen Bestimmung, wie üblich, zwei Tafeln annehmen, diese stets so gewählt werden, *dass möglichst viele der gegebenen Geraden und Ebenen zu besonderen werden*, wobei es natürlich vorkommen wird, dass immer noch Gerade und Ebenen vorkommen, die keine besonderen sind.

Wird uns nun in Bezug auf eine *allgemeine* Gerade (oder Ebene) eine neue Aufgabe vorgelegt, deren Lösung wir in der allgemeinen Gestalt nicht finden können, so überlegen wir, ob wir nicht die Aufgabe zu lösen im Stande sind, wenn die Gerade (oder Ebene) *parallel* oder *senkrecht* zu einer Tafel wäre. Finden

wir nun für diesen besonderen Fall eine Auflösung der Aufgabe, so helfen wir uns zur allgemeinen Lösung damit, dass wir eine neue Tafel (dritte Tafel, $\mathfrak{T}_3$) zu Hilfe nehmen, welche gegen die gegebene Gerade (oder Ebene) so gestellt ist, wie wir es für wünschenswerth halten. Diese $\mathfrak{T}_3$ und die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) zusammen betrachten wir als ein neues Tafelsystem, in welchem wir die gegebenen Dinge nach den früheren Regeln bestimmen, und mittelst dessen wir die Aufgabe (in welcher nun die Gerade (oder Ebene) eine besondere ist) lösen. Schliesslich gehen wir noch auf das alte Tafelsystem zurück, d. h. wir suchen von allen gefundenen Punkten die Risse im alten Tafelsystem. Wir haben also zu zeigen, wie man aus dem alten System (aus $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bestehend) zum neuen ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) übergeht, und umgekehrt. Hiebei ist aber zu unterscheiden, ob die beiden Tafeln des neuen Systems ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) oder ($\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$) auf einander senkrecht stehen, also ein rechtwinkeliges System bilden wie die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, oder nicht. Es ist wohl jetzt schon leicht zu vermuthen, dass der Uebergang zum neuen Systeme leichter vor sich geht, wenn das neue Tafelsystem rechtwinkelig ist, dass es demnach wünschenswerth erscheint, wenn $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) ist.

Untersuchen wir daher, in welchen Fällen wir Veranlassung zur Annahme einer $\mathfrak{T}_3$ haben, und wie diese in den verschiedenen Fällen von selbst zu stehen kommt, oder gestellt werden kann.

61. Wird uns eine Aufgabe vorgelegt, die wir nur lösen können, wenn eine darin vorkommende Gerade parallel zu einer Tafel ist, während die gegebene Gerade A zu keiner der beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) parallel läuft, so nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, die zur Geraden A parallel ist. In diesem Falle ist also $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A)$. Ebenso wird es vorkommen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$, $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(A)$, $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ ist *). Es giebt aber noch eine Veranlassung zur Annahme einer $\mathfrak{T}_3$, wenn nemlich in der Aufgabe eine Gerade vorkommt, die in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene

*) Sollte $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$ sein, so wäre $\mathfrak{T}_3 \parallel$ einer Ebene, deren Stellung durch die Geraden A und B bestimmt ist. Auf diese Art kann man sich überzeugen, dass die $\mathfrak{T}_3$ nur eine von den 4 obengenannten Bedingungen zu erfüllen hat.

liegt. In diesem Falle können wir manche der bisherigen Aufgaben nicht lösen, weil ja bekanntlich die Lage einer solchen Geraden gegen andere Dinge (z B. ob ein Punkt in ihr liegt oder nicht) aus der Zeichnung gewöhnlich nicht erkannt werden kann. Wir nehmen deshalb ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) so an, dass die neue Kante, d. i. der Schnitt der $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht zur Geraden ist. Zu dem Ende ist es aber offenbar vollkommen genügend, wenn die $\mathfrak{T}_3$ nicht parallel zur $\mathfrak{T}_2$ ist; ausserdem können wir sie stellen, wie wir wollen. Wir werden daher in diesem Falle $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) annehmen.

Betrachten wir nun noch die vorhingenannten vier Fälle für die Annahme der $\mathfrak{T}_3$, nemlich:

2) $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A)$; 3) $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$; 4) $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$; 5) $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(A)$.

ad 2) Ist nichts weiter verlangt, als dass $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A)$, so können wir die $\mathfrak{T}_3$ so legen, dass sie die $\mathfrak{G}(A)$ enthält, und sie noch um die Gerade drehen; wir können und werden daher in diesem Falle die $\mathfrak{T}_3$ stets so annehmen, dass sie die $\mathfrak{G}(A)$ enthält und $\perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) steht.

ad 3) Soll $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$, also senkrecht auf einer Geraden der $\mathfrak{E}(abc)$ sein, so ist ihre Stellung noch nicht bestimmt, wir können daher noch die Bedingung hinzufügen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$); in diesem Falle ist $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$ und $\perp \mathfrak{T}_1$ also senkrecht auf der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$. Wir werden daher im vorliegenden Falle die $\mathfrak{T}_3$ stets senkrecht zur Spur eins (oder zwei) der $\mathfrak{E}(abc)$ annehmen, wodurch $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) wird.

ad 4) Soll $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ sein, so können wir die $\mathfrak{T}_3$ nur parallel verschieben, und damit den Winkel nicht ändern, den sie mit $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) einschliesst. Ist daher zufällig $\mathfrak{E}(abc) \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$), so ist auch $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$), ausserdem ist das System ($\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_1$) ein schiefwinkeliges. Wir wollen aber festsetzen, dass wenn $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ sein soll, wir stets $\mathfrak{T}_3 \mid \mathfrak{E}(abc)$ annehmen.

ad 5) Soll die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(A)$ sein, so ist dadurch wieder die Stellung der $\mathfrak{T}_3$ und damit ihr Winkel mit der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bestimmt. Es wird also im vorliegenden Falle $\mathfrak{T}_3$ in der Regel

nicht senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ sein. Ist aber zufällig $\mathfrak{S}(A) \parallel \mathfrak{T}_1$ (oder $\parallel \mathfrak{T}_2$), so ist auch $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$).

Man sieht demnach, dass unter den oben angeführten fünf Fällen der Annahme einer $\mathfrak{T}_3$ sich drei befinden, in denen wir stets $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) annehmen können, und daher annehmen werden; dass aber in den übrigen zwei Fällen im Allgemeinen $\mathfrak{T}_3$ nicht $\perp \mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ ist, wobei ausnahmsweise auch hier vorkommen kann, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$).

Wir wollen nun zeigen, wie in den beiden Fällen (wo $\mathfrak{T}_3$ senkrecht oder schief gegen $\mathfrak{T}_1$ steht) bei dem Uebergange vom alten System in's neue, und umgekehrt, verfahren wird.

62. Ist $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$, so nimmt man gleich die $\mathfrak{T}_1$ als die zweite Tafel des neuen (also rechtwinkigen) Systems an, und da von den gegebenen Punkten die $\mathfrak{R}_1$ und (weil die $\mathfrak{R}_2$ gegeben sind) die $\mathfrak{A}_1$ bekannt sind, so ist die Aufgabe, die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte zu finden, nach den im §. 1. aufgestellten Regeln zu lösen. Um aber diese Regeln so einzurichten, dass sie für den vorliegenden Fall passen, müssen wir noch angeben, dass wir die neue $\mathfrak{K}$, nemlich den Durchschnitt der $\mathfrak{T}_3$ mit der $\mathfrak{T}_1$ (oder, wenn $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$ ist, den Durchschnitt dieser beiden Tafeln) mit $\mathfrak{K}'$ (also einem $\mathfrak{K}$ mit einem Accente, d. i. mit einem rechts oben angebrachten Striche) bezeichnen und Kante prim nennen. Wir wollen ferner festsetzen, dass wir alle auf diese neue Kante ($\mathfrak{K}'$) bezüglichen Namen und Zeichen blos dadurch von denen im §. 1. festgestellten (auf die alte Kante $\mathfrak{K}$ bezüglichen) unterscheiden, dass wir den Namen das Wörtchen „prim" und den Zeichen einen Accent beifügen. So bedeuten $\mathfrak{K}\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$, $+\mathfrak{T}'_1$ etc. dasselbe für die $\mathfrak{K}'$, was $\mathfrak{K}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$, $+\mathfrak{T}$ etc. für die $\mathfrak{K}$. Ist in einer Aufgabe noch ein weiteres Tafelsystsm angenommen worden, so bezeichnen wir dessen Kante mit $\mathfrak{K}''$ (also mit zwei Accenten) und alle darauf bezüglichen Zeichen ebenfalls mit zwei Accenten, und fügen den Namen das Wörtchen „sekund" bei; z. B. $\mathfrak{K}\mathfrak{L}''$ (sprich: Kantenloth sekund). Eine fernere Kante wird mit $\mathfrak{K}'''$ (sprich: Kante terz) bezeichnet etc.

Es gelten demnach die im §. 1. aufgestellten Gesetze buchstäblich hieher, wenn man durchweg die dort aufgeführten Bezeichnungen mit Accenten versieht, den dort aufgeführten Namen das Wörtchen prim beifügt, und zugleich, wenn $\mathfrak{T}_3$ auf $\mathfrak{T}_1$ senk-

recht steht (und daher $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ die Tafeln des neuen Systems sind) 3 statt 2 setzt, während, wenn $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_2$ das neue System bilden, 3 statt 1 zu nehmen ist. Während wir also im $\mathfrak{S}(1,2,\mathfrak{K})$ *) einen $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$, eine $+\mathfrak{T}_1$, $+\mathfrak{T}_2$ etc. haben, werden wir im $\mathfrak{S}(1,3,\mathfrak{K}')$ eine $\mathfrak{O}'_1$ und $\mathfrak{O}'_3$, eine $+\mathfrak{T}'_1$, $+\mathfrak{T}'_3$ etc. dafür erhalten.

63. Denkt man sich die $\mathfrak{T}_1$, und darauf senkrecht die $\mathfrak{T}_2$ und die $\mathfrak{T}_3$, so ist der $\mathfrak{A}_1$ eines Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seiner $\mathfrak{O}_2$ und auch gleich seiner $\mathfrak{O}'_3$; demnach ist auch $\mathfrak{O}_2$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich $\mathfrak{O}'_3$. Ebenso ist, wenn $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$, die $\mathfrak{O}_1$ eines Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{O}'_3$. Wir haben daher den Satz:

Wenn die $\mathfrak{T}_3$ auf einer der alten Tafeln senkrecht steht, so ist die $\mathfrak{O}'_3$ eines Punktes ihrer Länge und ihrem Vorzeichen nach gleich der in derjenigen Tafel liegenden Ordinate dieses Punktes, mit welcher die $\mathfrak{T}_3$ das neue System nicht bildet.

Steht daher die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$, und sind a_2 und a_3 die $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ eines $\mathfrak{P}(a)$, so muss, wenn a_2 in der $+\mathfrak{T}_2$ liegt, a_3 in der $+\mathfrak{T}'_3$ **) sich befinden; es ist demnach durch a_3 bestimmt, welches die $+\mathfrak{T}'_3$ ist. Weiss man aber dies, so findet man auch durch Aufklappen der $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$, wo $+\mathfrak{T}'_1$ ist (s. 14.) Wir brauchten demnach kein Uebereinkommen darüber zu treffen, wie wir die $\mathfrak{T}_3$ umklappen, um zu erkennen, wo $+\mathfrak{T}'_3$ und $+\mathfrak{T}'_1$ ist; wir wollen aber dennoch festsetzen, dass wir die $\mathfrak{T}_3$ entweder so umklappen, dass 1) die beiden $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'$ eines jeden Punktes in eine Gerade fallen, oder 2) so, dass dies nicht der Fall ist und daher die $\mathfrak{K}'$ zweimal erscheint, einmal, durch Umklappen der $\mathfrak{T}_1$, in $\mathfrak{K}'_1$ und einmal, durch Umklappen der $\mathfrak{T}'_3$, in $\mathfrak{K}'_3$; in diesem Falle führen wir dann zugleich die Umklappung so aus, dass $\mathfrak{K}'_3$

---

*) Diese Bezeichnung soll bedeuten: System ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{K}$), oder das System, dessen Tafeln $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, und dessen Kante $\mathfrak{K}$ heisst.

**) Nach den oben (62.) gemachten Bemerkungen wird unter $+\mathfrak{T}'_3$ die positive dritte Tafel in Bezug auf die $\mathfrak{K}'$ zu verstehen sein. Es theilt nemlich die $\mathfrak{K}'$ die $\mathfrak{T}_3$ in zwei Theile, wovon einer die $+\mathfrak{T}'_3$, der andere die $-\mathfrak{T}'_3$ genannt wird.

mit $\mathfrak{K}_2$ zusammenfällt, und hinter $\mathfrak{K}'_3$ die $+ \mathfrak{T}'_3$ liegt. Steht aber die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$, so klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ so um, dass $\mathfrak{K}'_3 \mid \mathfrak{K}_1$ und vor $\mathfrak{K}'_3$ die $+ \mathfrak{T}'_3$ liegt.

Fig. 26. 64. Aufg. Wenn die $\mathfrak{T}_3$ auf einer alten Tafel, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, senkrecht steht, aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines beliebigen Punktes den $\mathfrak{R}_3$ und aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ den $\mathfrak{R}_2$ zu finden.

Aufl. 1. Hat man (Fig. a.) die Tafeln nach 1) der vorigen Nr. umgeklappt, so dass die $\mathfrak{K}'$ durch Umklappung der $\mathfrak{T}_3$ nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, so liegt der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) in der aus a_1 zur $\mathfrak{K}'_3$ gefällten Senkrechten (12.), und ist (nach 63. Satz) $a'_3 a_3 = a_2 a_2$. Aber auf welcher Seite der $\mathfrak{K}'_3$ der Punkt a_3 angenommen wird, steht uns noch frei, da wir noch nicht gesagt haben, wo die $+ \mathfrak{T}'_3$ liegt. Haben wir aber a_3 angenommen, so ist auch damit bestimmt, dass auf der Seite von $\mathfrak{K}'_3$, wo a_3 liegt, die $+ \mathfrak{T}'_3$ ist, da auch a_2 in der $+ \mathfrak{T}_2$ sich befindet. Hat man nun den $\mathfrak{R}_3$ eines Punktes b zu finden, dessen $\mathfrak{R}_2$ in der $- \mathfrak{T}_2$ liegt, so wird man ähnlich wie beim $\mathfrak{P}$(a) verfahren; nur wird man b_3 in der $- \mathfrak{T}'_3$ annehmen müssen. Sind ferner von einem $\mathfrak{P}$(c) die Risse c_1, c_3 gegeben, so liegt c_2 in der aus c_1 zur $\mathfrak{K}_2$ gefällten Senkrechten, und ist (wieder nach 63. Satz) $c_2 c_2 = c'_3 c_3$ und liegt c_2 in der $+ \mathfrak{T}_2$, da auch c_3 in der $+ \mathfrak{T}'_3$ liegt.

Aufl. 2. Klappt man die Tafeln so um, dass die $\mathfrak{K}'$ mit der $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{K}'_1$ und mit der $\mathfrak{T}_3$ nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, und daher, nach der oben (63.) getroffenen Uebereinkunft, die $+ \mathfrak{T}'_3$ hinter der $\mathfrak{K}'_3$ liegt, so findet man aus den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_1$ (a'_1, b'_1, c'_1) die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ (a'_3, b'_3, c'_3) der Punkte a, b, c ganz so, wie dies früher (14.) auseinandergesetzt worden ist, und es gelten wieder die dort aufgestellten Gesetze buchstäblich hieher, wenn wir statt $\mathfrak{Ab}_1$, $\mathfrak{Ab}_2$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ setzen: $\mathfrak{Ab}'_1$, $\mathfrak{Ab}'_3$ $\mathfrak{U}'_1$, $\mathfrak{U}'_3$. Zieht man nun die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ der Punkte a, b, c und trägt darauf von den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ aus die $\mathfrak{O}_2$ der entsprechenden Punkte auf (63. Satz) und zwar in der $+$ oder $- \mathfrak{T}'_3$, je nachdem der $\mathfrak{R}_2$ in der $+$ oder $- \mathfrak{T}_2$ liegt, so erhält man die $\mathfrak{R}_3$ (a_3, b_3, c_3). Sind umgekehrt c_1 und c_3 der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ eines $\mathfrak{P}$(c) (damit sie dies sein können, müssen die $\mathfrak{Ab}'_1$ und $\mathfrak{Ab}'_3$ dieses Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach einander gleich sein (14. Satz)), so liegt c_2 in der aus c_1 zur $\mathfrak{K}_2$ gefällten Senkrechten, und muss $c_2 c_2 = c'_3 c_3$ sein und c_2 in der $+ \mathfrak{T}_2$ liegen, da c_3 in der $+ \mathfrak{T}'_3$ sich befindet.

Denkt man sich noch die $\mathfrak{T}_3$ verschoben, bis die $\mathfrak{KR}'_1$ (a'_1, b'_1, c'_1) auf die entsprechenden $\mathfrak{KR}'_3$ (a'_3, b'_3, c'_3) fallen, so wird man sich überzeugen, dass die $+ \mathfrak{T}'_1$ auf der Seite der $\mathfrak{K}'_1$ liegt, auf welcher a_1, b_1 sich befinden. Denn es gilt natürlich auch für das neue Tafelsystem der Satz, dass, wenn die beiden Tafeln so umgeklappt werden, dass man sie um ihre Kante dreht, bis sie in einer Ebene liegen, und die Zeichnungen sichtbar sind, die beiden positiven Tafeln auf verschiedenen Seiten der Kante erscheinen.

Anm. Wir überlassen es dem Schüler, die vorliegende Aufgabe für den Fall zu lösen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$.

65. Ist die $\mathfrak{T}_3$ auf keiner alten Tafel senkrecht, so ist das Tafelsystem, das sie mit $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) bildet, ein schiefwinkeliges. Wir nennen auch hier die Kante des neuen Systems $\mathfrak{K}'$. Ferner nennen wir auch hier einen der beiden Theile, in welche die $\mathfrak{T}_3$ von der $\mathfrak{K}'$ getheilt wird, die $+ \mathfrak{T}'_3$ oder $- \mathfrak{T}'_3$, je nachdem der Theil in dem $+$ oder $-$ Raum der $\mathfrak{T}_1$, die Theile der $\mathfrak{T}_1$ die $+ \mathfrak{T}'_1$ oder $- \mathfrak{T}'_1$, je nachdem der Theil in dem $+$ oder $-$ Raum der $\mathfrak{T}_3$ liegt. Um nun die $\mathfrak{T}_3$ vollständig zu bestimmen, zeichnen wir in unserem Blatte den Winkel, den die $+ \mathfrak{T}'_1$ mit der $+ \mathfrak{T}'_3$ einschliesst. Diesen Winkel, den die beiden positiven Tafeln eines schiefwinkeligen Systems mit einander bilden, bezeichnen wir mit α', α'', α''' etc., je nachdem die Kante, an welcher der Winkel gebildet wird, mit $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ etc. bezeichnet ist. Ehe wir nun zeigen, wie man mit Hilfe des $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes den $\mathfrak{R}_3$ findet, müssen wir erst die Gesetze feststellen, denen die Risse eines Punktes bei schiefwinkeligen Systemen unterworfen sind.

Denkt man sich daher von einem $\mathfrak{P}$(a) ein $\mathfrak{L}_1$ und ein $\mathfrak{L}_3$ auf die beiden Tafeln gefällt, welche diese in den Punkten a_1, a_3 (dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(a)) schneiden, so liegen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_3$ in einer auf der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ senkrechten Ebene ($\mathfrak{LE}'$), welche die $\mathfrak{K}'$ in einem $\mathfrak{P}$(a') schneidet, den wir ebenfalls den $\mathfrak{KR}'$ des $\mathfrak{P}$(a) nennen. Zieht man nun $a'a_1$ und $a'a_3$, so stehen diese Linien (das $\mathfrak{KL}'_1$ und $\mathfrak{KL}'_3$) auf der $\mathfrak{K}'$ senkrecht, und es gilt daher auch für das schiefe System der schon früher für das rechtwinkelige entwickelte Satz:

Die Kantenlothe eines Punktes treffen die Kante in einem und demselben Punkte, dem Kantenrisse.

Es können also auch die beiden Tafeln eines schiefwinkeligen Systems so umgeklappt werden, dass

1) *die beiden* $\mathfrak{KL}'$ *eines Punktes in eine Gerade fallen*, oder
2) dass dies nicht der Fall ist, und dann *müssen die* $\mathfrak{Ab}'_1$ *und die* $\mathfrak{Ab}'_3$ *eines Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach gleich sein.*

Dagegen bilden die in der $\mathfrak{LE}'$ des $\mathfrak{P}$(a) liegenden $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{KL}'_1$, $\mathfrak{KL}'_3$ kein Rechteck, sondern eine andere Figur, deren Construction wir kennen lernen wollen.

Anm. Wir wollen von nun an die in dieser Nr. angeführten für jedes Tafelsystem möglichen beiden Umklappungen dadurch bezeichnen, dass wir die unter 1) aufgeführte die *erste Umklappungsart*, die unter 2) die *zweite Umklappungsart* nennen. Ferner wollen wir die Umklappung, in welcher man um die Kante dreht, bis beide Tafeln in eine Ebene fallen, wobei *die beiden* positiven *Tafeln* auf verschiedenen *Seiten der Kante erscheinen*, die *einfachste* Umklappungsart nennen.

Fig. 27. c 66. Wir finden die in der $\mathfrak{LE}'$ eines Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}$(a), liegende von den $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{KL}'_1$, $\mathfrak{KL}'_3$ gebildete Figur, indem wir die $\mathfrak{LE}'$ mit der in ihr liegenden Figur auf unser Blatt umklappen, und die Figur, die im Allgemeinen ein Viereck ist, zeichnen. Wir werden diese dann die *Nebenfigur* des $\mathfrak{P}$(a) nennen, und die Ecken derselben gerade so bezeichnen, wie sie vor ihrer Umklappung bezeichnet waren. Diese Ecken sind aber der $\mathfrak{P}$(a) sein $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{KR}'$, die also mit a_1, a_3 und a' bezeichnet sind. Die Seiten dieser Figur aa_1, aa_3, a_1a', a_3a' sind der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$, die $\mathfrak{O}'_1$ und $\mathfrak{O}'_3$ des Punktes. Von den Winkeln ist der von $\mathfrak{O}'_1$ und $\mathfrak{O}'_3$ gebildete der $\wedge \alpha'$, der von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{O}'_1$ so wie der von $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{O}'_3$ gebildete ist ein rechter. Um aber auch bei der Construction dieser Nebenfigur die Vorzeichen der ihre Seiten bildenden Längen richtig zu benützen, wollen wir zunächst Folgendes bemerken. Die $\mathfrak{LE}'$ eines jeden Punktes schneidet die $\mathfrak{T}_1$ nach einer Geraden, die wir das $\mathfrak{KL}'_1$ genannt haben,

und welche durch den in ihr liegenden $\mathfrak{KN}'$ des Punktes in zwei Theile getheilt wird, von denen der in der $+\mathfrak{T}'_1$ liegende Theil das $+\mathfrak{KL}'_1$, der in der $-\mathfrak{T}'_1$ das $-\mathfrak{KL}'_1$ heissen mag. Eben so schneidet die $\mathfrak{LE}'$ die $\mathfrak{T}_3$ nach einer Geraden, dem $\mathfrak{KL}'_3$, welche durch den $\mathfrak{KN}'$ in ein $+\mathfrak{KL}'_3$ und in ein $-\mathfrak{KL}'_3$ getheilt wird. Es bilden daher $+\mathfrak{KL}'_1$ und $+\mathfrak{KL}'_3$ den Winkel, den die $+\mathfrak{T}'_1$ mit der $+\mathfrak{T}'_3$ einschliesst (Anh. 44) also den $\wedge\alpha'$. Ferner theilt das $\mathfrak{KL}'_1$ die $\mathfrak{LE}'$ in zwei Theile, von denen einer im $+$ Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegt und daher das $+\mathfrak{KL}'_3$ enthält, während der andere das $-\mathfrak{KL}'_3$ enthaltende im $-$ Raum der $\mathfrak{T}_1$ sich befindet. Ist nun α' der Winkel, den die $+\mathfrak{T}'_1$ mit der $+\mathfrak{T}'_3$ einschliesst, so können wir die $\mathfrak{LE}'$ so umklappen, dass das $+\mathfrak{KL}'_1$ und $+\mathfrak{KL}'_3$ auf die Schenkel und daher der $\mathfrak{KN}'$ auf den Scheitel des in unserem Blatte gezeichneten $\wedge\alpha'$ fällt. Kommt dann der in der $\mathfrak{LE}'$ liegende $\mathfrak{P}(a)$ nach a, so kommt sein $\mathfrak{R}_1$ nach a_1, sein $\mathfrak{R}_3$ nach a_3 und ist daher aa_1 sein $\mathfrak{A}_1$, aa_3 sein $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{a}'a_1$ seine $\mathfrak{O}'_1$, $\mathfrak{a}'a_3$ seine $\mathfrak{O}'_3$. Ferner ist $\mathfrak{A}_1$ $+$ oder $-$, je nachdem a mit $+\mathfrak{KL}'_3$ oder mit $-\mathfrak{KL}'_3$ auf einer Seite des $\mathfrak{KL}'_1$ liegt; es ist $\mathfrak{A}_3$ $+$ oder $-$, je nachdem a mit $+\mathfrak{KL}'_1$ oder mit $-\mathfrak{KL}'_1$ auf einer Seite von $\mathfrak{KL}'_3$ liegt; $\mathfrak{O}'_1$ ist $+$ oder $-$, je nachdem a_1 im $+$ oder $-$ $\mathfrak{KL}'_1$ und $\mathfrak{O}'_3$ ist $+$ oder $-$, je nachdem a_3 im $+$ oder $-$ $\mathfrak{KL}'_3$ liegt.

67. Nun können wir die Aufgabe lösen: Es sind mehrere Punkte a, b, c gegeben; man soll ihre $\mathfrak{R}_3$ auf einer $\mathfrak{T}_3$ finden, welche die $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{K}'_1$ schneidet, und so gestellt ist, dass die $+\mathfrak{T}'_3$ mit der $+\mathfrak{T}'_1$ den $\wedge\alpha'$ (Fig. c.) bildet, und auf der Seite der $\mathfrak{K}'$, in welcher sich a_1 befindet, die $+\mathfrak{T}'_1$ liegt. Fig. 27.

Aufl. 1. Wählen wir die einfachste Umklappungsart, so liegen die $\mathfrak{R}_3$ der gegebenen Punkte in den aus ihren $\mathfrak{R}_1$ zu $\mathfrak{K}'$ gezogenen Senkrechten und man hat nur noch die $\mathfrak{O}'_3$ dieser Punkte zu suchen. Klappen wir daher die $\mathfrak{LE}'$ des $\mathfrak{P}(a)$ so um, dass das $+\mathfrak{KL}'_1$ und $+\mathfrak{KL}'_3$ auf die Schenkel des $\wedge\alpha'$ (Fig. c.) fallen, so kommt $\mathfrak{a}'$ (Fig. a.) nach $\mathfrak{a}'$ (Fig. c.), $\mathfrak{a}'a_1$ nach $\mathfrak{a}'a_1$, das $\mathfrak{L}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$ nach a_1a, und der $\mathfrak{P}(a)$ nach a so, dass aa_1 gleich dem $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$, also gleich $\mathfrak{a}_2a_2$ ist, und dass, weil der $\mathfrak{P}(a)$ in dem $+$ Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt, a mit dem $+\mathfrak{KL}'_3$ auf einer Seite des $\mathfrak{KL}'_1$ sich befindet. Zieht man nun $aa_3 \perp \mathfrak{KL}'_3$, so ist $aa_1\mathfrak{a}'a_3$ die Nebenfigur und $\mathfrak{a}'a_3$ die $\mathfrak{O}'_3$ und zwar hier

positiv, da a_3 in dem $+\mathfrak{KL}'_3$ erscheint; trägt man daher diese $\mathfrak{O}'_3$ von $\mathfrak{a}'$ aus in der $+\mathfrak{T}'_3$ auf das $\mathfrak{KL}'_3$ (Fig. a.), so erhält man den $\mathfrak{R}_3(a_3)$ des $\mathfrak{P}(a)$, dessen $\mathfrak{A}_3 = aa_3$ der Nebenfigur und hier positiv ist (letzteres, weil a mit der $+\mathfrak{KL}'_1$ auf einer Seite von $\mathfrak{KL}'_3$ liegt). In ähnlicher Art verfährt man, um b_3 und den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(b)$ zu erhalten, nur ist die $\mathfrak{O}'_1$ und der $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(b)$ negativ; eben so mit dem $\mathfrak{P}(c)$, nur ist hier die Nebenfigur ein überschlagenes Viereck (in welchem zwei Seiten sich gegenseitig durchschneiden); ebenso mit dem $\mathfrak{P}(d)$, nur ist sein $\mathfrak{A}_3 = 0$, da er, wie man aus Fig. c. sieht, mit seinem a_3 zusammenfällt.

Aufl. 2. Klappt man die Tafeln so um, dass die $\mathfrak{K}'$ zweimal, in $\mathfrak{K}'_1$ und in $\mathfrak{K}'_3$ erscheint, so werden die $\mathfrak{KR}'_3$ der Punkte a, b, c nemlich $\mathfrak{a}'_3$, $\mathfrak{b}'_3$, $\mathfrak{c}'_3$ (Fig. b.), aus ihren $\mathfrak{KR}'_1$ so gefunden, wie in 14. angegeben worden ist (s. 65.), und fällt aus bekannten Gründen die $+\mathfrak{T}'_3$ auf die Seite von $\mathfrak{K}'_3$, in welcher der Punkt a_3 liegt. Weiss man nun aber die $\mathfrak{KR}'_3$ der Punkte, und wo $+\mathfrak{T}'_3$ und $-\mathfrak{T}'_3$ ist, so darf man nur auf die $\mathfrak{KL}'_3$ die entsprechenden $\mathfrak{O}'_3$ auftragen, welche letztere nebst den $\mathfrak{A}_3$ ganz so wie in Aufl. 1. gefunden werden.

Fig. 27. 68. Wir haben oben bemerkt, dass die Nebenfigur eines Punktes a im Allgemeinen ein Viereck ist, dessen Ecken a, a_1, a_3, $\mathfrak{a}'$ sind. Es ist aber leicht einzusehen, dass wenn zufällig zwei von diesen vier Ecken zusammenfallen, eine Seite des Vierecks verschwindet, und demnach als Nebenfigur ein Dreieck bleibt, und zwar ein rechtwinkeliges, da von dem Viereck, das zwei rechte Winkel enthielt, nur ein Winkel verschwunden ist, also ein rechter noch übrig geblieben ist. Es kann auch kommen, dass ausnahmsweise die vier Ecken des Viereckes in einen Punkt zusammenfallen (die ganze Figur also verschwindet), wenn nemlich der Punkt a in der $\mathfrak{K}'$ liegt.

Von den ebengenannten Fällen wollen wir einen einer besonderen Betrachtung unterziehen, den nemlich, in welchem der Punkt in der $\mathfrak{T}_3$ liegt, wie der $\mathfrak{P}(d)$ in unserer Figur. Hier fällt d_3 mit d zusammen (wir haben daher den Buchstaben d_3 weggelassen) und die Nebenfigur ist daher das rechtwinkelige Dreieck $dd_1\mathfrak{a}'$, dessen Seiten $\mathfrak{a}'d_1$, d_1d, $\mathfrak{a}'d$ die $\mathfrak{O}'_1$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{O}'_3$ des Punktes d vorstellen, und in welchem der $\wedge\,\mathfrak{a}'$ (Fig. 27. c.)

oder sein Supplement, wenn (Fig. 27. d.) der $\wedge \alpha'$ stumpf ist, dem $\mathfrak{A}_1$ gegenüber liegt. Erscheint hier d und das damit zusammenfallende d_3 im $+\mathfrak{KL}'_3$ (wie in unserer Zeichnung) so liegt der Punkt in der $+\mathfrak{T}'_3$ also auch im $+$ Raum der $\mathfrak{T}_1$; demnach ist sein $\mathfrak{O}'_3$ und $\mathfrak{A}_1$ positiv. Liegt aber d im $-\mathfrak{KL}'_3$, so sind $\mathfrak{O}'_3$ und $\mathfrak{A}_1$ gleichzeitig negativ. Es haben also $\mathfrak{O}'_3$ und $\mathfrak{A}_1$ des Punktes gleiche Vorzeichen. Ist noch ausserdem der $\wedge \alpha'$ ein spitzer Winkel, so sieht man leicht ein, dass wenn (in der Nebenfigur des Punktes d) d_1 im $+\mathfrak{KL}'_1$ liegt, auch d im $+\mathfrak{KL}'_3$ erscheint, und demnach die durch die drei Seiten der dreiseitigen Nebenfigur vertretenen Längen ($\mathfrak{O}'_1$, $\mathfrak{O}'_3$, $\mathfrak{A}_1$) gleichzeitig positiv sind. In ähnlicher Weise kann man sich überzeugen, dass unter derselben Voraussetzung für den $\wedge \alpha'$ diese drei Längen gleichzeitig negativ werden. Wir haben also die Sätze:

1) Bilden die beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) des neuen Tafelsystems den schiefen Winkel α', und liegt ein $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{T}_1$, so ist seine Nebenfigur ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die den $\mathfrak{A}_1$ vorstellende Kathete dem $\wedge \alpha'$ oder seinem Supplementswinkel gegenüber liegt, und haben $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{O}'_3$ gleiche Vorzeichen;
2) ist der $\wedge \alpha'$ spitz, so haben die drei Seiten des Dreiecks gleiche Vorzeichen;
3) sind demnach die $\mathfrak{K}'$ und ein $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{T}_3$ (also auch sein $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{O}'_1$) bekannt, so hat man von der (dreiseitigen) Nebenfigur des $\mathfrak{P}$(d) zwei Seiten (nemlich seine beiden Katheten) und damit das ganze Dreieck. Daraus bestimmt sich der $\wedge \alpha'$; denn dieser steht entweder derjenigen Kathete des Dreiecks, welchen den $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(d) vorstellt, gegenüber, oder ist dessen Supplementswinkel, je nachdem α' spitz oder stumpf ist, d. h. je nachdem d_1 im $+\mathfrak{KL}'_1$ (also in der $+\mathfrak{T}'_1$) oder im $-\mathfrak{KL}'_1$ (also in der $-\mathfrak{T}'_1$) liegt.

69. Hat man umgekehrt aus dem $\mathfrak{N}_3$ und $\mathfrak{A}_3$ eines Punktes Fig. 27.
z. B. des $\mathfrak{P}$(c) den $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zu finden (d. h. aus dem neuen Tafelsystem in's alte zurückzugehen), so wird man zunächst aus dem $\mathfrak{KL}'_3$ des Punktes das $\mathfrak{KL}'_1$ bestimmen (das entweder, bei der

einfachsten oder ersten Umklappungsart, mit $\mathfrak{KL}'_3$ zusammenfällt, oder, bei der zweiten Umklappungsart, dadurch gefunden wird, dass man die $\mathfrak{Ab}'_1 = \mathfrak{Ab}'_3$ macht) und dann die auf das $\mathfrak{KL}'_1$ aufzutragende $\mathfrak{O}'_1$ mittelst der Nebenfigur aufsuchen. Zu dem Ende trägt man auf das $\mathfrak{KL}'_3$ (der Nebenfigur 27.c.) die (aus Fig. 27.a. zu entnehmende) $\mathfrak{O}'_3$, wodurch man c_3 erhält; errichtet man nun in c_3 eine Senkrechte zum $\mathfrak{KL}'_3$ (das $\mathfrak{L}_3$) und trägt darauf die als gegeben vorausgesetzte Länge des $\mathfrak{A}_3$ nach c_3c (das hier negativ aufgetragen ist, weil wir den $\mathfrak{A}_3$ als negativ voraussetzen), so kann man die Nebenfigur vollenden, wenn man noch $cc_1 \perp \mathfrak{KL}'_1$ zieht. Man erhält dadurch die gesuchte $\mathfrak{O}'_1$ (nemlich $a'a_1$ der Nebenfigur).

Anm. Liegt der Punkt in der $\mathfrak{T}_3$, ist also sein $\mathfrak{A}_3 = 0$, so bleibt das Verfahren dasselbe, nur ist die Nebenfigur ein rechtwinkeliges Dreieck.

Fig. 27. 70. Obgleich wir gezeigt haben, wie man auch mittelst eines schiefwinkeligen Tafelsystems Punkte bestimmen kann, so dürfen wir doch für die praktische Anwendung nur rechtwinkelige Tafelsysteme benützen; wir müssen daher, wenn die $\mathfrak{T}_3$ auf keiner alten Tafel senkrecht steht, und dieselbe nicht blos vorübergehend (als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe) angenommen ist, sondern bleibend beibehalten werden soll, noch eine auf der $\mathfrak{T}_3$ senkrechte Tafel (wir wollen sie $\mathfrak{T}_4$ und ihren Schnitt mit der $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{K}''$ nennen) annehmen, und nach deren Umklappung die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte zeichnen. Hiebei hat man dann ganz genau dieselbe Aufgabe zu lösen, wie oben (64.), um aus den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ der Punkte die $\mathfrak{R}_3$ zu finden, wenn die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ ist. Es werden nur in den Benennungen Aenderungen eintreten müssen, indem in vorliegendem Falle die beiden Tafeln nicht $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, sondern $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ heissen, und auch die Kante der beiden Tafeln nicht mit $\mathfrak{K}'$, sondern mit $\mathfrak{K}''$ bezeichnet ist. Diese $\mathfrak{T}_4$ nehmen wir natürlich so an, dass sie gegen die gegebenen Geraden und Ebenen eine möglichst bequeme Lage einnimmt.

a) Klappen wir nun (Fig. a.) die Tafeln so um, dass sie die $\mathfrak{K}''$ gemein behalten, so liegen die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte a, b, c in den aus ihren $\mathfrak{R}_3$ zur $\mathfrak{K}''$ gefällten Senkrechten a_3a_4, b_3b_4 und ist die $\mathfrak{O}''_4$ ($a''a_4$) gleich dem $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(a); da dieser $= aa_3$. (Fig. c.) und positiv ist (s. 66.), so wird, wenn man $a''a_4 = aa_3$

macht, und wie in Fig. a. aufträgt, a_4 der $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{P}$(a) und zugleich ausgesprochen sein, dass auf der Seite von $\mathfrak{K}''$, wo a_4 liegt, die $+\mathfrak{T}_4''$ und daher auf der anderen Seite der $\mathfrak{K}''$ die $+\mathfrak{T}_3''$ sich befindet. Hat man daher vom $\mathfrak{P}$(b) den $\mathfrak{R}_4$ zu suchen, so wird man $\mathfrak{b}''b_4 = bb_3$ machen und, da der $\mathfrak{A}_3$ von b negativ ist, b_4 in der $-\mathfrak{T}_4''$ annehmen, während der $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{P}$(c) in der $-\mathfrak{T}_4''$ und der des $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{K}''$ liegt.

b) Klappt man (wie in Fig. b.) die Tafeln so um, dass $\mathfrak{K}''$ zweimal erscheint, einmal mit der $\mathfrak{T}_3$ in $\mathfrak{K}_3''$, und einmal mit der $\mathfrak{T}_4$ in $\mathfrak{K}_3''$, so wird man aus $\mathfrak{a}_3''$, $\mathfrak{b}_3''$, $\mathfrak{c}_3''$, $\mathfrak{d}_3''$ die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_4''$ ($\mathfrak{a}_4''$, $\mathfrak{b}_4''$, $\mathfrak{c}_4''$, $\mathfrak{d}_4''$), und die Seite von $\mathfrak{K}_4''$, auf welcher die $+\mathfrak{T}_4''$ liegt, nach den in Num. 13. und 14. aufgestellten Regeln finden, und zur Aufsuchung von a_4, b_4, c_4, d_4 wie vorhin verfahren.

Anm. 1. Wir haben hier gezeigt, wie man die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte für irgend eine auf der $\mathfrak{T}_3$ senkrechten $\mathfrak{T}_4$ auffindet. Eine solche besondere $\mathfrak{T}_4$ nehmen wir immer an, wenn es sich darum handelt, sie so zu wählen, dass sie gegen die gegebenen Dinge eine besonders günstige Stellung einnehmen soll. Ist es aber gleichgültig, welche Stellung die $\mathfrak{T}_4$ gegen die $\mathfrak{T}_3$ hat und nur verlangt, dass die $\mathfrak{T}_4 \perp \mathfrak{T}_3$ ist, so lässt sich die Sache viel einfacher machen. In diesem Falle giebt, wie man sich leicht überzeugen kann, die sämmtliche Nebenfiguren enthaltende Fig. 27. c. die $\mathfrak{R}_4$ aller Punkte an. Man darf zu dem Ende nur irgend ein $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ (z. B. das des Punktes a der Fig. 27. a) als die $\mathfrak{K}_3''$ und das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ der Fig. 27. c. als $\mathfrak{K}_4''$ ansehen, so wird man finden, dass die in dieser Figur mit den Buchstaben a, b, c (also mit Buchstaben ohne Ziffer) bezeichneten Punkte die $\mathfrak{R}_4$ dieser Punkte sind. Man wird daher, wenn die Fig. 27. c. als $\mathfrak{R}_4$ des gegebenen Gebildes angesehen werden soll, statt der Buchstaben a, b, c etc. die a_4, b_4, c_4 etc., $\mathfrak{K}_4''$ statt $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ schreiben und die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ mit den darin liegenden Punkten und Buchstaben und den darauf senkrechten Linien weglöschen.

Anm. 2. Liegen alle Punkte der Aufgabe in der $\mathfrak{T}_3$, dann brauchen wir natürlich eine $\mathfrak{T}_4$ nicht beizufügen.

71. Hat man umgekehrt den $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ eines $\mathfrak{P}$(c) und Fig. 27.
soll man dessen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ finden, so wird man denselben Weg zurück machen müssen, den man, um aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}$(c) den $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ zu finden, vorwärts machen muss.

a) Sind die Tafeln wie in Fig. a. umgeklappt worden, so ist c_3c' die $\mathfrak{O}'_3$ und muss sie, da diese $+$ ist, (in Fig. c.) von a' aus auf das $+ \mathfrak{KL}'_3$ aufgetragen werden; ferner ist $c''c_4$ die $\mathfrak{O}''_4$ des $\mathfrak{P}$(c), und muss sie, da diese negativ, (weil in der $- \mathfrak{T}''_4$) und gleich dem $\mathfrak{A}_3$ ist, nach c_3c und zwar so getragen werden, dass c mit dem $- \mathfrak{KL}'_1$ auf einer Seite von $\mathfrak{KL}'_3$ liegt (s. 66). Zieht man nun cc_1, so erhält man durch $a'c_1$ die $\mathfrak{O}'_1$ des $\mathfrak{P}$(a), und ist diese $+$, weil c_1 in dem $+ \mathfrak{KL}'_1$ liegt; ferner durch cc_1 den $\mathfrak{A}_1$, welcher gleich der $\mathfrak{O}_2$ des $\mathfrak{P}$(c), und hier $+$ ist, weil c mit der $+ \mathfrak{KL}'_3$ auf einer Seite von $\mathfrak{KL}'_1$ liegt. Zieht man daher aus c_3 eine Senkrechte zur $\mathfrak{K}'$ und trägt darauf die $\mathfrak{O}'_1$ von c' aus in der $+ \mathfrak{T}'_1$ auf, so erhält man c_1; zieht man dann c_1c_2 $\perp$ $\mathfrak{K}$ und trägt von c_2 aus die $\mathfrak{O}_2$ in der $+ \mathfrak{T}_2$ auf, so erhält man c_2.

b) Sind die Tafeln wie in Fig. b. umgeklappt, so verfährt man ähnlich so, wie in Fig. a., nur muss man aus dem $\mathfrak{KM}'_3$ den $\mathfrak{KM}'_1$ mit Hilfe der in Num. 14. aufgestellten Regeln aufsuchen.

72. Wir haben bisher gezeigt, wie man für das schiefwinkelige Tafelsystem vom alten System in's neue, und umgekehrt, übergeht, wenn die $\mathfrak{K}'$ und der $\wedge\ \alpha'$ gegeben sind. Die Fälle, in denen wir auf ein derartiges Tafelsystem geführt werden, sind aber der Art, dass diese Dinge nicht gegeben sind, sondern aus den gegebenen Bedingungen erst gesucht werden müssen; wir haben daher zu zeigen wie dies zu geschehen hat.

Wie schon früher gezeigt wurde, kommen wir auf eine $\mathfrak{T}_3$, die auf keiner alten Tafel senkrecht steht in zwei Fällen, wenn entweder die $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}$(abc) oder $\perp$ $\mathfrak{G}$(A) sein soll. Ist nun

1) $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}$(abc) und lassen wir, wie früher festgesetzt, $\mathfrak{T}_3$ | $\mathfrak{E}$(abc), und nehmen diese $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$ zu einem Systeme zusammen, so ist die $\mathfrak{K}'$ (der Schnitt der $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$) offenbar nichts anderes als die S p u r e i n s der $\mathfrak{E}$(abc). Hat man sich nun durch Aufsuchung der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) die $\mathfrak{K}'$ verschafft, und will man noch den $\wedge\ \alpha'$ erhalten, so braucht man dazu nur die Nebenfigur eines der Punkte a, b, c zu zeichnen. Diese Nebenfigur ist ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Seiten die $\mathfrak{O}'_1$, die $\mathfrak{O}'_3$ und den $\mathfrak{A}_1$ des Punktes vorstellen, und in welchem der dem $\mathfrak{A}_1$ gegenüber liegende Winkel der $\wedge\ \alpha'$ s e l b s t, oder sein S u p p l e m e n t ist, je nachdem $\mathfrak{O}'_1$ und $\mathfrak{A}_1$ g l e i c h e oder

ungleiche Vorzeichen haben. Ist man aber so in den Besitz von $\mathfrak{K}'$ und $\wedge \alpha'$ gelangt, so kann man nun mit Hilfe der obigen Regeln für alle weiteren Punkte aus dem alten System in's neue, und umgekehrt, übergehen.

2) Ist die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}$(ab) und bilden $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ das neue Tafelsystem, so ist die $\mathfrak{K}'$ (der Schnitt der $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$, also die Spur eins der $\mathfrak{T}_3$) $\perp$ a_1b_1. Um nun den $\wedge \alpha'$ zu finden, sucht man die Nebenfiguren der *beiden* Punkte a und b. Diese beiden Nebenfiguren liegen in *einer* Ebene, da die beiden $\mathfrak{LE}'$ der Punkte a und b *zusammenfallen*. Klappt man nun diese gemeinschaftliche $\mathfrak{LE}'$ so in unser Blatt, dass a_1b_1 (Fig. a) nach ab_1 (Fig. b) kommt, so kommen die Punkte a, b im Raume nach a, b (der Fig. b), wenn man $b_1b = \mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(b) macht und bedenkt, dass in unserer Zeichnung das $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(a) = 0$ ist. Da aber ab ein $\mathfrak{L}_3$ ist (wir haben ja die $\mathfrak{T}_3 \perp$ ab angenommen), so muss in unserer Nebenfigur (Fig. b) $\mathfrak{KL}'_3 \perp$ ab werden, ausserdem durch a gehen (da der $\mathfrak{P}$(a) *in* der $\mathfrak{K}'$ liegt). Man hat demnach den (von dem $+\, \mathfrak{KL}'_1$ und $+\, \mathfrak{KL}'_3$ gebildeten Winkel) $\wedge \alpha'$ gefunden und kann nach den früheren Regeln die $\mathfrak{R}_3$ aller gegebenen Punkte finden. Fig. 34.

73. Es giebt Fälle, in denen es vortheilhaft ist, die Risse der gegebenen Punkte, Geraden und Ebenen nach einem anderen Systeme, als es bisher geschehen, aufzusuchen, und zwar so, dass man die Linien, welche man durch die Punkte legt, um ihre Risse in einer Tafel zu finden, nicht wie bisher *senkrecht* zu dieser Tafel macht, sondern, dass man sie entweder

a) alle parallel zu einer gegebenen zu den Tafeln schiefen Geraden annimmt, und daher die Risse *schiefe Parallelrisse* oder schlechtweg Parallelrisse nennt, oder

b) dass man jene Linien alle durch einen gegebenen Punkt (*Centrum*) gehen lässt, und daher die Risse *Centralrisse* heisst.

In beiden Fällen nennen wir die Geraden, welche man durch die Punkte legt, um ihre Risse zu finden, Strahlen ($\mathfrak{St}$) und die durch sie gefundenen Risse *Strahlenrisse*. Im Gegensatz zu diesen nennen wir die gewöhnlichen (durch Lothe gefundenen) Risse *Lothrisse*. Ist nur *ein* System von schiefen oder Centralrissen vorhanden, so nennen wir die Risse, zum Unterschied von den schon vorhandenen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, *Risse prim*

($\mathfrak{R}'$), und bezeichnen diese $\mathfrak{R}'$ mit denselben Buchstaben, wie die ihnen entsprechenden Punkte, versehen sie aber mit einem Accent; d. h. rechts oben mit einem Striche (z. B. a', sprich: a prim). Sind mehrere Systeme von Stahlenrissen vorhanden, so bezeichnen wir sie im ersten System mit einem Accent, im zweiten mit zwei Accenten (z. B. a'', sprich a sekund), im dritten mit drei Accenten (z. B. a''' sprich: a terz) u. s. f.

Als Tafel, auf welcher die Stahlenrisse erscheinen sollen, nehmen wir wo möglich eine der gegebenen Tafeln ($\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$) an. Meistens aber werden wir eine andere Ebene und zwar eine $\mathfrak{LE}_1$ oder $\mathfrak{LE}_2$ als solche Tafel ansehen, und sie dann $\mathfrak{T}'$ (sprich Tafel prim), $\mathfrak{T}''$ etc. nennen. In diesem Falle klappen wir gewöhnlich die $\mathfrak{T}'$ nicht um, und können wir daher die $\mathfrak{R}'$ nicht selbst zeichnen, sondern wir zeichnen von einem solchen Punkte (a' z. B.), der den $\mathfrak{R}'$ eines gegebenen $\mathfrak{P}$(a) vorstellt, seinen ersten und zweiten Riss, und nennen den ersteren $\mathfrak{R}'_1$ (sprich: $\mathfrak{R}$ prim eins) den letzteren $\mathfrak{R}'_2$ ($\mathfrak{R}$ prim zwei). Ebenso bezeichnen wir den $\mathfrak{R}'_1$ des $\mathfrak{P}$(a) mit a'_1 (sprich a prim eins), den $\mathfrak{R}'_2$ mit a'_2.

Fig. 28. 74. Aufg. Den schiefen oder Centralriss eines gegebenen Punktes zu finden.

Aufl. 1. Sollen (Fig. a.) alle $\mathfrak{St}'$ parallel zur $\mathfrak{G}$(A), und $\mathfrak{E}(B_2)$ die $\mathfrak{T}'$ sein, und ist der $\mathfrak{R}'$ eines $\mathfrak{P}$(a) zu finden, so hat man durch den $\mathfrak{P}$(a) eine $\mathfrak{St}'$, d. h. eine $\mathfrak{G}$(C) || A zu legen, und den Punkt a' zu suchen, in welchem die $\mathfrak{G}$(B) die $\mathfrak{T}'$ trifft; dieser Punkt ist der gesuchte $\mathfrak{R}'$, von dem wir also den ersten und zweiten Riss (a'_1, a'_2) zeichnen.

Aufl. 2. Sollen (Fig. b.) alle $\mathfrak{St}'$ durch den $\mathfrak{P}$(a) gehen, und ist der $\mathfrak{R}'$ eines $\mathfrak{P}$(b) zu finden, so muss man eine $\mathfrak{G}$(A) suchen, welche den gegebenen $\mathfrak{P}$(b) mit dem Centrum a verbindet; der Schnitt dieses $\mathfrak{St}'$ mit $\mathfrak{T}'$ (hier die $\mathfrak{E}(B_2)$) ist dann der gesuchte $\mathfrak{R}'$.

75. Da wir nicht annehmen können, dass die im §. 1. entwickelten Sätze, in welchen die $\mathfrak{St}$ als Lothe vorausgesetzt sind, für schiefe und Centralrisse gelten, so wollen wir hier diejenigen Sätze entwickeln, welche diesen Risssystemen entsprechen.

1) Liegt ein Punkt in der $\mathfrak{T}'$, so fällt sein $\mathfrak{R}'$ mit ihm selbst zusammen.

2) Wenn man sich durch alle Punkte einer Linie oder Fläche St′ gelegt denkt und deren R′ sucht, so ist der Inbegriff aller dieser R′ der R′ der Linie oder Fläche; daraus folgt, dass
3) der R′ eines in einer Raumgrösse liegenden Punktes, in dem R′ dieser Raumgrösse liegt, und dass
4) wenn ein Punkt in zwei Raumgrössen liegt, auch die R′ dieser Raumgrössen einen Punkt gemein haben müssen.
5) Der R′ eines Punktes ist der Durchschnitt seines St′ mit der T′.
6) Ist der R′ eines Punktes bekannt, so liegt dieser in dem St′, welcher durch den gegebenen R′ geht.
7) Ist ein St′ gegeben, und legt man durch einen beliebigen Punkt desselben einen St′, so fällt dieser mit dem gegebenen St′ zusammen; demnach ist der R′ eines St′ der Punkt, in welchem er (der St′) die T′ schneidet.
8) Ist eine Gerade kein St′, so liegen die St′ ihrer Punkte in einer Ebene (Strahlenebene, abg. StE′), die für die schiefen Risse parallel zu den St′, für die Centralrisse durch das Centrum geht; es ist daher der R′ einer Geraden A, die kein St′ ist, eine Gerade A′, nach welcher die StE′ der G(A) die T′ schneidet.
9) Man findet daher auch den R′ einer Geraden, die kein St′ ist, wenn man die R′ zweier Punkte derselben sucht, und durch eine Gerade verbindet.
10) Ist A′ der R′ einer G(A), so liegt diese in der durch A′ gehenden StE′; (diese ist ausserdem bei dem schiefen Risssystem parallel zu den St′, und geht bei dem Centralrisssystem durch das Centrum).
11) Liegen Gerade in der T′, so fallen sie mit ihren R′ zusammen.
12) Ist eine Gerade A parallel zur T′, so schneidet ihre StE′ die T′ nach einer Geraden A′, die ∥ G(A) (Anh. 29.) Es

ist demnach eine zur 𝔗′ parallele Gerade parallel zu ihrem 𝔑′.

13) Geht eine Ebene durch das Centrum (für Centralrisse), oder ist sie (beim schiefen Risssystem) paralel zu den St′, so fallen alle St′ ihrer Punkte in sie selbst, und ist daher ihr 𝔑′ eine Gerade A′, und zwar die, nach welcher die Ebene die 𝔗′ schneidet. Wir nennen diese Ebene eine St𝔈′ und bezeichnen sie als Ebene A′ (𝔈(A′)).

14) Sind die Geraden A, B, C etc., die keine St sind, parallel, so sind es auch ihre schiefen Risse; denn die St𝔈′ von A und B z. B. sind parallel, weil A || B, und irgend ein St′ in der einen St𝔈′ parallel zu irgend einem St′ in der andern ist (und die 𝔊(A) jeden in ihrer St𝔈′ liegenden St′ schneidet, da vorausgesetzt wurde, dass A kein St′ ist).

15) Sucht man die Centralrisse der parallelen Geraden A, B, C etc., die keine St′ sind, so gehen alle ihre St𝔈′ durch die Gerade D, welche durch das Centrum geht, und mit A, B, C etc. parallel ist; demnach gehen die 𝔑′ der Geraden A, B, C etc. durch den 𝔓(a), in welchem die 𝔊(D) die 𝔗′ schneidet. Man nennt die Gerade D, welche durch das Centrum geht (also ein St′ ist) und mit einer geraden A parallel ist, den Hauptstrahl der Geraden A und den 𝔓(a), in welchem sie (die 𝔊(D)) die 𝔗′ schneidet, Fliehpunkt, Fluchtpunkt, Flucht der 𝔊(A). Also haben wir den Satz:

Die Centralrisse paralleler Geraden schneiden sich in einem Punkte (ihrer Flucht). Diese Flucht ist der Schnitt des Hauptstrahles der Geraden mit der 𝔗′.

16) Ist eine Gerade A parallel mit einer St𝔈′, so liegt deren Flucht in dem 𝔑′ der St𝔈′.
Denn legt man durch A eine St𝔈′, so schneidet diese die gegebene St𝔈′ nach einer durch das Centrum gehenden Geraden, die || 𝔊(A) ist, also nach dem Hauptstrahl von A. Da nun der Hauptstrahl von A in der gegebenen St𝔈′

liegt, so muss auch der 𝔑′ des Hauptstrahles, d. i. die Flucht von A, in dem 𝔑′ der Ebene liegen.

17) Ist A eine gegebene Gerade, von welcher der Parallelriss gesucht werden soll, so sucht man, wie schon oben gesagt, zwei Punkte dieses Risses. Es ist nun bequem, als einen dieser Punkte die Spur prim, d. h. den Durchschnitt der 𝔊 (A) mit der 𝔗′, zu suchen, da der 𝔑′ dieses Punktes (als Punkt in der 𝔗′) der Punkt selbst ist.

18) Ist 𝔈 (A_1) (Fig. 36) die 𝔗′, 𝔓 (a) das Centrum von Centralstrahlen und soll der 𝔑′ der 𝔊 (B) gefunden werden, so suchen wir wieder zwei Punkte dieses 𝔑′ und zwar am Besten wieder die Spur prim (b) der Geraden, und ausserdem die Flucht, nemlich den 𝔓 (c), in welchem der Hauptstrahl der 𝔊 (B) die 𝔗′ (d. i. die 𝔈 (A_1)) schneidet. Die 𝔊 (bc) ist dann B′. Ausser den beiden besonderen Punkten der 𝔊 (B), die wir eben benützt haben, nemlich die Spur prim und den unendlich fernen Punkt der Geraden (dessen 𝔑′ die Flucht ist), giebt es noch einen merkwürdigen Punkt der 𝔊 (B) nemlich den 𝔓 (d) dessen 𝔖𝔱′ (ad) || 𝔗′ ist, und dessen 𝔑′ daher in unendlicher Ferne liegt. Durch diesen 𝔓 (d) wird die 𝔊 (B) in zwei Theile zerlegt, deren einer von d aus durch die Spur prim, nemlich durch 𝔓 (b), in's Unendliche führt, und dessen 𝔑′ daher derjenige Theil von B′ ist, der von 𝔓 (c) aus durch 𝔓 (b) ins Undenliche führt.

Wenn daher die 𝔊 (B) durch zwei Punkte e, f begrenzt wird, zwischen denen 𝔓 (d) liegt, so ist der 𝔑′ dieses Stückes (weil der in ihm liegende 𝔓 (d) seinen 𝔑′ in unendlicher Ferne hat) nicht das Stück e′f′, sondern die ganze Gerade B′ weniger dem Stücke e′f′.

§. 5.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in welchen Entfernungen, Winkel gesucht sind.

76. Aufg. Es sind gegeben die Punkte a und b; man sucht ihre Entfernung, oder, was dasselbe ist, die Länge ab. Fig. 29.

Aufl. 1. Ist (wie in Fig. a. und b.) 𝔊(ab) || $\mathfrak{T}_1$, so kann man die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 und b_2 gehen lassen (s. 15.); dann liegen die Punkte a und b, also auch die 𝔊(ab), in der $\mathfrak{T}_1$, und es ist demnach die Länge ab = $a_1 b_1$. Es folgt daher der Satz:

Wenn eine begrenzte Gerade parallel ist zur $\mathfrak{T}_1$, so ist sie gleich ihrem $\mathfrak{R}_1$.

Aufl. 2. Ist (Fig. c. und d.) die 𝔊(ab) nicht parallel zu einer Tafel, so nimmt man eine neue Tafel (die $\mathfrak{T}_3$) an, die parallel ist, oder, was noch bequemer ist, zusammenfällt mit der 𝔊(ab) und zugleich auf der $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht (s. 61. ad 1.), dann ist die Länge der 𝔊(ab) gleich der ihres $\mathfrak{R}_3$. Ist die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$, so nehmen wir die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass einer von den gegebenen Punkten, hier der 𝔓(a), in der $\mathfrak{T}_1$ liegt; geht zugleich die $\mathfrak{T}_3$ durch die 𝔊(ab), so ist $a_1 b_1$ die $\mathfrak{K}'_1$, und fällt demnach a'_1 mit a_1, b'_1 mit b_1 zusammen. Klappen wir nun die $\mathfrak{T}_3$ so um, dass mit ihr die $\mathfrak{K}'$ nach $\mathfrak{K}'_3$, der in $\mathfrak{K}'$ liegende 𝔓(a) nach a_3 und der $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$ des 𝔓(b) nach b'_3 kommt, so kommt b_3 so in die auf $a_3 b'_3$ Senkrechte $b'_3 b_3$, dass die $\mathfrak{O}'_3(b'_3 b_3)$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{O}_2(b_2 b_2)$ ist,*) und es ist dann $a_3 b_3$ die gesuchte Entfernung der Punkte a und b.

Die gesuchte Länge ist daher (wenn $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gelegt wird) die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete $a_1 b_1$ und dessen andere Kathete = $\mathfrak{A}_1$ des 𝔓(b). Man kann daher die Länge finden, wenn man $a_1 b_1$ von b_2 aus auf $\mathfrak{K}_2$ aufträgt und von dem dadurch auf $\mathfrak{K}_2$ erhaltenen Punkt nach b_2 misst; also ohne einen Strich zu zeichnen.

Anm. Der Schüler wird gut thun, wenn er die vorliegende Aufgabe auch für den Fall löst, dass die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$ ist; er kann alles in dieser Num. Gesagte dazu benützen, wenn er überall 2 mit 1 vertauscht.

Fig. 29. 77. Aufg. Den spitzen Winkel $\mathfrak{W}_1$ zu finden, den die 𝔊(ab) mit der $\mathfrak{T}_1$, d. h. (nach Anh. 43.) mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ bildet.

---

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass wir oben (63.) festgesetzt haben, bei einem Umklappen der auf $\mathfrak{T}_1$ senkrechten $\mathfrak{T}_3$ in der hier ausgeführten Weise die + $\mathfrak{T}_3$ hinter, die − $\mathfrak{T}_3$ vor der $\mathfrak{K}'_3$ erscheinen zu lassen.

Aufl. 1. Ist die $\mathfrak{S}$(ab) $\parallel$ $\mathfrak{T}_1$ (wie in Fig. a.), so ist der Winkel der $\mathfrak{S}$(ab) mit der $\mathfrak{T}_1 = 0^0$ und fällt, wenn man ihren $\mathfrak{R}_2$ als $\mathfrak{K}$ annimmt, die $\mathfrak{S}$(ab) zusammen mit ihrem $\mathfrak{R}_1$; es ist daher der Winkel der $\mathfrak{S}$(ab) mit der $\mathfrak{T}_2$ gleich dem von ihrem $\mathfrak{R}_1$ und der $\mathfrak{K}$ gebildeten Winkel.

Aufl. 2. Ist aber (wie in Fig. c. und d.) die $\mathfrak{S}$(ab) zu keiner Tafel parallel, so nimmt man, um den $\mathfrak{W}_1$ zu finden, eine $\mathfrak{T}_3$ an, die die $\mathfrak{S}$(ab) und ihren $\mathfrak{R}_1$ enthält, die also, wie in der vorhergehenden Num., senkrecht auf $\mathfrak{T}_1$ steht, und a_1b_1 zur $\mathfrak{K}'_1$ hat. Lässt man wieder die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen, und klappt die $\mathfrak{T}_3$ so um, dass der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{S}$(ab) nach a_3b_3 und die $\mathfrak{K}'$ nach $\mathfrak{K}'_3$, also a_1b_1 nach $a_3b'_3$ kommt, so ist $\wedge\, b_3a_3b'_3$ der gesuchte $\mathfrak{W}_1$. Es geht demnach aus dieser und der vorhergehenden Num. folgender Satz hervor:

1) Wenn man durch den einen Endpunkt einer $\mathfrak{S}$(ab), z. B. durch $\mathfrak{P}$(a), die $\mathfrak{T}_1$ gehen lässt, so kann man ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, dessen Hypotenuse gleich ab, dessen eine Kathete gleich a_1b_1, dessen zweite Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_1$ (oder der $\mathfrak{O}_2$) des $\mathfrak{P}$(b) ist, und in welchem der Winkel, den die den Geraden ab und a_1b_1 gleichen Seiten einschliessen, gleich dem $\mathfrak{W}_1$ der Geraden ist. Daraus folgt ferner:

2) Wenn zwei begrenzte Gerade gleiche $\mathfrak{W}_1$ haben, so verhalten sich ihre Längen wie die ihrer $\mathfrak{R}_1$; wenn daher

3) zwei Gerade von gleicher Länge gleiche $\mathfrak{R}_1$ haben, so sind ihre $\mathfrak{W}_1$ gleich, und umgekehrt, wenn zwei Gerade von gleicher Länge gleiche $\mathfrak{W}_1$ haben, so etc.; und wenn

4) eine begrenzte Gerade durch Punkte getheilt ist, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ durch die $\mathfrak{R}_1$ dieser Punkte nach demselben Verhältnisse getheilt; ist demnach

5) eine 𝔊(ab) gegeben, und ist c_1 der $\mathfrak{R}_1$ eines 𝔓(c) dieser Geraden, so muss c_2 in a_2b_2 so liegen, dass sich verhält: $a_2c_2 : a_2b_2 = a_1c_1 : a_1b_1$ *).

Man kann daher die Länge a_2c_2 und mit ihr den $\mathfrak{R}_2(c_2)$ finden, wenn man nach den Regeln der Elementargeometrie zu den Längen a_1b_1, a_1c_1 und a_2b_2 die vierte Proportionallinie sucht. Dieses Verfahren kann man gut anwenden, wenn entweder die Risse der 𝔊(ab) genau oder nahezu ⊥ 𝔎 sind.

Da in unseren Figuren c und d der 𝔓(a) die $\mathfrak{S}_1$ der 𝔊(ab) ist, so folgt ferner der Satz:

6) Jede Gerade, die durch den 𝔓(b) geht, und deren Spur eins von b_1 so weit entfernt ist, als a_1 von b_1, hat denselben $\mathfrak{W}_1$, wie die 𝔊(ab); es liegen demnach

7) die Spuren eins aller Geraden, die | 𝔓(b) und mit der $\mathfrak{T}_1$ denselben $\mathfrak{W}_1$ bilden, in einer in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Kreislinie, deren Mittelpunkt b_1 ist, und deren Halbmesser gleich a_1b_1, d. h. gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_1$ (oder der $\mathfrak{O}_2$) des 𝔓(b), und dessen dieser Kathete gegenüberliegende Winkel gleich $\mathfrak{W}_1$ ist.

Fig. 30. 78. **Aufg.** Es sind gegeben eine 𝔈(abc) und ein 𝔓(d): gesucht die Entfernung des 𝔓(d) von der 𝔈(abc).

Aufl. 1. Liegen (Fig. a) die $\mathfrak{R}_1$ der Punkte a, b, c in einer Geraden A_1, so haben wir die Entfernung des 𝔓(d) von der $\mathfrak{E}(A_1)$ zu suchen. Denken wir uns nun die $\mathfrak{K}_2$ durch d_2 gelegt, so liegt der 𝔓(d) in d_1, und es ist daher der Abstand des $\mathfrak{P}(d_1)$ von der $\mathfrak{G}(A_1)$ die gesuchte Entfernung. Man hat daher den Satz:

Wenn eine Ebene ⊥ $\mathfrak{T}_1$, so ist der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes von dem $\mathfrak{R}_1$ der Ebene so weit entfernt, als der Punkt selbst von der Ebene.

---

*) Wir haben nemlich schon oft bemerkt, dass unsere Entwickelungen auch wahr sind, wenn wir 1 und 2 mit einander vertauschen.

Aufl. 2. Ist die $\mathfrak{E}$(abc) eine schiefe (wie in Fig. b), so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, auf der sie senkrecht steht; dann ist der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) von dem $\mathfrak{R}_3$ der Ebene so weit entfernt, als die gesuchte Entfernung lang ist. Lassen wir unsere $\mathfrak{T}_3$ zugleich senkrecht stehen auf $\mathfrak{T}_1$ (s. 61. ad 1.), so ist $\mathfrak{K}'$ senkrecht auf der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc). Suchen wir daher diese Spur eins, nemlich die $\mathfrak{G}$(ac), und zeichnen senkrecht dazu die $\mathfrak{K}'_3$, so können wir den $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc), nemlich $a_3 b_3$, und den $\mathfrak{R}_3$ des Punktes d finden, und ist dann der Abstand des $\mathfrak{P}(d_3)$ von der $\mathfrak{G}(a_3 b_3)$ die gesuchte Entfernung.

79. Soll die Entfernung einer $\mathfrak{G}$(A) von einer mit ihr parallelen Ebene gesucht werden, so nimmt man in A einen Punkt an und sucht seine Entfernung von der gegebenen Ebene.

Soll die Entfernung zweier paralleler Ebenen gefunden werden, so nimmt man in der einen Ebene einen Punkt an, und sucht seine Entfernung von der anderen Ebene.

80. Aufg. Den spitzen Winkel $\mathfrak{W}_1$ zu finden, den eine $\mathfrak{E}$(abc) mit der $\mathfrak{T}_1$ einschliesst. Fig. 30. *)

Aufl. 1. Liegen die $\mathfrak{R}_1$ (a_1, b_1, c_1) der Punkte a, b, c in einer $\mathfrak{G}(A_1)$ (Fig. a), so haben wir eine $\mathfrak{E}(A_1)$, welche also mit der $\mathfrak{T}_1$ einen rechten Winkel bildet, während der $\mathfrak{W}_2$ der $\mathfrak{E}(A_1)$ gleich dem Winkel ist, den A_1 mit $\mathfrak{K}_1$ einschliesst; denn A_1 und $\mathfrak{K}_1$ sind die Geraden, nach welchen die $\mathfrak{T}_1$ von der $\mathfrak{T}_2$ und der $\mathfrak{E}(A_1)$ geschnitten werden (s. Anh. 44). Es geht hieraus der Satz hervor:

1) Wenn eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so bildet der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene mit der $\mathfrak{K}_1$ denselben Winkel, wie die Ebene mit der $\mathfrak{T}_2$.

Aufl. 2. Ist die $\mathfrak{E}$(abc) eine schiefe (Fig. b), so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf der $\mathfrak{T}_1$ und auf der $\mathfrak{E}$(abc), also auch auf der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) senkrecht steht und es ist dann (nach vorstehendem Satz) der $\mathfrak{W}_1$ der $\mathfrak{E}$(abc) gleich dem Winkel, den der $\mathfrak{R}_3$ dieser Ebene mit der $\mathfrak{K}'_3$ einschliesst. Sucht man daher den $\mathfrak{R}_3(a_3 b_3)$ der $\mathfrak{E}$(abc), so ist $\bigwedge b_3 a_3 b'_3$ der gesuchte $\mathfrak{W}_1$.

Aus unserer Construktion geht hervor, dass in dem rechtwinkeligen Dreiecke $a_3 b_3 b'_3$ die Länge $b'_3 b_3$, d. i. die $\mathfrak{D}'_3$ des

*) Für die vorliegende Aufgabe ist der $\mathfrak{P}$(d) überflüssig.

𝔓(b) = $b_2 b_2$ (d. i. = $\mathfrak{O}_2$ oder $\mathfrak{A}_1$ des 𝔓(b); ferner, dass $a_3 b_3'$ der Entfernung des $\mathfrak{R}_1(b_1)$ von der Spur eins der 𝔈(abc) ist. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

2) **Der $\mathfrak{W}_1$ einer 𝔈(abc) liegt in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen eine Kathete gleich dem Abstande des $\mathfrak{R}_1$ eines 𝔓(b) der 𝔈(abc) von ihrer Spur eins und dessen andere Kathete gleich der $\mathfrak{O}_2$ dieses 𝔓(b) ist, der letzteren Kathete gegenüber.** Daraus folgt ferner:

3) **Hat man eine zweite Ebene, die ebenfalls | 𝔓(b) und von deren Spur eins der 𝔓(b_1) eben so weit als von der Spur eins der 𝔈(abc) absteht, so ist der $\mathfrak{W}_1$ dieser zweiten Ebene gleich dem der 𝔈(abc), und umgekehrt: geht eine zweite Ebene durch den 𝔓(b) und ist ihr $\mathfrak{W}_1$** etc.

4) **Ist von einer Ebene ein 𝔓(b) und ihr $\mathfrak{W}_1$ gegeben, so ist die Spur eins der Ebene eine Tangente an einem in der $\mathfrak{T}_1$ gezeichneten Kreise, dessen Mittelpunkt b_1 und dessen Halbmesser die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete die $\mathfrak{O}_2$ des 𝔓(b) und dessen dieser Kathete gegenüberliegender Winkel gleich $\mathfrak{W}_1$ ist.**

Fig. 31. 81. Aufg. Es sind gegeben zwei sich kreuzende Gerade A, B; gesucht ihre Entfernung.

Aufl. Man findet (nach Anh. 42.) diese Entfernung, wenn man eine 𝔈(AC) annimmt, welche | 𝔊(A) und || 𝔊(B) (s. 49.), und (nach 78.) die Entfernung eines 𝔓(a) der 𝔊(B) von der 𝔈(AC) aufsucht.

Fig. 33. 82. Aufg. Die Entfernung eines 𝔓(a) von einer 𝔊(A) zu finden.

Aufl. Alle Aufgaben, in denen Entfernungen oder Winkel von Dingen gesucht werden, die in einer Ebene liegen, können wir dadurch lösen, dass wir diese Ebene als $\mathfrak{T}_3$ betrachten, und nach deren Umklappung die $\mathfrak{R}_3$ der gegebenen Dinge suchen. Diese $\mathfrak{R}_3$ geben dann dieselben Entfernungen und Winkel, wie die Dinge selbst.

Suchen wir daher (unter Voraussetzung, dass wir die $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ als neues Tafelsystem ansehen) die Spur eins der $\mathfrak{E}$(Aa), so ist dies die $\mathfrak{K}'$. Klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ um, und suchen den $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) und den $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}$(A), so ist die Entfernung dieser $\mathfrak{R}_3$ die verlangte Länge. Der $\mathfrak{R}_3$ von a ist a selbst (weil hier a in $\mathfrak{K}'$ liegt); um den $\mathfrak{R}_3$ von $\mathfrak{G}$(A) zu erhalten, suchen wir den $\mathfrak{R}_3$ eines $\mathfrak{P}$(c) der $\mathfrak{G}$(A), indem wir auf das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ des $\mathfrak{P}$(c) von c' aus dessen $\mathfrak{D}'_3$ auftragen. Diese $\mathfrak{D}'_3$ ist aber (nach 68.) die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten die $\mathfrak{D}'_1$ und der $\mathfrak{A}_1$ des Punktes ist. Da noch der $\mathfrak{R}_3$ des (in der $\mathfrak{K}'$ liegenden) $\mathfrak{P}$(b) der $\mathfrak{G}$(A) der $\mathfrak{P}$(b) selbst ist, so ist $b_3 c_3$ der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}$(A).

Aufg. Die wahre Gestalt eines ebenen Polygons zu finden. Fig. 32.

Aufl. Ist das Polygon ein Dreieck, so giebt man zu seiner Bestimmung die Risse seiner Eckpunkte. Hat es aber mehr als 3 Ecken, so kann man nur drei Eckpunkte desselben (hier die Punkte a, b, c) vollständig durch ihre Risse eins und zwei bestimmen, von den übrigen Ecken aber kann man nur ihre $\mathfrak{R}_1$ (oder $\mathfrak{R}_2$) geben, da sie noch die Bedingung zu erfüllen haben, in der $\mathfrak{E}$(abc) zu liegen.

Wollte man nun zunächst die $\mathfrak{R}_2$ der Punkte d, e suchen, so würde man nur zu berücksichtigen haben, dass der $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{G}$(d_1) und in der $\mathfrak{E}$(abc) liegt, daher der Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$(d_1) und $\mathfrak{E}$(abc) ist. Sucht man diesen Schnittpunkt (nach 45.), so erhält man d_2; in ähnlicher Weise auch e_2. Hält man sich aber streng an die vorliegende Aufgabe, die blos die wahre Gestalt des Polygons abcde verlangt, so kommen wir durch den oben bezeichneten Gang auch ohne d_2 und b_2 zum Ziele.

Betrachten wir $\mathfrak{E}$(abc) als $\mathfrak{T}_3$, die mit der $\mathfrak{T}_1$ das neue Tafelsystem bildet, so ist die Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) die $\mathfrak{K}'$. Klappen wir nun die $\mathfrak{T}_3$ um diese $\mathfrak{K}'$ um, und zeichnen die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a, b, c, indem wir auf die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ dieser Punkte die aus ihren Nebenfiguren (z. B. rechtwinkeliges Dreieck $b' b_1 b$) erhaltenen $\mathfrak{D}'_3$ auftragen, so haben wir nur noch die $\mathfrak{R}_3$ derjenigen Punkte (d, e) zu suchen, von denen die $\mathfrak{R}_2$ fehlen. Dies ist aber leicht ausführbar; denn von einem solchen Punkte, z. B. $\mathfrak{P}$(d) können wir die Nebenfigur finden, da $b' d_1$ deren eine Kathete ist, und

ausserdem der $\wedge\,\alpha'$ derselben durch die Nebenfigur des $\mathfrak{P}$(b) erhalten worden ist. Man kann demnach auch die $\mathfrak{R}_3(d_3, e_3)$ der Punkte d und e und somit den $\mathfrak{R}_3$ und daher die wahre Gestalt des Polygons erhalten.

Anm. 1. In derselben Weise wird auch die Aufgabe gelöst, den Winkel zweier Geraden a c, b c (die sich also in c schneiden) zu finden. Wir suchen wieder (die $\mathfrak{E}$(abc) als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet) die $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}$(ac) und $\mathfrak{G}$(bc) und erhalten den $\wedge(a_1 c_3 b_1)$ als den gesuchten. Ist aber der Winkel von zwei sich kreuzenden Geraden A, B verlangt, so verschiebt man die eine, z. B. A, bis sie die andere schneidet, und sucht nun den Winkel dieser sich schneidenden Geraden.

Anm. 2. Da der spitze Winkel, den eine $\mathfrak{G}$(A) mit einer Ebene und der Winkel, den die $\mathfrak{G}$(A) mit einem Loth zur Ebene bildet, zusammen einen Rechten geben (Anh. 43.), so findet man den spitzen Winkel einer $\mathfrak{G}$(ab) mit einer $\mathfrak{E}$(AB), wenn man durch den $\mathfrak{P}$(a) eine $\mathfrak{G}$(C) $\perp$ $\mathfrak{E}$(AB) legt, den von $\mathfrak{G}$(ab) und $\mathfrak{G}$(C) gebildeten spitzen Winkel aufsucht, und ihn zu einem Rechten ergänzt; der Ergänzungswinkel ist gleich dem gesuchten.

Fig. 34. 83. Aufg. Den Winkel zweier Ebenen zu finden.

Aufl. 1. Stehen die beiden Ebenen senkrecht auf einer Tafel, so bilden ihre Risse auf dieser Tafel denselben Winkel, wie die Ebenen (Anh. 44.).

Aufl. 2. Stehen sie nicht beide $\perp$ auf einer Tafel, oder stehen beide schief gegen die Tafeln, wie die $\mathfrak{E}$(abc) und die $\mathfrak{E}$(abd), so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf beiden Ebenen, also auch auf ihrem Schnitte a b, senkrecht steht, und es bilden dann die $\mathfrak{R}_3$ der Ebenen den gesuchten Winkel. Lässt man hier die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 und die $\mathfrak{K}'$ durch a_1 gehen, so liegt der $\mathfrak{P}$(a) in der $\mathfrak{K}'$ und fällt, wenn man der $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ die $\mathfrak{K}'$ gemeinschaftlich lässt, a_3 mit a_1 zusammen; da ferner die $\mathfrak{G}$(ab) das $\mathfrak{L}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) uud $\mathfrak{P}$(b) ist, so liegt auch b_3 in a_1. Um aber in der umgeklappten $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{R}_3$ (c_3 und d_3) der Punkte c, d zu erhalten, müssen wir so verfahren, wie wir oben (72. 2)) gezeigt haben. Wir klappen nemlich die $\mathfrak{LE}'$ der Punkte a und b um, und zwar so, dass $a_1 b_1$ (Fig. a.) nach ab_1 (Fig. b) und der $\mathfrak{P}$(b) nach b kommt, wenn die auf ab_1 Senkrechte $bb_1 = b_2 b_2$ gemacht wird. Demnach ist ac_3 ($\perp$ ab) das $+\,\mathfrak{KL}_3$ und wenn man ab_1

als $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ annimmt $\bigwedge b_1 a c_3$ der $\bigwedge \alpha'$. Trägt man nun $c_1 c'$ nach $a c_1$ (auf das $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$, weil $c_1 c'$ negativ ist) und macht die auf $a c_1$ Senkrechte $c c_1 = c_2 c_2$ und positiv, so erhält man durch die zu $a c_3$ Senkrechte $c c_3$ die $\mathfrak{O}'_3 (a c_3)$, welche hier $+$ ist. Trägt man daher $a c_3$ nach $c' c_3$, so erhält man den $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(c)$; in ähnlicher Art wird der $\mathfrak{R}_3 (d_3)$ erhalten. Dann ist der $\bigwedge c_3 a_3 d_3$, den die $\mathfrak{R}_3$ ($c_3 a_3$ und $d_3 a_3$) der gegebenen Ebenen einschliessen, der gesuchte Winkel.

Anm. Wäre der Durchschnitt der gegebenen Ebenen nicht bekannt, so müsste man ihn suchen und dann wie oben verfahren.

§. 6.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in welchen Entfernungen und Winkel gegeben sind.

84. Bei der Auflösung dieser Aufgaben nimmt man am Zweckmässigsten Tafeln zu Hilfe, in welchen die gegebenen Entfernungen und Winkel unmittelbar aus den Rissen gemessen werden können. Insbesondere nimmt man für den Fall, dass die gegebenen und gesuchten Raumgrössen alle in einer Ebene liegen, (also für alle planimetrischen Aufgaben, deren Punkte und Linien durch Risse gegeben sind), am Besten eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, die alles Gegebene und Gesuchte enthält (zugleich lässt man diese $\mathfrak{T}_3$, wenn für sie nur eine einzige Gerade A gegeben ist, senkrecht stehen auf einer alten Tafel, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, so dass A_1 die $\mathfrak{K}'$ ist), zeichnet, nach Umklappung der $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{R}_3$ aller Punkte und Linien, und sucht nun die verlangten Punkte in der $\mathfrak{T}_3$ nach den Regeln der Planimetrie. Die so gefundenen Punkte sind dann die $\mathfrak{R}_3$ der verlangten, aus denen man nur noch die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zu suchen hat.

85. **Aufg.** Es ist gegeben eine $\mathfrak{G}$(A) und ein $\mathfrak{P}$(a) in ihr; man sucht einen $\mathfrak{P}$(b) der $\mathfrak{G}$(A), der vom $\mathfrak{P}$(a) eine gegebene Entfernung hat. Fig. 35.

Aufl. Diese Aufgabe ist planimetrisch; man nimmt daher eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, welche die $\mathfrak{G}$(A) enthält, und die zugleich auf der $\mathfrak{T}_1$ (oder auf der $\mathfrak{T}_2$) senkrecht steht, so dass also A_1 die

neue Kante ($\mathfrak{K}'$) ist. Klappt man nun die Tafeln so um, dass die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{K}'$ gemein behalten, und lässt wieder die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen, so ist a ein Punkt der $\mathfrak{K}'$ und fällt demnach a_3 mit a_1 zusammen. Um nun den $\mathfrak{R}_3$ der Geraden A zu finden, muss man von einem zweiten Punkt der $\mathfrak{G}$(A), z. B. vom $\mathfrak{P}$(c) den $\mathfrak{R}_3$ suchen (s. 64.), und es ist die durch a_1 und c_3 gehende A_3 der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}$(A). Nun löst man in der $\mathfrak{T}_3$ die gegebene Aufgabe, indem man von a_1 aus die gegebene Länge aufträgt, und so den $\mathfrak{R}_3(c_3)$ des verlangten Punktes erhält. Schliesslich sucht man noch auf bekannte Art aus c_3 die Risse c_1 und c_2.

Anm. Da $bb_2 = b_1b_3$ sein muss (s. 63. Satz), so hat man ein Mittel, sich von der Genauigkeit der Zeichnung zu überzeugen.

Fig. 30. 86. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}$(abc); gesucht ein $\mathfrak{P}$(d), der von der $\mathfrak{E}$(abc) eine gegebene Entfernung hat.

Aufl. Diese Aufgabe liesse sich sofort lösen, wenn die $\mathfrak{E}$(abc) $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ (Fig. a.) wäre. Denn in diesem Falle dürfte der $\mathfrak{P}$(d) nur so gewählt werden, dass d_1 vom $\mathfrak{R}_1$ der Ebene um die gegebene Entfernung absteht. Hiebei ist ersichtlich, dass es unzählige Punkte d giebt, die alle die verlangte Bedingung erfüllen, und zusammen in zwei zur gegebenen parallelen Ebenen liegen, deren $\mathfrak{R}_1$ mit dem $\mathfrak{R}_1$ der gegebenen Ebene in der gegebenen Entfernung parallel laufen.

Ist aber (wie in Fig. b) die $\mathfrak{E}$(abc) keine Lothebene, so nimmt man hier wieder (wie in 78., wo die umgekehrte Aufgabe gelöst wurde) eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) senkrecht steht, so ist a_3b_3 der $\mathfrak{R}_3$ dieser Ebene, und wenn daher d_3 von diesem $\mathfrak{R}_3$ so weit absteht, als die gegebene Entfernung (des $\mathfrak{P}$(d) von der $\mathfrak{E}$(abc)) beträgt, so ist d_3 des $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(d), dessen $\mathfrak{R}_1$ nemlich d_1, in seinem $\mathfrak{KL}_1$ beliebig angenommen werden kann. Wie man aber d_2 aus d_1 und d_3 findet, ist schon bekannt (s. 64.).

Anm. Legt man durch den $\mathfrak{P}$(d) eine $\mathfrak{E}$(def), welche $\parallel$ $\mathfrak{E}$(abc) (s. 52. 1.), so ist jeder Punkt und jede Gerade derselben eben so weit von der $\mathfrak{E}$(abc)) entfernt, als der $\mathfrak{P}$(d). Es giebt aber noch eine Ebene, die diese Eigenschaft an sich trägt, nemlich eine Ebene, die mit der $\mathfrak{E}$(def) auf verschiedenen Seiten der $\mathfrak{E}$(abc) liegt.

87. Aufg. Es wird eine $\mathfrak{S}(ab)$ gesucht, von der ein $\mathfrak{P}(a)$, Fig. 29.c.
ihr $\mathfrak{R}_1$, nemlich a_1b_1, und der spitze Winkel $\mathfrak{W}_1$ gegeben ist, den sie mit der $\mathfrak{T}_1$ einschliesst.

Aufl. Nimmt man wieder die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist von dem früher (77.) angeführten rechtwinkeligen Dreieck der Winkel $\mathfrak{W}_1$ und die diesem Winkel anliegende Kathete, welche gleich a_1b_1 ist, bekannt, und es lässt sich daraus die dem $\mathfrak{W}_1$ gegenüberstehende Kathete $\mathfrak{b}_2b_2$ finden, welche gleich der $\mathfrak{O}_2$ des $\mathfrak{P}(b)$ ist, und wodurch der $\mathfrak{R}_2(a_2b_2)$ der $\mathfrak{S}(ab)$ gefunden ist.

Anm. Da hier nicht ausgesprochen ist, in welchem Raume der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{P}(b)$ liegen soll, so kann die durch das rechtwinkelige Dreieck $a_3b_3b_3'$ erhaltene $\mathfrak{O}_2$ des $\mathfrak{P}(b)$ auch in der $-\mathfrak{T}_2$ aufgetragen werden; es giebt also zwei Gerade, die den gegebenen Bedingungen entsprechen.

88. Aufg. Es sind gegeben die Spur eins (ae) einer Ebene Fig. 30.b.
und ihr $\mathfrak{W}_1$; gesucht die Ebene.

Aufl. Da dies die umgekehrte Aufgabe einer früheren (80.) ist, so wird man, wie dort, eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe nehmen, die auf der Spur eins (ae) senkrecht steht, und den $\mathfrak{R}_3$ der gesuchten Ebene aufsuchen. Dieser muss, wenn $\mathfrak{K}'$ die neue Kante ist, durch a_3 gehen und mit $\mathfrak{K}'$ den gegebenen $\mathfrak{W}_1$ bilden; es ist also die Gerade a_3b_3 (oder eine zweite Gerade, die auf der anderen Seite der Linie a_1a_3 mit der $\mathfrak{K}'$ den $\mathfrak{W}_1$ einschliesst) der $\mathfrak{R}_3$ der gesuchten Ebene, und demnach der $\mathfrak{P}(b)$ ein Punkt derselben, wenn b_3 im $\mathfrak{R}_3$ der Ebene liegt, und dessen $\mathfrak{O}_2$ der Länge und dem Vorzeichen nach = seinem $\mathfrak{O}_3'$ ist; sein $\mathfrak{O}_1'$ ist willkührlich (s. die Sätze in 29. und 63.)

89. Aufg. Es sind beliebig viele Punkte a, b, c, d gegeben; Fig. 37.
man soll die $\mathfrak{R}_3$ dieser Punkte finden, wenn die $\mathfrak{T}_3$ die Punkte a, b, c enthält, dieselbe also zusammenfällt mit der $\mathfrak{E}(abc)$.

Aufl. Zur Lösung dieser Aufgabe suchen wir (nach 72.) die Spur eins (ae) der $\mathfrak{E}(abc)$, welche Spur die $\mathfrak{K}'$ vorstellt. Klappen wir nun die $\mathfrak{T}_3$ um und zwar hier so, dass die $\mathfrak{K}'$

zweimal erscheint, einmal als $\mathfrak{K}'_1$ (weshalb wir an die Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) nicht $\mathfrak{K}'$, sondern $\mathfrak{K}'_1$ geschrieben haben) und einmal als $\mathfrak{K}'_3$, und nehmen wir an, es komme der $\mathfrak{R}_3$ des (in $\mathfrak{K}'$ liegenden) $\mathfrak{P}$(a) nach a_3 in der $\mathfrak{K}_3$, so finden wir das $\mathfrak{KL}'_3$ eines Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}$(b), wenn wir die $\mathfrak{Ab}'_3$ $(a_3 \mathfrak{b}'_3)$ des Punktes $= \mathfrak{Ab}'_1 (a_1 \mathfrak{b}'_1)$ machen (und so auftragen, dass wenn man die Tafeln $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ verschoben denkt, bis a_3 auf a_1 und $\mathfrak{b}'_3$ auf $\mathfrak{b}'_1$ fällt, die $+ \mathfrak{T}'_1$ und $+ \mathfrak{T}'_3$ auf verschiedenen Seiten der $\mathfrak{K}'$ erscheinen), und in $\mathfrak{b}'_3$ das $\mathfrak{KL}'_3$ errichten. Um aber noch für jeden Punkt die $\mathfrak{O}'_3$ zu erhalten, brauchen wir seine Nebenfigur. Da nun der $\wedge \alpha'$ nicht gegeben ist, so verfahren wir (nach 72.) so, dass wir mit der Nebenfigur des Punktes b (oder c) beginnen, die ein rechtwinkeliges Dreieck $\mathfrak{b}' b_1 b$ (Fig. b) ist, in welchem $\wedge b_1 \mathfrak{b}' b = \wedge \alpha'$ ist (da hier unserer Annahme zufolge die Schenkel dieses Winkels die positiven $\mathfrak{KL}'$ sind). Haben wir so den $\wedge \alpha'$ gefunden, so können wir die Nebenfigur eines jeden Punktes, z. B. des Punktes d dadurch finden, dass wir seine aus Figur a zu entnehmenden $\mathfrak{O}'_1$ und $\mathfrak{A}_1$ mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens in die Fig. b übertragen, wodurch wir in dieser Figur zuerst d_{11}, dann d erhalten, und dann durch die zu $\mathfrak{KL}'_3$ errichtete Senkrechte $d d_3$ die Figur vollenden (welche, wenn der Punkt in der $\mathfrak{T}_3$, z. B. $\mathfrak{P}$(c), ein rechtwinkeliges Dreieck wird). Auf diese Art erhalten wir die $\mathfrak{O}'_3$ $(\mathfrak{b}' b_3, \mathfrak{b}' c_3, \mathfrak{b}' d_3)$ aller Punkte, die wir dann in die Fig. a. auf die betreffenden $\mathfrak{KL}'_3$ mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens übertragen. Wir erhalten so in unserer Figur die $\mathfrak{R}_3$ unserer Punkte.

Anm.: Wir haben hier die Fig. b gegen die $\mathfrak{R}_3$ in der Fig. a so gelegt, dass die Punkte $\mathfrak{b}'$, b, c, d der ersteren Figur augenscheinlich als die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte (a, b, c, d) angesehen werden können (s. 70. Anm.)

Fig. 37. 90. Aufg. Einen Punkt e zu finden, der in der $\mathfrak{E}$(abc) liegt, und gegen die Punkte a, b, c eine bestimmte Lage hat.

Aufl. Wie auch die Bedingungen, durch welche die Lage des $\mathfrak{P}$(e) gegen die gegebenen Punkte der $\mathfrak{E}$(abc) bestimmt ist, lauten mögen, der Gang, den die Lösung unserer Aufgabe zu nehmen hat, und der an der Spitze unseres §. schon angedeutet wurde, ist folgender:

Man betrachtet die 𝔈(abc) als $\mathfrak{T}_3$, die mit $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) das neue Tafelsystem bildet, und sucht die Spur eins der 𝔈(abc), welche die 𝔎′ vorstellt. Nun klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ um, und zeichnen mit Hilfe der Nebenfiguren der gegebenen Punkte die $\mathfrak{R}_3$ dieser Punkte. Da jetzt alle gegebenen Punkte in der Ebene unseres Blattes liegen, so können wir den 𝔓(e) nach den Regeln der Planimetrie suchen, und dieser Punkt ist dann zugleich der $\mathfrak{R}_3$ des 𝔓(e). Man hat nun noch mittelst der Nebenfigur des Punktes e, von welcher die Hypotenuse und der $\wedge\ \alpha'$ bekannt sind, e_1 und e_2 zu finden.

In unserer Figur haben wir angenommen, es seien die Entfernungen des 𝔓(e) von a und b bekannt. In diesem Falle müssen wir mit diesen Entfernungen aus a_3 und b_3 Kreisbögen zeichnen, deren Schnitt d_3 ist. Es gäbe daher zwei Punkte, die e_3 vorstellen können, wenn nicht durch eine weitere Bedingung, z. B. dass e und c auf einerlei Seite von ab liegen sollen (dies ist in unserer Figur vorausgesetzt und daher nur ein einziges e_3 gezeichnet), die Zweideutigkeit gehoben wird.

Anm. Der Schüler wird gut thun, zu seiner Uebung sich andere planimetrische Aufgaben zur Lösung vorzulegen; z. B. die Aufgabe: Den Mittelpunkt d eines Kreises (nicht den Kreis, sondern nur seinen Mittelpunkt) zu finden, dessen Peripherie durch die Punkte a, b, c geht.

91. Es ist gegeben eine 𝔈(abc) und eine in ihr liegende 𝔊(ab); gesucht eine 𝔈(abd), die mit 𝔈(abc) einen gegebenen Winkel bildet. Fig. 34.

Aufl. Man nimmt wieder (wie in 83., wo die umgekehrte Aufg. von der vorliegenden gelöst wurde) eine $\mathfrak{T}_3$ an, die $\perp$ 𝔊(ab), und sucht die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a, b und c, wobei wieder, wenn $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 und 𝔎′ durch a_1 gelegt wird, die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a und b mit a_1 zusammenfallen, und daher $a_1 c_3$ der $\mathfrak{R}_3$ der 𝔈(abc) ist. Demnach ist der $\mathfrak{R}_3$ der 𝔈(abd) eine 𝔊($a_1 d_3$), die mit $a_1 c_3$ den gegebenen Winkel der Ebenen einschliesst. Da man nun die Risse der Punkte a und b schon hat, so braucht man nur noch von einem dritten Punkte d der 𝔈(abd) den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ aufzusuchen, dessen $\mathfrak{R}_3$ in der 𝔊($a_1 d_3$) liegt, und dessen $\mathfrak{R}_1$ in dem $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$, nemlich $\mathfrak{d}'d_1$, beliebig angenommen werden kann.

Sucht man nun mit Hilfe der Nebenfigur des 𝔓(d) seinen $\mathfrak{A}_1$ und macht seine $\mathfrak{O}_2$, nemlich $\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}_2 = d_1 d$, so erhält man d_2.

Anm. Wenn der Winkel der beiden Ebenen kein Rechter ist, so giebt es zwei Ebenen, die die gegebenen Bedingungen erfüllen.

92. Aufg. Den Winkel zweier Ebenen, die sich nach einer 𝔊(ab) schneiden, durch eine Ebene zu halbiren.

Aufl. Man sucht mit Hilfe einer $\mathfrak{T}_3$, die $\perp$ 𝔊(ab), den Winkel α der beiden Ebenen (s. 83.), und sucht dann (nach 91.) eine Ebene, die mit jeder der gegebenen Ebenen einen Winkel $= \frac{\alpha}{2}$ einschliesst, und durch ab geht.

Anm. Sind die Ebenen von allen Seiten unbegrenzt, so bilden sie vier Winkel, und es giebt zwei Ebenen, die ihre Winkel halbiren.

Fig. 38. 93. Aufg. Es wird eine 𝔊(ad) gesucht, die in einer 𝔈(abc) liegt, und mit der $\mathfrak{T}_1$ einen gegebenen Winkel $\mathfrak{W}_1$ einschliesst.

Aufl. Da die 𝔊(ad) durch den 𝔓(a) geht und mit der $\mathfrak{T}_1$ den gegebenen Winkel $\mathfrak{W}_1$ einschliesst, so muss (nach 77. Satz 7.) die Spur eins der 𝔊(ad) in einer Kreislinie liegen, die aus a_1 mit einem Halbmesser beschrieben wird, der gleich der Kathete $\mathfrak{a}'_3 d_3$ eines rechtwinkeligen Dreiecks $\mathfrak{a}'_3 d_3 a_3$ ist, in welchem die andere Kathete $\mathfrak{a}'_3 a_3 = \mathfrak{a}_2 a_2$ und der dieser Kathete gegenüberstehende Winkel gleich ist $\mathfrak{W}_1$ oder $180^0 - \mathfrak{W}_1$ (je nachdem $\mathfrak{W}_1$ spitz oder stumpf ist). Da aber ausserdem die Spur eins der 𝔊(ad) in der Spur eins der 𝔈(abc) liegen muss, so sucht man diese Spur eins (ce) der 𝔈(abc) (zu welchem Ende man die $\mathfrak{K}_2$ durch $\mathfrak{c}_2$ gehen lässt), und der 𝔓(d_1), in welchem 𝔊($c_1 e_1$) von der oben genannten Kreislinie geschnitten wird, ist dann die Spur eins der gesuchten 𝔊(ad).

Anm. 1. Es giebt daher so viele 𝔊(ad), als die genannte Kreislinie mit der Spur $c_1 e_1$ Punkte gemein hat, also zwei (wie in unserer Figur, wo aber die zweite Gerade nicht gezeichnet ist) oder eine (wenn $a_1 d_1 \perp c_1 e_1$) oder keine (wenn der Halbmesser des Kreises kleiner ist als die Entfernung des 𝔓(a_1) von 𝔊($c_1 e_1$)).

Anm. 2. Wäre statt $\mathfrak{W}_1$ der spitze Winkel α gegeben, den die 𝔊(ad) mit der 𝔊(a_1) einschliesst, so könnte man durch

$90^0 - \alpha$ den $\mathfrak{W}_1$ der $\mathfrak{G}$(ad) erhalten, und dann wie oben verfahren. Man hätte daher in diesem Falle von dem rechtwinkeligen Dreiecke $a_3 d_3 a_3'$ den $\wedge a_3$ statt des Winkels d_3.

94. Aufg. Es sind gegeben ein $\mathfrak{E}$(abc) und eine durch den $\mathfrak{P}$(a) gehende $\mathfrak{G}$(A); gesucht eine $\mathfrak{G}$(af), die in der $\mathfrak{E}$(abc) liegt und mit der $\mathfrak{G}$(A) einen gegebenen Winkel β bildet. Fig. 39.

Aufl. Stände die $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{T}_1$, so hätte man die vorhergehende Aufg. Da aber die $\mathfrak{G}$(A) schief steht, so nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ an, die $\perp \mathfrak{G}$(A), deren $\mathfrak{K}'$ also $\perp A_1$ ist, und suchen (nach 93., wenn man 3 statt 1 setzt) die Spur drei (abgekürzt: $\mathfrak{S}_3$) der $\mathfrak{G}$(af); diese $\mathfrak{S}_3$ muss in der $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc) so liegen, dass sie von dem $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) so weit absteht, als die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks lang ist, dessen andere Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) ist und mit seiner Hypotenuse den $\wedge \beta$ einschliesst. Da man demnach die $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc) aufsuchen muss, so ist es zweckmässig, die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 und die $\mathfrak{K}'$ durch b_1 zu legen, so dass der $\mathfrak{P}$(b) der $\mathfrak{K}'$ und daher auch der $\mathfrak{T}_3$ angehört, und demnach ein Punkt der $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc) ist. Klappen wir daher die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ um, so fällt b und b_3 mit b_1 zusammen, und ist demnach b_1 ein Punkt der $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc). Sucht man noch den $\mathfrak{R}_3(a_3)$ des Punktes a (und des $\mathfrak{P}$(d)), und den des $\mathfrak{P}$(c), so wird man mit Hilfe einer $\mathfrak{T}_4$ die $\mathfrak{S}_3(e_3)$ der $\mathfrak{G}$(ac) und mithin $b_1 e_3$, die $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc), finden. Nimmt man nun in dieser $\mathfrak{S}_3$ einen Punkt f_3, der von a_3 so weit entfernt ist, als $a_3 f_3$ (Fig. b) angiebt, so ist f_3 die $\mathfrak{S}_3$ der gesuchten Geraden. Sucht man noch aus f_3 die Risse f_1 und f_2, so hat man die $\mathfrak{G}$(af).

95. Aufg. Es wird eine $\mathfrak{E}$(abc) gesucht, die durch die $\mathfrak{G}$(ab) geht, und mit der $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ bildet. Fig. 40.

Aufl. Da die $\mathfrak{E}$(abc) durch den $\mathfrak{P}$(a) geht und mit der $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ bildet, so muss (82. Satz 4.) die Spur eins der Ebene an einem Kreise berühren, dessen Mittelpunkt a_1 ist. Lässt man nun die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 gehen, damit der $\mathfrak{P}$(b) in der $\mathfrak{T}_1$, also auch in der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) liegt, und zieht die $\mathfrak{G}(a_2 c_3)$ so, dass sie mit $\mathfrak{K}_2$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ bildet, so ist $a_2 c_3$ Halbmesser des aus a_1 beschriebenen Kreises, an dem die Spur eins der Ebene berühren muss und zwar im $\mathfrak{P}$(c), und es ist daher die $\mathfrak{E}$(abc) bestimmt.

Anm. 1. Es giebt hier so viele $\mathfrak{E}$(abc), als vom $\mathfrak{P}(b_1)$ aus Tangenten an den Kreis möglich sind; demnach zwei oder eine oder keine, je nachdem die Länge $a_1 b_1$ grösser, gleich oder kleiner als der Halbmesser des Kreises ist.

Anm. 2. Ist statt $\mathfrak{W}_1$ der Winkel α gegeben, den die $\mathfrak{E}$(abc) mit der $\mathfrak{G}(a_1)$ bildet, so kann man $\mathfrak{W}_1$ finden (indem $\mathfrak{W}_1 = 90^0 - \alpha$ ist) und dann wie oben verfahren.

96. Ist gegeben eine $\mathfrak{G}$(ab), und gesucht eine $\mathfrak{E}$(abc), die mit einer $\mathfrak{G}$(A) einen gegebenen Winkel β bildet, so schliesst sie mit einer auf der $\mathfrak{G}$(A) senkrechten $\mathfrak{T}_3$ den Winkel $\mathfrak{W}_3 = 90^0 - \beta$ ein. Sucht man daher die Spur drei der $\mathfrak{E}$(abc), indem man die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 und $\mathfrak{K}'$ durch b_1 gehen lässt, (wodurch b_1 ein Punkt der Spur drei der $\mathfrak{E}$(abc) wird, wenn man die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ umklappt) und aus b_1 eine Tangente an einen Kreis legt, der aus a_3 mit einem Halbmesser beschrieben ist, gleich der Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) dem $\wedge\ \beta$ gegenüberliegt: so darf man nur noch von einem $\mathfrak{P}$(c) dieser Spur drei die Risse c_1 und c_2 aufsuchen, um die $\mathfrak{E}$(abc) zu erhalten. Die Ausführung dieser Aufgabe überlassen wir dem Schüler.

Fig. 41. 97. Aufg. Es sind gegeben drei Punkte a, b und c in der $\mathfrak{T}_1$; gesucht ein Punkt d in dem + Raum der $\mathfrak{T}_1$, der von den Punkten a, b und c gegebene Entfernungen hat.

Aufl. Nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, in der a, b und d liegen, so geht die $\mathfrak{K}'$ durch a und b und es fällt daher, wenn man die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ umklappt, a_3 mit a_1 und b_3 mit b_1 zusammen; ferner kommt d_3 so zu liegen, dass $a_1 d_3$ und $b_1 d_3$ beziehungsweise gleich den gegebenen Entfernungen des $\mathfrak{P}$(d) von den Punkten a und b werden. Ist aber der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) gefunden, so muss d_1 in der zur $\mathfrak{K}'(a_1 b_1)$ Senkrechten $d_3 d_1$ liegen. Nimmt man ebenso eine $\mathfrak{T}_4$ an, die durch b, c und d geht (so dass $\mathfrak{K}''$ durch b_1 und c_1 geht) und klappt sie um $\mathfrak{K}''$ um, so kommt d_4 so zu liegen, dass $b_1 d_4$ gleich der Entfernung der Punkte b und d (also gleich $b_1 d_3$), und $c_1 d_4$ gleich der Entfernung der Punkte c und d wird. Desshalb liegt d_1 auch in der zur $\mathfrak{K}''$ Senkrechten $d_4 d_1$. Hat man so d_1 gefunden, so liegt d_2 im $\mathfrak{KL}_2$ des $\mathfrak{P}$(d) und ist $\mathfrak{d}_2 d_2 = \mathfrak{A}_1$ dieses Punktes; dieser $\mathfrak{A}_1$ ist (weil d in der $\mathfrak{T}_3$ liegt, und daher die Nebenfigur dieses Punktes in Bezug auf

das Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ ein rechtwinkeliges Dreieck ist) die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $\mathfrak{b}'d_3$ und dessen andere Kathete $\mathfrak{b}'d_1$ ist.

Anm. Wäre $a_1 d_3 = b_1 d_3 = c_1 d_4$, so wäre d_1 der Mittelpunkt einer durch a_1, b_1 und c_1 gehenden Kreislinie. Ist daher blos verlangt, dass der $\mathfrak{P}$(d) gleichweit von a, b, c entfernt sein soll, ohne dass die Grösse dieser Entfernung bestimmt wird, so ist d_1 bestimmt, d_2 aber beliebig, d. h. es liegt der $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{G}$(d_1).

98. Aufg. Es sind gegeben drei Punkte a, b, c; gesucht ein $\mathfrak{P}$(d), dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten bekannt sind. Fig. 42.

Aufl. Diese Aufgabe haben wir oben lösen gelernt für den Fall, dass die Punkte a, b, c in einer Tafel liegen. Ist dies nun nicht der Fall, so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, die durch die gegebenen Punkte geht, und behandelt die Aufgabe mittelst des Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ (oder $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$). Es ist dann, wenn man wieder die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen lässt, $a_1 e_1$ die $\mathfrak{K}'$, und wenn man die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ so umklappt, dass die $\mathfrak{K}'$ zweimal erscheint, so ist $a_1 e_1$ die $\mathfrak{K}'_1$ und es erscheint der $\mathfrak{R}_3(a_3)$ in $\mathfrak{K}'_3$. Sucht man nun nach bekannten Gesetzen (mit Hilfe der Fig. b) a_3, b_3 und c_3, so kann man in derselben Weise, wie in voriger Nr. d_1 und der $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(d) gefunden wurde, hier d_3 und den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) finden. Hat man aber d_3 und den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(d), so sucht man noch daraus (nach 71) d_1 und d_2.

Anm. Wir haben hier den $\mathfrak{P}$(d) in dem + Raum der $\mathfrak{T}_3$ angenommen. Es giebt aber auch einen solchen Punkt in dem — Raum der $\mathfrak{T}_3$.

99. Aufg. Einen $\mathfrak{P}$(e) zu finden, der von 4 Punkten a, b, c, d gleichweit absteht. Fig. 43.

Aufl. Sind die Punkte beliebig im Raume durch ihre Risse gegeben, so suchen wir erst einen Punkt, der von drei Punkten, z. B. a, b, c, gleichweit entfernt ist. Zu dem Ende suchen wir zuerst einen solchen Punkt e in der $\mathfrak{E}$(abc) nach Anleitung der Nr. 90 und der Anm. zu dieser Nr. Durch diesen Punkt e legen wir dann eine Gerade, die $\perp$ $\mathfrak{E}$(abc) ist; in dieser Geraden liegt der gesuchte Punkt. Wiederholen wir dann dasselbe Verfahren in Bezug auf drei andere Punkte, z. B. a, b, d, so

bekommen wir eine zweite Gerade, die den gesuchten Punkt enthalten muss, und deren Schnitt mit der ersten Geraden den verlangten Punkt liefert.

Können wir aber die Tafeln frei wählen, so nehmen wir sie so an, dass die $\mathfrak{T}_1$ die Punkte a, b, c enthält, und dass die $\mathfrak{T}_2$ auf $\mathfrak{G}$(ab) senkrecht steht (wie dies in unserer Figur der Fall ist); dann ist der Punkt e_1 in der $\mathfrak{T}_1$, der von den in dieser Tafel liegenden Punkten a, b, c gleichweit entfernt ist, zugleich der $\mathfrak{N}_1$ des gesuchten Punktes e. Betrachten wir nun $\mathfrak{E}$(abd) als $\mathfrak{T}_3$ und suchen in dieser den Punkt e_3, der von a, b, d gleichweit entfernt ist, so liegt der gesuchte Punkt e in einer zur $\mathfrak{E}$(abd) in e_3 errichteten Senkrechten; demnach ist e_3 der $\mathfrak{N}_3$ des gesuchten Punktes. Wir haben also von dem $\mathfrak{P}$(e) den $\mathfrak{N}_1$ und den $\mathfrak{N}_3$ und können demnach durch dessen Nebenfigur seinen $\mathfrak{A}_1$, also auch seinen $\mathfrak{N}_2$ finden.

Anm. Liegen die Punkte a, b, c, d in einer Ebene, so werden die beiden zu den Ebenen abc und abd errichteten Senkrechten parallel; dann fällt der $\mathfrak{P}$(e) in's Unendliche, d. h. es giebt keinen solchen Punkt.

Fig. 44. 100. Aufg. Es sind vier Punkte a, b, c und d gegeben; man sucht einen Punkt e, welcher von den vier Ebenen abc, abd, acd und bcd gleichweit entfernt ist.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass die Punkte a, b und c in der $\mathfrak{T}_1$ liegen, und dass die $\mathfrak{G}$(ab) auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht. Dann ist die $\mathfrak{E}$(abc) die $\mathfrak{T}_1$ und die $\mathfrak{E}$(abd) $\perp$ $\mathfrak{T}_2$, und daher die $\mathfrak{G}(a_2d_2)$ ihr $\mathfrak{N}_2$. Soll nun der $\mathfrak{P}$(e) von der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{E}$(abd) gleichweit abstehen, so muss er (nach Anh. 48.) in einer $\mathfrak{E}(A_2)$ liegen, die den Winkel der $\mathfrak{E}$(abd) mit der $\mathfrak{T}_1$ halbirt. Sucht man ebenso mit Hilfe einer auf b_1c_1 senkrechten $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{E}(B_3)$, welche den Winkel $b'b_3d_3$, den die $\mathfrak{E}$(bcd) mit der $\mathfrak{T}_1$ bildet (s. 80.), halbirt, und sucht von einem Punkte f dieser Ebene den $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$, so hat man eine $\mathfrak{E}$(bcf), deren Punkte gleichweit entfernt sind von der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{E}$(bcd). Demnach ist die $\mathfrak{G}$(A), nach welcher die $\mathfrak{E}(A_2)$ von der $\mathfrak{E}$(bcf) geschnitten wird, eine Linie, deren Punkte von den Ebenen abc, abd und bcd gleichweit abstehen. Ebenso kann man eine $\mathfrak{G}$(C) finden, deren Punkte von den Ebenen abc, abd und acd gleich-

weit entfernt sind. Es ist dann der $\mathfrak{P}(e)$, nach dem sich die Geraden A und C schneiden, der gesuchte Punkt.

Anm. Da es (nach 92. Anm.) zwei Ebenen giebt, welche den Winkel zweier Ebenen halbiren, so ist der $\mathfrak{P}(e)$ unvollkommen bestimmt; es giebt acht Lagen, die er einnehmen kann. Nennen wir nemlich

die zwei Halbirungsebenen des Winkels von bca und bcd:

A und A′;

die des Winkels von acb und acd:

B und B′;

die des Winkels von abc und abd:

C und C′,

so geben A, B und C einen Punkt,
" " A, B " C′ " "
" " A, B′ " C " "
" " A, B′ " C′ " "
" " A′, B " C " "
" " A′, B " C′ " "
" " A′, B′ " C " "
" " A′, B′ " C′ " "

101. Wir wollen nun noch eine Aufgabe lösen, in der die Strahlenrisse zur Anwendung kommen sollen — eine Aufgabe, die wir schon früher in anderer Weise gelöst haben. Fig. 24.

Aufg. Eine Gerade zu finden, die zwei Gerade A, B schneidet, und mit einer dritten parallel ist.

Aufl. Wäre die letztere Gerade, und demnach auch die gesuchte, $\perp \mathfrak{T}_1$, also der $\mathfrak{R}_1$ von dieser ein Punkt, so müsste dieser Punkt zufolge der gegebenen Bedingungen in A_1 und B_1 liegen; demnach wäre der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Geraden der Punkt, wo A_1 und B_1 sich schneiden. Ist aber die Gerade, welche mit der gesuchten parallel sein soll, die $\mathfrak{G}(C)$, also ihr Riss kein Punkt, so nehmen wir ein Risssystem an, für welches der Riss der $\mathfrak{G}(C)$ ein Punkt wird; wir nehmen nemlich $\mathfrak{St}'$ zu Hilfe, und zwar so, dass $\mathfrak{G}(C)$ ein $\mathfrak{St}'$ ist, indem wir sämmtliche $\mathfrak{St}'$ $\parallel$ C wählen. Als $\mathfrak{T}'$ nehmen wir am Besten die $\mathfrak{LE}_1$ (oder $\mathfrak{LE}_2$) der $\mathfrak{G}(A)$ (oder B) an. Lassen wir $\mathfrak{T}' \mid \mathfrak{E}(A_1)$ und $\mathfrak{St}'$ $\parallel \mathfrak{G}(C)$, so ist der $\mathfrak{R}'$ der gesuchten Geraden ein Punkt, der im $\mathfrak{R}'$ von A und im $\mathfrak{R}'$ von B liegt. Suchen wir daher den

𝔑′ von B, indem wir durch einen 𝔓(b) von B einen 𝔖𝔱′ legen, zusehen, wo er die 𝔗′ trifft, und diesen Punkt mit der Spur prim von B verbinden, so ist der 𝔓(a), in welchem B′ und A (das sich selbst zum 𝔑′ hat) schneiden, der 𝔑′ und demnach der 𝔖𝔱′ (D) die gesuchte Gerade.

§. 7.

Aufgaben über das Dreikant.

102. Jede Seite und jeden Winkel eines Dreikants (s. Anh. 49.) wollen wir ein Bestimmungsstück, oder Stück desselben nennen, so dass ein Dreikant sechs Bestimmungsstücke hat. Die Aufgaben nun, die über das Dreikant zu lösen sind, bestehen darin: wenn drei seiner Stücke gegeben sind, die fehlenden zu finden. Demnach werden wir folgende Aufgaben zu lösen bekommen. Man soll die Gestalt des Dreikants und die fehlenden Stücke suchen, wenn gegeben sind:

a) drei Seiten;
b) zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel;
c) zwei Seiten und der Winkel, den eine dieser Seiten mit der fehlenden bildet;
d) drei Winkel;
e) zwei Winkel und die Seite, welche ein Schenkel von beiden ist;
f) zwei Winkel und die Seite, welche ein Schenkel des einen und nicht zugleich des anderen Winkels ist.

Fig. 45. 103. Jede Kante des Dreiecks ist von dessen Spitze s begrenzt, und geht von da aus ins Unendliche, während die Verlängerung derselben (von s aus nach entgegengesetzter Richtung) der Kante nicht angehört. Diese rückwärtige Verlängerung, die wir mit gestrichelten Linien charakterisiren wollen, soll die negative Kante heissen, und im Gegensatze dazu die eigentliche Kante, die wir mit zusammenhängenden Strichen zeichnen, die positive. Zwei positive Kanten des Dreikants bilden einen Winkel, der bekanntlich eine Seite des Dreikants vorstellt. Es ist leicht einzusehen, dass die negativen Verlängerungen dieser Kanten dieselbe Seite geben, dass dagegen

eine positive und eine negative Kante das Supplement zu der Seite bilden.

An der Kante A des Dreikants stossen zwei Seiten zusammen, die in zwei Ebenen liegen; jede dieser Ebenen wird von der Kante nebst ihrer negativen Verlängerung in zwei Theile getheilt, von denen der eine, welcher die Seite enthält, die positive Seite, der andere die negative Seite bezüglich A heissen soll Legen wir durch einen Punkt der (positiven oder negativen) Kante eine zu dieser senkrechte Ebene, so schneidet sie die beiden in dieser Kante zusammen stossen positiven Seiten, nach (zusammenhängend auszuziehenden) Geraden, die den Winkel des Dreiecks bilden; die negativen Seiten werden ebenfalls nach (gestrichelt zu zeichnenden) Geraden geschnitten, die denselben Winkel bilden, während ein negativer und ein positiver Schnitt das Supplement des Winkels vorstellt.

In allen den folgenden Aufgaben werden wir die Spitze des Dreikants mit s, dessen Kanten mit A, B, C die Winkel an diesen Kanten mit α, β, γ, die Seiten mit AB, AC, BC, das Dreikant mit ABC bezeichnen, und die Tafeln so wählen, dass $\mathfrak{T}_1$ die Seite AB enthält und die $\mathfrak{T}_2$ durch einen $\mathfrak{P}$(a) von A (der mit s nicht zusammenfällt) geht und auf A senkrecht steht, und dass das ganze Dreikant im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ (also sein $\mathfrak{R}_2$ oberhalb $\mathfrak{K}_2$ erscheint) liegt. Dann schneidet die $\mathfrak{T}_2$ die Kanten B und C in ihrem positiven oder negativen Theile in den Punkten b, c, die ausnahmsweise auch in's Unendliche fallen können, von denen b (ebenso wie a) in der $\mathfrak{K}$ liegt, während c (dessen $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{K}_1$ erscheint) seinen $\mathfrak{R}_2$ oberhalb $\mathfrak{K}_2$ (Fig. a) oder unter $\mathfrak{K}_2$ (Fig. b) hat, je nachdem dieser Punkt in der + Kante C oder in der — Kante C liegt. Ferner ist die Gerade ac die Spur zwei der Seite AC, und zwar der + oder — Seite AC in Bezug auf die Kante A, je nachdem c in der + oder — Kante C liegt. Ein Aehnliches gilt für die Seite BC.

104. Aufg. Es ist gegeben ein Dreikant, gesucht eine Seite oder ein Winkel desselben. Fig. 45.

Aufl. Soll eine Seite gesucht werden, so darf man nur (82. Anm. 1.) den Winkel suchen, den die diese Seite begrenzenden Kanten des Dreikants mit einander bilden; soll ein Winkel gesucht werden, so haben wir die Aufgabe (83.) zu lösen, den

Winkel zweier Ebenen zu finden. (Dabei haben wir immer zu beobachten, dass die Seiten und Winkel eindeutig sind, und das oben Gesagte bezüglich der + und — Kanten, + und — Seiten zu berücksichtigen).

Ist aber die Seite asb gesucht, so ist diese offenbar gleich $a_1 s_1 b_1$; und verlangt man den Winkel an der Kante sa, so ist dieser $= \bigwedge c_2 a_2 b_2$.

Sind nun Aufgaben zu lösen, in denen aus drei gegebenen Stücken die übrigen drei gesucht werden, so nehmen wir die Tafeln so an, dass diejenige Seite in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und diejenige Kante auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, welche sich behufs einfacher Lösung der Aufgabe am Besten dazu eignet, wie dies in den folgenden Aufgaben einzeln angegeben ist.

Fig. 46. 105. Aufg. Es sind gegeben die drei Seiten AB, AC, BC eines Dreikants; gesucht seine Gestalt und der Winkel α.

Aufl. Wir nehmen die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass eine der Seiten, welche den $\bigwedge \alpha$ bildet, hier die Seite AB (also auch die Kanten A und B) in ihr liegt, während wir die $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zur Kante A des Dreikants (an welche der $\bigwedge \alpha$ gebildet wird) annehmen. Betrachten wir ferner die zweite Seite AC des Dreikants als $\mathfrak{T}_3$ (die mit $\mathfrak{T}_1$ das neue Tafelsystem bildet), so können wir sie so umklappen, dass sie um $\mathfrak{K}'$ (A) gedreht wird, und der $\bigwedge A_1 C_3$ die Seite AC vorstellt; ebenso betrachten wir die dritte Seite (BC) als $\mathfrak{T}_4$ und klappen sie so um, dass sie nach $B_1 C_4$ kommt. Soll nun die Gestalt des Dreikants gesucht werden, so darf man nur bedenken, dass die Kanten A und B, da sie in der $\mathfrak{T}_1$ liegen, schon bestimmt sind, und dass dies auch von einem Punkte der dritten Kante, nemlich dem Scheitel s, gilt, um sich zu überzeugen, dass wir nur noch einen beliebigen $\mathfrak{P}$ (c) der dritten Kante C, von welcher die $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$, nemlich C_3 und C_4, schon gezeichnet sind, zu bestimmen haben. Nehmen wir diesen $\mathfrak{P}$(c) so an, dass c_3 sein $\mathfrak{R}_3$ ist, so muss sein $\mathfrak{R}_4$ (c_4) so zu liegen kommen, das $c_4 s_4 = c_3 s_3$ ist. Sucht man in der bekannten Weise aus c_3 und c_4 die Risse c_1 und c_2, so hat man das Dreikant, und da die $\mathfrak{T}_2$ auf der Kante sa senkrecht steht, so ist der an dieser Kante gebildete Winkel der $\bigwedge a_2$.

Anm. Wäre nicht ausgesprochen, dass der $\mathfrak{P}$ (c) im + Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegen soll, so könnten wir ihn auch in dem negativen

Raum dieser Tafel annehmen, und dann erhielten wir ein Dreikant, das mit dem gezeichneten symmetrisch, also nicht kongruent, ist. Die einzelnen Stücke dieses Dreikants stimmen aber mit denen des gezeichneten einzeln überein.

Da diese Anmerkung auch auf die folgenden Aufgaben sich anwenden lässt, so werden wir sie in der Folge weglassen.

106. Aufg. Es sind gegeben die Seiten AB, AC und der Fig. 46.
von ihnen gebildete $\wedge\,\alpha$; gesucht die Gestalt des Dreikants.

Aufl. Nehmen wir wieder die $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ so an, wie in der vorigen Aufgabe und ist $\wedge\, c_2 a_2 b_2 = \wedge\,\alpha$, so ist (83. Aufl. 1.) $a_2 c_2$ der $\mathfrak{R}_2$ der Seite AC; suchen wir daher wieder einen $\mathfrak{P}$(c) der Kante sc, so liegt sein $\mathfrak{R}_2$ in $a_2 c_2$. Ist wieder c_3 der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(c), so findet man, wenn $a_2 c_2 = a_1 c_3$ gemacht wird, den $\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}$(c) und daraus seinen $\mathfrak{R}_1$ (c_1). Wie man nun die fehlende Seite BC und die übrigen Stücke findet, ist bekannt.

107. Aufg. Es sind gegeben zwei Seiten AB, AC und der Fig. 47.
$\wedge\,\beta$, den die Seite AB mit der fehlenden Seite BC einschliesst; gesucht die Gestalt des Dreikants.

Aufl. Wir nehmen in diesem Falle die Tafeln am Besten so an, dass die Seite AB, welche ein Schenkel des $\wedge\,\beta$ ist, also auch die Kanten A und B, in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und dass die Kante A, welche diese Seite mit der anderen gegebenen Seite gemein hat, auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht. Ferner betrachten wir die Ebene der Seite AC als $\mathfrak{T}_3$ und klappen sie so um, dass die in ihr liegende Seite AC nach $A_1 C_3$ kommt. Suchen wir nun wieder einen in der Kante C und in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden $\mathfrak{P}$(c), dessen $\mathfrak{R}_3$ in c_3, so liegt wieder c_2 in einer aus a_2 mit dem Halbmesser $a_1 c_3$ beschriebenen Kreislinie. Da aber auch der $\mathfrak{P}$(c) der Spur zwei der Seite BC angehört, so suchen wir diese Spur, also die Spur zwei einer Ebene, deren Spur eins die Gerade B, und deren Winkel mit der $\mathfrak{T}_1$ ($\wedge\,\beta$) gegeben ist. Diese Spur zwei (bd) finden wir (nach 88.), indem wir einen beliebigen Punkt d in der $\mathfrak{T}_2$ suchen, dessen $\mathfrak{R}_1$ auf der $+$ Seite AB beliebig in $\mathfrak{K}_1$ angenommen wird, und dessen $\mathfrak{A}_1$ (oder $\mathfrak{O}_2 = \mathfrak{b}_2 \mathfrak{d}_2$) die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen andere Kathete $= d_1 \mathfrak{d}'$ und in welchem der $\wedge\,\beta$ der letzteren Kathete anliegt. (Diese $\mathfrak{A}_1$ ist hier $+$ oder $-$, je nachdem der $\wedge\,\beta$ spitz oder stumpf ist). Suchen wir nun in der gefundenen Spur einen Punkt

(c), dessen $\mathfrak{R}_2$ oberhalb $\mathfrak{K}_2$ liegt und von a_2 um die Länge $a_1 c_3$ entfernt ist, so ist das Dreikant bestimmt.

NB. Es kann je nach Umständen keinen, einen oder zwei Punkte c geben. Es gilt aber, wie schon erwähnt, nur ein solcher Punkt, der im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegt, weil ja das ganze Dreikant in diesem Raume liegend vorausgesetzt ist.

Anm. Der Schüler wird gut thun, zu seiner Uebung die vorliegende Aufgabe zu lösen, wenn von den gegebenen Seiten und Winkeln eine oder mehrere stumpf sind, und daher die negativen Kanten und Seiten zur Anwendung kommen.

Fig. 48. 108. Aufg. Von einem Dreikant sind gegeben die Seite AB und die anliegenden Winkel α und β; man sucht das Dreikant.

Aufl. Nimmt man die Tafeln wieder wie bisher an, so dass der $\wedge a_2 = \wedge \alpha$ ist, und denkt man sich wieder auf der (gesuchten) Kante C einen in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Punkt c angenommen, dessen $\mathfrak{A}_1$ man beliebig wählt, so sind seine Nebenfiguren in Bezug auf die Tafelsysteme $\mathfrak{T}_3 \mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_4 \mathfrak{T}_1$ rechtwinkelige Dreiecke $c c_1 a$ und $c c_1 c''$ (Fig. b), welche den $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(c), nemlich $c c_1$, als gemeinschaftliche Kathete haben, der die gegebenen Winkel α und β gegenüberliegen. Demnach geben die Katheten $a c_1$ und $c_1 c''$ an, wie weit in der Fig. a der Punkt c_1 von A_1 und B_1 entfernt liegt. Zieht man daher zu A_1 und B_1 Parallele in den durch die Nebenfiguren bestimmten Entfernungen, so erhält man als ihren Schnittpunkt c_1 und aus diesem c_2.

Fig. 48. 109. Aufg. Es sind gegeben zwei Winkel α, β eines Dreikants und eine Seite AC, welche der Schenkel eines dieser Winkel, hier des $\wedge \alpha$, ist; gesucht die Gestalt des Dreikants.

Aufl. Wir nehmen die $\mathfrak{T}_2$ wieder so an, dass sie auf der Kante A des $\wedge \alpha$ (der $\wedge \alpha$ ist derjenige von den beiden gegebenen Winkeln, von welchem die gegebene Seite ein Schenkel ist) senkrecht steht, und die $\mathfrak{T}_1$ so, dass die gesuchte Seite AB, die ebenfalls ein Schenkel des $\wedge \alpha$ ist, in ihr (und zwar wollen wir festsetzen, dass die Seite AB rechts von $a_1 s_1$ erscheinen soll) und die Kante sc in ihrem + Raume liegt, so ist $a_2 b_2$ der $\mathfrak{R}_2$ der Seite AB und demnach, wenn $\wedge a_2 = \wedge \alpha$, $a_2 c_2$ der $\mathfrak{R}_2$ der Seite AC. Ferner betrachten wir die Ebene der Seite AC als $\mathfrak{T}_3$ und klappen diese so um, dass die Seite AC auf $A_1 C_3$ fällt.

Sucht man nun den $\mathfrak{P}$(c) in der $\mathfrak{T}_2$, dessen $\mathfrak{R}_3$ in c_3, so liegt c_2 so in C_2, dass $a_2 c_2 = a_1 c_3$ ist. Hat man den $\mathfrak{P}$(c) gefunden, und benützt man wieder die Nebenfiguren $a_1 c c_1$ und $c'' c_1 c$ (Fig. b), so muss c_1 (Fig. a) von B_1 um die Länge $c'' c_1$ entfernt sein. Es ist also B_1 die aus s_1 an einen Kreis gezogene Tangente, welche aus c_1 mit dem Halbmesser $c_1 c''$ gezeichnet ist, und liegt B_1 rechts von A_1. Es giebt daher je nach Umständen keine, eine oder zwei Lösungen der Aufgabe.

110. Aufg. Es sind gegeben die drei Winkel α', β', γ' eines Dreikants $A'B'C'$; gesucht eine beliebige Seite desselben, z. B. die Seite $B'C'$, welche die Winkel β' und γ' bilden hilft. Fig. 49.

Aufl. Wir lösen diese Aufgabe am Besten mit Hilfe des Supplementardreikants (Anh. 51.) Denken wir uns also dieses Ergänzungsdreikant, und nennen wir die auf die Seiten asb, asc, bsc gefällten Senkrechten nacheinander C, B, A, so sind die Seiten AB, AC, BC nacheinander die Supplemente von γ', β', α' und ist die gesuchte Seite $B'C'$ das Supplement des an der Kante A gebildeten Winkels. Man findet demnach die gesuchte Seite auf folgendem Wege: Man nimmt die Supplemente der Winkel α', β' und γ', betrachtet sie als Seiten eines Dreikants (des Supplementardreikants) und sucht (105.) das Dreikant ABC und (104.) den an der Kante A gebildeten Winkel, so ist das Supplement dieses Winkels die gesuchte Seite des Dreikants ABC.

111. Wir wollen noch eine Aufgabe lösen, in welcher das Dreikant zur Anwendung kommt.

Aufg. Es soll eine Ebene gefunden werden, die mit der $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ und mit der $\mathfrak{T}_2$ den Winkel $\mathfrak{W}_2$ einschliesst.

Aufl. Denken wir uns die Ebene gefunden, so bilden ihre Spuren A, B mit der $\mathfrak{K}$, wenn wir diese drei Geraden durch ihren gemeinschaftlichen Schnittpunkt a begrenzen, die Kanten eines Dreikants, dessen Winkel $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ und der von den Tafeln gebildete rechte Winkel sind, während die zwei den Winkeln $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ gegenüberliegende Seiten der von der Spur zwei (B) mit $\mathfrak{K}$ und der von Spur eins (A) mit $\mathfrak{K}$ gekildeten Winkel sind. Da durch diese Seiten die Stellung der gesuchten Ebene bestimmt ist, so haben wir also die Aufgabe: zwei Seiten eines Dreikants zu finden, wenn dessen Winkel gegeben sind. Fig. 50.

Lösen wir nun diese Aufgabe (nach der vorhergehenden Nummer), und machen den $\wedge$ (A, $\mathfrak{K}$) = der dem $\mathfrak{W}_2$ und $\wedge$ (B, $\mathfrak{K}$) = der dem $\mathfrak{W}_1$ gegenüberstehenden Seite, so ist die $\mathfrak{E}$ (AB) eine Ebene, die mit der $\mathfrak{T}_1$, und zwar mit den zur Linken von A liegenden Theil dieser Tafel, den $\wedge$ $\mathfrak{W}_1$ und mit der $\mathfrak{T}_2$, in ähnlicher Weise, den $\mathfrak{W}_2$ bildet. Sollte die Ebene mit der rechts von A liegenden $\mathfrak{T}_1$ den $\wedge$ $\mathfrak{W}_1$, also mit der linken Seite das Supplement von $\wedge$ $\mathfrak{W}_1$ bilden, so würde sich auch für die Seite (A, $\mathfrak{K}$) der Supplementswinkel herausstellen etc.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben über Körper, die von Ebenen begrenzt sind.

§. 8.

Darstellung von Körpern, die von Ebenen begrenzt sind.

112. Wenn man einen Körper*) durch Zeichnung bestimmen will, so nimmt man die eine Tafel (z. B. die $\mathfrak{T}_1$) so an, dass der Körper in ihrem $+$ Raume sich befindet und eine Seite des Körpers in ihr liegt, während man die andere (die $\mathfrak{T}_2$) so wählt, dass sie auf einer Kante des Körpers, die in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, senkrecht steht. Ist der Körper eine Pyramide, so lässt man die Grundfläche (Anh. 57. 59.) in der $\mathfrak{T}_1$ liegen. Für das Prisma ist es vortheilhafter, die $\mathfrak{T}_1$ auf seinen Mantelflächen senkrecht anzunehmen. Man giebt nun in der $\mathfrak{T}_1$ die Risse aller Eckpunkte des Körpers an, und erhält, indem man die Risse je zweier Punkte, welche die Grenzpunkte einer Kante sind, verbindet, die Risse aller Kanten und somit den Riss des Körpers. Trägt man in der $\mathfrak{T}_2$ von den Kantenrissen aus auf die Kantenlothe die resp. $\mathfrak{A}_1$ der Punkte auf, und verbindet die so erhaltenen $\mathfrak{R}_2$ in derselben Ordnung wie die $\mathfrak{R}_1$ in der $\mathfrak{T}_1$, so erhält man die Risse der Eckpunkte und Kanten in der $\mathfrak{T}_2$, und der Körper ist bestimmt.

113. Bei weitem die meisten Körper, die man durch Zeichnung zu bestimmen hat, können nur in einer bestimmten Lage gegen den Horizont gebraucht werden; es muss daher auch diese Lage durch die Zeichnung bestimmt werden. Man nimmt zu dem Ende eine Tafel und zwar die $\mathfrak{T}_1$ (d. i. die Tafel, welche (nach 12.) so umgeklappt wird, dass vor der $\mathfrak{K}$ die $+ \mathfrak{T}_1$ sich befindet) so an, dass sie eine horizontale und daher die $\mathfrak{T}_2$

---

*) Da wir es blos mit solchen Körpern zu thun haben, die von lauter Ebenen begrenzt sind, so ist unter Körper immer ein Polyeder (Anh. 56.) zu verstehen.

so, dass sie eine vertikale Lage hat; demnach ist auch die $\mathfrak{K}$ eine Horizontallinie. Bei dieser Annahme der Tafeln nennt man den $\mathfrak{R}_1$ einer Raumgrösse **ihren Grundriss,** den $\mathfrak{R}_2$ **ihren Aufriss.** Diese Annahme der Tafeln ändert an unseren früheren Betrachtungen nichts, sondern hat blos zur Folge, dass, wenn man den nach der Zeichnung angefertigten Körper aufstellen will, dies in der Art geschehen muss, dass er die durch die (horizontale) $\mathfrak{T}_1$ vorgezeichnete Lage gegen den Horizont hat. Ferner hat dies zur Folge, dass, wenn keine Seite des Körpers parallel zum Horizont oder wenn bei einem Prisma die Mantelflächen nicht vertikal sind, die $\mathfrak{T}_1$ nicht so gewählt werden kann, wie wir es oben (112.) für sie angegeben haben. Kann man daher die Risse des Körpers nur unter der Voraussetzung auffinden, dass die $\mathfrak{T}_1$ und die $\mathfrak{T}_2$ die oben angeführten Bedingungen erfüllen, so ist man genöthigt, durch ein neues Tafelnsystem (eine $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$) den Körper zu bestimmen, und dann entweder in der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ blos anzugeben, wie der Körper gegen den Horizont liegt, oder mit Hilfe der $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Ecken und Kanten des Körpers aufzusuchen.

Besteht ein Gegenstand aus mehreren Theilen, und nimmt man zur bequemeren Bestimmung der Gestalt der einzelnen Theile besondere Tafelsysteme zu Hilfe, während man in einem Tafelsystem entweder die Risse des ganzen Gegenstandes oder wenigstens so viel angiebt, dass die Lage der einzelnen Theile gegeneinder und gegen den Horizont dadurch bestimmt ist, so nennt man die Risse der einzelnen Theile Detailzeichnungen oder Details, die Risse des ganzen Gegenstandes das Ensemble. Soll nach den Details gearbeitet werden, so zeichnet man sie in wirklicher (natürlicher) Grösse und nennt sie Werk- oder Arbeits-Zeichnungen. Das Ensemble wird gewöhnlich in einem verkleinertem (verjüngtem) Massstabe, der zur wirklichen Grösse in einfachem Verhältnisse ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ etc.) steht, gezeichnet, und so verkleinert, dass das zur Aufnahme beider Risse bestimmte Blatt, oder die beiden zur Aufnahme je eines Risses bestimmten Blätter den nöthigen Raum bieten; man schreibt dann auf das Blatt die Verjüngungung des Massstabes (z. B. $\frac{1}{4}$ natürlicher Grösse).

114. Sind a_1, b_1, c_1 und d_1 die $\mathfrak{N}_1$ von Eckpunkten eines Körpers, $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 d_1$, $a_1 c_1$, $a_1 d_1$ und $b_1 d_1$ die $\mathfrak{N}_1$ seiner Kanten, $a_1 b_1 c_1$, $a_1 b_1 d_1$ etc. die $\mathfrak{N}_1$ seiner Seiten, so enthält die Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ die $\mathfrak{N}_1$ aller Punkte des Körpers; es ist daher diese Figur der $\mathfrak{N}_1$ desselben. Betrachtet man nun den $\mathfrak{N}_1$ unseres Körpers genauer, so sicht man, dass die $\mathfrak{N}_1$ der Seiten adc und abc auf die der Seiten bad und bcd zu liegen kommen, dass daher jeder in der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ angenommene Punkt, wenn er den $\mathfrak{N}_1$ eines Punkts auf der Oberfläche unseres Körpers vorstellen soll, zwei solchen Punkten angehören kann. Nimmt man nun die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass kein Punkt des Körpers in dem — Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist von diesen beiden Punkten einer näher der $\mathfrak{T}_1$, einer entfernter von ihr. Man nennt dann den näheren einen unsichtbaren, den entfernteren einen sichtbaren Punkt des Körpers in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$ *), und eine Linie so weit eine sichtbare in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$, als ihre Punkte in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$ sichtbar sind. Um nun in der Zeichnung die sichtbaren Linien von den unsichtbaren zu unterscheiden, hat man festgesetzt, dass man die sichtbaren Linien auszieht, d. h. durch zusammenhängende Striche, wie $b_1 d_1$, die unsichtbaren strichelt, d. h. durch eine Aufeinanderfolge von kleinen Strichen, wie $a_1 c_1$, zeichnet. Ist eine Linie der $\mathfrak{N}_1$ einer sichtbaren und unsichtbaren Linie, so ziehen wir sie aus; kann jeder Punkt einer Linie nur der $\mathfrak{N}_1$ eines Punktes sein, so nennen wir sie auch sichtbar und wird sie daher durch einen zusammenhängenden Strich ausgezogen. Fig. 56.

Anm. Man kann sich leicht überzeugen, dass Alles, was wir hier gesagt haben, auch für jede andere Tafel, sowie auch für jedes andere Polyeder gilt.

115. In der vorliegenden Figur ist jede Seite der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ der $\mathfrak{N}_1$ einer Kante des Körpers abcd; jeder in $a_1 b_1$ Fig. 56.

*) Der Grund dieser Benennungen ist folgender: Wenn man sich im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ das Auge so gestellt denkt, dass es in dem den beiden Punkten gemeinschaftlichen $\mathfrak{L}_1$ sich befindet und zwar so, dass es von der $\mathfrak{T}_1$ weiter entfernt ist, als der sichtbare Punkt, so wird es diesen Punkt sehen, während dieser den anderen (unsichtbaren) Punkt verdeckt.

angenommene Punkt liegt demnach, wenn er der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes des Körpers sein soll, in der Kante ab (ist also nicht zweideutig).

Da von den übrigen Seiten der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ das nemliche, wie für die Seite $a_1 b_1$ gilt, so werden alle Seiten der Figur, welche den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers vorstellt, ausgezogen. Es kann übrigens auch vorkommen, dass eine Seite des $\mathfrak{R}_1$ eines Körpers den $\mathfrak{R}_1$ einer Seite des Körpers vorstellt, einer Seite also, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht. In diesem Falle würden die in dem Umfang dieser Seite liegenden Punkte theils sichtbare, theils unsichtbare sein, und es würde daher der $\mathfrak{R}_1$ dieser Seite ebenfalls ausgezogen, da diese Gerade der $\mathfrak{R}_1$ von sichtbaren und unsichtbaren Linien ist (s. oben 114). Es geht daraus hervor,

1) dass der Umfang des Risses eines Körpers stets ausgezogen wird. Diesen Umfang des Risses nennen wir den Umriss (Contur) und unterscheiden daher den Umriss eins und Umriss zwei.

Der $\mathfrak{R}_1$ einer Körper-Kante, der nicht im Umriss eins liegt, wird ausgezogen, wenn ein beliebig in ihr angenommener Punkt, dessen $\mathfrak{R}_1$ nicht im Umriss liegt, ein sichtbarer ist in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$. Mitunter stellt sich dies gleich heraus; so z. B. ist der $\mathfrak{P}$ d) sichtbar in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$, da er unter den Ecken unseres Körpers der entfernteste von der $\mathfrak{T}_2$ ist, und müssen daher $d_2 a_2$, $d_2 b_2$ und $d_2 c_2$ ausgezogen werden. Ebenso wird ein (nicht im Umriss eines Körpers liegender) Punkt in der $\mathfrak{T}_1$ unsichtbar sein für die $\mathfrak{T}_1$, weil er an dieser jedenfalls näher liegt, als der andere Punkt, der den $\mathfrak{R}_1$ mit ihm gemein hat. Ausserdem findet man dadurch, ob ein Punkt für eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_2$, sichtbar ist, indem man den zweiten Punkt, der mit ihm seinen $\mathfrak{R}_2$ gemein hat, aufsucht und sieht, welcher von beiden Punkten näher an der $\mathfrak{T}_2$ (die wieder so angenommen vorausgesetzt wird, dass der Körper in ihrem + Raum sich befindet) liegt (d. h. welcher eine kleinere $\mathfrak{O}_1$ hat). Hat man zwei Körperkanten (z. B. ac und bd unserer Figur), die sich kreuzen, während ihre $\mathfrak{R}_1$ sich schneiden, so kann man sich leicht überzeugen, dass nur eine von diesen Kanten in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sichtbar ist, und welche. Sucht man nemlich den Punkt der

Oberfläche des Körpers, dessen $\mathfrak{R}_1$ im Schnitte von a_1c_1 und b_1d_1 (den $\mathfrak{R}_1$ der betrachteten beiden Kanten) liegt, so ist sein $\mathfrak{R}_2$ entweder auf a_2c_2 oder auf b_2d_2; wir erhalten also zwei Punkte, die dem $\mathfrak{R}_1$ entsprechen. Von diesen ist derjenige sichtbar, der den grösseren $\mathfrak{A}_1$ (oder die grösseren $\mathfrak{O}_2$) hat, hier also der Punkt auf bd; es ist also bd sichtbar und ac unsichtbar in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$. Wir haben also den Satz

1) Wenn zwei Körperkanten sich kreuzen, ihre $\mathfrak{R}_1$ aber sich schneiden, so ist die eine sichtbar, die andere unsichtbar in Bezug $\mathfrak{T}_1$.

116. Kann der $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes eines Körpers *) mehr als zwei Punkten des Körpers angehören, wie dies bei hohlen Körpern der Fall ist, so ist der Punkt, wenn man von ihm weiss, dass er für die $\mathfrak{T}_2$ unsichtbar ist, noch nicht bestimmt, und ist demnach, wenn der $\mathfrak{R}_2$ einer Geraden des Körpers gestrichelt ist, diese Gerade ebenfalls noch nicht bestimmt. Für diese Fälle verfährt man daher so, dass man durch eine $\mathfrak{E}(A_1)$, die zur $\mathfrak{T}_2$ parallel ist, ein Stück des Körpers wegschneidet, und den $\mathfrak{R}_2$ des übrigen Stückes zeichnet, während man den $\mathfrak{R}_1$ des ganzen Körpers darstellt. Der Deutlichkeit wegen giebt man dann an, wie weit die Materie des Körpers von der Ebene durchschnitten ist, indem man den $\mathfrak{R}_2$ der Figur, welche der Durchschnitt der Ebene mit der Materie des Körpers ist, schraffirt, wie dies in der vorliegenden Figur geschehen ist. Man wird sehen, dass durch die Risse in unserer Figur die Gestalt des durch sie zu bestimmenden hohlen Körpers bestimmt ist, und dennoch dem $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes nur zwei Punkte entsprechen. Man nennt einen solchen Riss, in welchem ein Theil des Körpers weggeschnitten ist, einen Durchschnitt, und zwar einen Horizontalschnitt oder Vertikalschnitt, je nachdem die Schnittebene horizontal und daher der Grundriss, oder vertikal und daher der Aufriss ein Durchschnitt ist. Ist der Körper ein Prisma und ist die Schnittebene senkrecht zu seinen Mantel- Fig. 51.

*) Da die Punkte eines Körpers, mit denen wir es zu thun haben, stets auf seiner Oberfläche liegen, so soll unter Punkt eines Körpers stets ein Punkt seiner Oberfläche verstanden werden.

flächen, so nennt man den Durchschnitt auch das Profil des Körpers.

117. Man pflegt bei der Bestimmung von Körpern durch ihre Risse die Buchstaben, welche zur Bezeichnung der Risse von Punkten und Linien dienen, wegzulassen (höchstens wendet man Buchstaben an, um bei Gegenständen, welche aus mehreren Theilen bestehen, den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des nemlichen Theils mit demselben Buchstaben zu bezeichnen). In diesem Falle reicht man sehr oft mit zwei Rissen eines solchen Theiles nicht aus, sondern ist es nothwendig, so viele Risse zu machen, dass man daraus erkennen kann, welche Punkte die Risse des nemlichen Punktes sind. Dies ist immer der Fall, wenn Körperkanten vorhanden sind, die in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene liegen. In diesem Falle muss man immer eine $\mathfrak{T}_3$ annehmen, gewöhnlich so, dass sie auf $\mathfrak{K}$ senkrecht steht (in welchem Falle sie Seitentafel und der $\mathfrak{R}_3$ Seitenriss oder Seitenansicht heisst), annehmen und den $\mathfrak{R}_3$ des Körpers zeichnen.

118. Wenn man auch gewohnt ist, den $\mathfrak{R}_1$ unter dem $\mathfrak{R}_2$ eines Körpers zu zeichnen, und wir in unseren Blättern dies stets gethan haben, so ist das doch in der Praxis nicht immer der Fall, und ist es daher nicht selbstverständlich, dass der untere der beiden Risse der $\mathfrak{R}_1$ ist. Sind nun die Risse mit keinen Buchstaben versehen, und ist auch nicht gesagt, welches der $\mathfrak{R}_1$ ist, so wird man jeden der beiden Risse als $\mathfrak{R}_1$ betrachten können. Sehen wir nach, ob dies gleichgültig ist, und benützen wir dazu die Figur 56 (in der wir blos die Eckpunkte a, b, c, d und ihre Verbindungslinien berücksichtigen, die übrigen Punkte und Linien aber uns wegdenken).

Betrachten wir hier den unteren Riss als $\mathfrak{R}_1$ und die $\mathfrak{T}_1$ als Haupttafel, und denken wir uns die $\mathfrak{K}_2$ durch c_2 gelegt, so sind alle $\mathfrak{O}_2$ (also auch $\mathfrak{A}_1$) der Punkte positiv (die von c ausgenommen, welche = 0 ist). Es liegen also alle Punkte über der Haupttafel. Ist aber der untere Riss der $\mathfrak{R}_2$ und der obere der $\mathfrak{R}_1$, und betrachten wir die $\mathfrak{T}_2$ als Haupttafel und lassen die $\mathfrak{K}$ so wie sie vorhin war, so sind die Ordinaten in der Nebentafel eben so gross wie vorhin, aber negativ (da für die $\mathfrak{T}_1$ hinter der $\mathfrak{K}$ die $- \mathfrak{T}_1$ liegt) es liegen also jetzt die Punkte ebenso weit unter der Haupttafel, als vorhin über der-

selben. Der jetzt bestimmte Körper ist also mit dem vorhin bestimmten im Allgemeinen (wenn nemlich der Körper nicht selbst eine symmetrische Gestalt) nicht kongruent, sondern symmetrisch; man kann den einen den rechten, den andern den linken nennen. Demnach:

Je nachdem wir den unteren Riss als $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$ ansehen, bekommen wir den rechten oder linken Körper, also nicht den nemlichen, wenn nicht der Körper selbst symmetrisch ist.

Denken wir uns aber die beiden symmetrischen Körper (A und B) symmetrisch liegend, und die $\mathfrak{T}_1$ so angenommen, dass beide Körper im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ sich befinden, so ist klar, dass alle Kanten, die in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ auf A sichtbar sind, für B unsichtbar erscheinen und umgekehrt. Sind daher auch nur in einem der Risse richtig angegebene gestrichelte Linien vorhanden, so wird man daraus ersehen können, welches der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ist. Wo nicht, so muss, wenn der Körper keine symmetrische Gestalt hat, angegeben sein, welches der $\mathfrak{R}_1$ und welches der $\mathfrak{R}_2$ ist.

Anm. Man sieht hieraus, dass unrichtig angegebene gestrichelte Linien entweder zu Wiedersprüchen oder zu Fehlern führen, dass es also wichtig ist, in dieser Beziehung keine Fehler zu machen.

119. Die graphische Bestimmung eines Körpers hat zum Zweck, den Körper mit Hilfe der Zeichnung anzufertigen. Es ist daher nicht genug, dass der Körper durch die Zeichnung bestimmt ist, sondern es muss sich nach der Zeichnung arbeiten lassen, und dies ist der Fall, wenn man aus der Zeichnung alle Längen und Winkel entnehmen kann, die man zur Anfertigung des Körpers braucht. Der Zeichner muss daher die Anfertigung des Körpers kennen, damit er weiss, wie er seine Zeichnung einrichten muss, dass der darnach Arbeitende Alles darin findet, was er nöthig hat. Es dürfte daher zweckmässig sein, über die Art der Anfertigung eines Polyeders das Wesentlichste hier mitzutheilen.

1) Das Polyeder kann in der Weise ausgeführt werden sollen, dass man es aus einem sehr dünnen Material macht macht (Blech, Carton etc.), dessen Dicke unberücksichtigt bleibt;

es werden dann die einzelnen Seitenflächen aus dem Material ausgeschnitten, in der gegebenen Ordnung zusammengestellt und an den zusammenstossenden Kanten durch ein Bindemittel (Leim, Loth etc.) verbunden. In diesem Falle braucht man blos die wahre Gestalt einer jeden Seitenfläche. Man zeichnet dann die sämmtlichen Seitenflächen in einer Ebene so an einander gereiht, dass sie möglichst viele Kanten gemein haben, die ihnen auch am fertigen Körper gemeinschaftlich zukommen. Diese Zeichnung nennt man das **Netz** des Polyeders.

2) Es soll der Körper aus dem Block gemacht, d. h. so, dass der von der Oberfläche begrenzte Raum von dem Material des Körpers ganz ausgefüllt wird. In diesem Falle wählt man sich natürlich ein Stück Material, das gross genug ist, den ganzen Körper aufzunehmen, und beginnt damit, dieses Material an geeigneter Stelle eben zuzurichten (durch Feilen, Hobeln, Behauen etc.) und in dieser Ebene die in sie fallende Seite des Körpers in ihrer wahren Gestalt aufzuzeichnen *). Nun stellt man auf dem Material eine zweite Ebene her, die durch eine der in der ersten Ebene aufgezeichneten Kanten geht, und mit dieser Ebene den Winkel bildet, den die beiden Ebenen einschliessen sollen, und zeichnet in die zweite Ebene die in ihr liegende Seite des Körpers richtig ein. Um den weiteren Fortgang der Operationen zu zeigen, wollen wir den in Fig. 52 gezeichneten Körper (der eine Pyramide mit zwei Grundflächen vorstellt) zu Hilfe nehmen, und voraussetzen, dass die auf dem Material hergestellten Ebenen die Ebene der grösseren Grundfläche und die Ebene der Seite abfg seien, und dass in diesen beiden Ebenen die entsprechenden Seiten des Körpers so eingezeichnet sind, dass die ihnen gemeinschaftliche Kante ab in der Schnittlinie der beiden Ebenen liegt. Dann sind von der Seite afhc die Kanten af und ac auf das Material aufgezeichnet. Stellt man daher durch Fortschaffen des überflüssigen Materials (mittelst

*) Ist das Material Metall, so schneidet man sich die Gestalt der Seite in Blech aus (dieses nennt man dann eine Schablone oder Lehre, mitunter auch Modell), legt die Lehre auf die Ebene und zeichnet ihren Umfang mittelst einer Reissnadel (einer Stahlspitze) auf, was man aufreissen nennt.

Feilen etc.) eine Ebene her, die durch ac und af geht, so kann man diese Seite mittelst ihrer Schablone wieder auf das Material aufzeichnen; auf dieselbe Art kommt man von dieser Seite zur nächsten, von der zur vierten und zur fünften (die Schablone dieser letzten Mantelfläche kann man, wie leicht ersichtlich, entbehren, wird aber gut thun, sie der Controlle wegen zu machen). Die obere Grundfläche ist aber dann vollständig aufgezeichnet und kann (durch Feilen etc.) hergestellt werden.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Arbeitszeichnung, nach welcher der Körper hergestellt werden soll, nicht blos die Risse der Ecken und Kanten desselben enthalten muss, sondern auch die Schablonen einer Grundfläche, aller Mantelflächen, und den Winkel, den die Grundfläche mit einer Mantelfläche bildet.

Deshalb nehmen wir zur Bestimmung eines Polyeders die Tafeln so an, dass in einer, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, eine Seite des Körpers liegt (dann ist die Schablone dieser Seite gleich dem $\mathfrak{R}_1$ derselben) und dass die $\mathfrak{T}_2$ zu einer Begrenzungslinie dieser Seite (wie in Fig. 52. zur Kante ab) senkrecht steht, so dass der Winkel, den die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Seiten mit einander einschliessen in der $\mathfrak{T}_2$ (hier der $\wedge\, g_2 a_2 e_2$) gegeben ist.

In der Arbeitszeichnung geben wir dann noch die Schablonen so vieler Seiten (in der Weise, durch Umklappung, wie in Fig. 52 die Seiten $a_1 b_1 g_4 f_4$ und $a_1 c_1 h_3 f_3$) an, als nothwendig erscheinen; mitunter, bei zusammengesetzten Körpern, auch noch als nothwendig erachtete Winkel von Seitenflächen.

Anm. Würde man auf der oberen Fläche unseres Körpers, ehe sie bearbeitet ist, einen spitzigen Stift befestigen, dessen Spitze mit der Spitze der Pyramide (die man erhält, wenn man statt der oben benützten Schablone $a_1 b_1 g_4 f_4$ die Schcblone $a_1 b_1 s_4$ anwendet) zusammenfällt, so würde man, wie man sich leicht überzeugen kann, nur die in unserer Figur gezeichneten beiden Schablonen von Mantelflächen brauchen.

Zur Ausführung eines Prisma's (Fig. 53.) kann man auch so verfahren, dass man sein Profil ($a_2 d_2 h_2 f_2$) benützt. Man arbeitet auf einem beiläufig prismatischen Stab eine zu seiner Längen-

richtung senkrechte Ebene, trägt darauf mittelst Schablone das Profil und legt durch dessen Umfangslinien senkrechte Ebenen zur Profilebene, wodurch man die Mantelkanten (a_2, d_2, h_2, f_2) des Prisma's erhält. Auf diese trägt man vom Profil aus für $\mathfrak{S}(f_2)$ die Längen $\mathfrak{f}_1 f_1$ und $\mathfrak{f}_1 e_2$, für $\mathfrak{S}(h_2)$ die Länge $\mathfrak{h}_1 h_1$ und $\mathfrak{h}_1 g_1$ u. s. w. auf, wodurch man alle Ecken erhält. Stellt man dann noch die Ebenen der Grundflächen her, so ist der Körper vollendet; man braucht dazu nur die Schablone des Profils, und die Arbeit wird genauer. Daher für ein Prisma eine Darstellung, in welcher das Profil erscheint, wünschenswerth ist.

§. 5.

Aufsuchung der Risse eines Körpers.

120. Man bekommt entweder die Aufgabe, einen schon angefertigten Körper durch Zeichnung zu bestimmen oder einen noch nicht vorhandenen (einen projectirten) Körper darzustellen.

Bei dem Bestimmen eines fertigen Körpers, welches „Aufnehmen" genannt wird, ist die Lage eines beliebigen Punktes gegen alle Punkte, Gerade und Seiten des Körpers selbst, oder solcher Dinge, die mit dem Körper in eine feste Verbindung gebracht sind, unmittelbar gegeben, während bei der Bestimmung eines projectirten Körpers für jeden Punkt nur so viel Bedingungen gegeben sind, als zu seiner Bestimmung nothwendig erscheinen, und man sich daher blos an diese Bedingungen halten kann. Wir können daher über das Bestimmen von projectirten Körpern blos einige Beispiele machen, da die Bedingungen, die dabei gegeben sein können, von zu grosser Mannigfaltigkeit sind, als dass wir sie erschöpfen könnten. Dagegen wollen wir über das Aufnehmen von Körpern erschöpfende Regeln geben. Da man übrigens die Regeln über das Bestimmen von projectirten Körpern auch auf das Aufnehmen anwenden kann, so wollen wir mit der Bestimmung von projectirten Körpern anfangen.

Fig. 52. 121. Aufg. Von einer Pyramide mit ebenen Grundflächen (s. Anhang) seien gegeben eine Grundfläche und zwei aneinanderstossende Mantelflächen, und sei festgesetzt, auf welcher Seite der Grundfläche die Mantelflächen erscheinen sollen; gesucht die Risse dieses Körpers.

Aufl. Man nimmt die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie die Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ der Pyramide enthält und diese in ihrem + Raume sich befindet, die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie auf einer in der Grundfläche liegenden Kante ab senkrecht steht; ferner betrachtet man die Ebene der einen Mantelfläche als $\mathfrak{T}_3$, die der andern als $\mathfrak{T}_4$ und klappt diese Tafeln so um, dass sie ihre Kanten ($a_1 c_1$ und $a_1 b_1$) mit der $\mathfrak{T}_1$ gemein behalten und die gegebenen Mantelflächen beziehungsweise nach $a_1 b_1 g_4 f_4$ und $a_1 c_1 h_3 f_3$ kommen (wobei $a_1 f_3 = a_1 f_4$ sein muss, da beide Längen die Entfernung der Punkte a und f angeben). Soll aber der Körper eine Pyramide sein, so ist s_3 der $\mathfrak{R}_3$ und s_4 der $\mathfrak{R}_4$ der Spitze und muss daher auch $s_3 a_1 = s_4 a_1$ sein. Sollen nun die Risse der Ecken des Körpers gezeichnet werden, so ist vor allem zu bemerken, dass die Ecken der Grundfläche sich selbst zu $\mathfrak{R}_1$ haben, und dass ihre $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}_2$ liegen. Zur Bestimmung der übrigen Punkte suchen wir zunächst die Spitze, deren $\mathfrak{R}_1$ in den beiden aus s_3 und s_4 zu den Kanten $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$ beziehungsweise senkrechten Geraden liegt. Hat man so s_1, so findet man s_2 durch seinen $\mathfrak{A}_1$ der in dem Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ durch die Nebenfigur auf bekannte Weise gefunden wird. Nun kann man alle Mantelkanten zeichnen und die Punkte f, g, h dadurch finden, dass man sucht, wo die $\mathfrak{KL}'$ oder $\mathfrak{KL}''$ derselben die $\mathfrak{R}_1$ der entsprechenden Mantelkanten treffen, wodurch man f_1, g_1, h_1 findet, und daraus f_2, g_2, h_2 sucht. Um aber die übrigen Punkte der oberen Grundfläche zu finden, darf man sich nur erinnern, dass diese Punkte mit den schon gefundenen Punkten f, g, h in einer Ebene und in den Geraden sd, se liegen; sucht man also (nach 46.) den Schnitt der $\mathfrak{G}$(sd) mit $\mathfrak{E}$(fgh), so erhält man den $\mathfrak{P}$(k) und ebenso $\mathfrak{P}$(i) als Schnitt von $\mathfrak{G}$(se) mit $\mathfrak{E}$(fgh).

Hat man die Zeichnung in Blei vollendet, und soll sie mit Tusch ausgezogen werden, so muss man noch nachsehen, welche Linien gestrichelt werden. Warum in unserer Zeichnung blos $d_2 k_2$ gestrichelt ist, wird man leicht herausfinden.

122. Von einem Prisma mit ebenen Grundflächen sind gegeben eine Grundfläche und zwei zusammenstossende Mantelflächen; man soll seine Risse zeichnen. Fig. 53.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass eine Mantelfläche (hier abcd) in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und die $\mathfrak{T}_2$ auf den Mantelkanten

senkrecht steht, (so dass der $\mathfrak{R}_2$ des Prisma's zugleich sein Profil angiebt), klappe wieder die beiden übrigen gegebenen Flächen (in derselben Weise wie oben) um, und suche die Risse der ausser der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkte. Hiebei beginnen wir mit demjenigen Punkte, von dem wir zwei Risse ($\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$) haben, hier mit dem $\mathfrak{P}$(e), dessen Risse wir in derselben Art, wie in voriger Nr. die des $\mathfrak{P}$(s), finden. Hieraus ist leicht auch der $\mathfrak{P}$(f) zu erhalten (da $\mathfrak{G}$(ef) ein $\mathfrak{L}_2$ ist), und somit sind von jeder der beiden Grundflächen drei Punkte, also auch die Lage ihrer Ebenen bekannt. Um nun einen ferneren Punkt der Grundfläche begc (deren $\mathfrak{R}_4$ gegeben ist) zu finden, z. B. den $\mathfrak{P}$(g), ziehen wir aus g_4 das $\mathfrak{KL}''$ ($g_4 g''$) dieses Punktes, und suchen die $\mathfrak{O}_1''$ ($g'' g_1$), welche wir aus der Nebenfigur dieses Punktes in Bezug auf das System $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_4$ erhalten. Diese Nebenfigur ist aber ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse $g_4 g''$ mit derjenigen Kathete, welche die $\mathfrak{O}_1''$ giebt, den $\wedge \alpha''$ bildet, den die $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{T}_4$ einschliesst. Den $\wedge \alpha''$ erhalten wir aber durch die Nebenfigur $e_1 e'' e''$ (Fig. b) des Punktes e in Bezug auf das System $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_4$. Machen wir daher in dieser Figur $e'' g_4 = g'' g_4$ (der Fig. a), so erhalten wir die verlangte Nebenfigur $e'' g_1 g_4$ und damit (in Fig. a) g_1 und g_2. In derselben Art finden wir noch weitere Punkte der gegebenen Grundfläche, wenn dieselbe mehr als vier Ecken hat. Um die noch fehlenden Punkte der anderen Grundfläche zu erhalten, z. B. $\mathfrak{P}$(h), suchen wir nach bekannten Regeln, wo die $\mathfrak{G}$(gh), deren $\mathfrak{R}_2$(h_2) mit g_2 zusammenfällt, die $\mathfrak{E}$(def) schneidet.

Fig. 55. 123. Aufg. Von einem Körper, der von 6 allgemeinen Vierecken begrenzt ist, sind die wahren Gestalten dreier zusammenstossender Seiten gegeben; man sucht die Gestalten der übrigen Seiten.

Aufl. Man nimmt wieder die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass eine gegebene Seite (hier abcd) in ihr liegt, betrachtet die Ebenen der beiden anderen Seiten als $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ und zeichnet ihre Umklappungen $a_1 e_3 f_3 b_1$ und $a_1 d_1 g_4 e_4$ (wobei wieder $a_1 e_3 = a_1 e_4$). Nennen wir die vier Seiten des Körpers, welche mit der Seite abcd (die wir die Grundfläche heissen wollen) je eine Kante gemein haben, die Mantelflächen und die sechste Seite (efgh) die Deckfläche, so sind ab, bc, cd, da die Spuren eins der Mantelflächen, während

die Spur eins der Deckfläche noch zu suchen ist. Nun ist aber die Spur eins der $\mathfrak{G}$(ef) offenbar in dem $\mathfrak{P}$(i), in welchem ef und ab sich schneiden, die der $\mathfrak{G}$(eg) in k (dem Schnitte von eg und ad), also ist ik die Spur eins der Deckfläche, und demnach die von $\mathfrak{G}$(fh) in l, die von $\mathfrak{G}$(gh) in m. Betrachtet man die Deckfläche als $\mathfrak{T}_7$ und klappt sie um ihre Spur eins (ik) um, so findet man e_7 dadurch, dass $ie_7 = ie_3$ und $ke_7 = ke_4$ sein muss, f_7 wenn man $if_7 = if_3$, und g_7, wenn man $kg_7 = kg_4$ macht. Man hat so von der umgeklappten Deckfläche die Seiten ef und eg, während man die beiden anderen Seiten fh und gh dadurch finden kann, dass fh durch l (der Spur eins dieser Linie) und gh durch m geht. Betrachtet man die Mantelfläche bchf als $\mathfrak{T}_5$ und klappt sie um bc um, so findet man bch_5f_5 dadurch, dass $bf_5 = bf_3$, $lf_5 = lf_7$ und $lh_5 = lh_7$ sein muss. In gleicher Art findet man $ch_6g_6d_1$ und muss zur Probe $ch_6 = ch_5$ werden.

Anm. Wie man aus e_3 und e_4 den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ dieses Punktes findet, haben wir schon öfters gesehen. In gleicher Art können wir von den übrigen Punkten der Deckfläche, wenn es gewünscht wird, den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ finden, also sind wir auch im Stande, mittelst unserer Figur den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des Körpers zu zeichnen.

In der in vorliegender Nr. beschriebenen Art kann man von jedem Prisma und jeder Pyramide mit ebenen Grundflächen, aus drei zusammenstossenden Seiten das Netz finden.

124. Aufg. Von einem vierseitigen Prisma mit ebenen, nicht parallelen, Grundflächen sind gegeben: Drei zusammenstossende Mantelflächen abcd, aefb, cdgh; man sucht das Prisma. Fig. 57.

Aufl. Denkt man sich das Prisma gefunden, und die beiden (noch zu suchenden) Grundflächen aegd und bchf um die Kanten ad, bc umgeklappt, und stellt man sich vor, es sollen die beiden Mantelflächen aefb und cdgh verlängert werden, bis sie sich nach einer Kante mn schneiden, deren Endpunkte m, n in den entsprechenden Grundflächen aegd, bchf liegen. Betrachtet man, wie dies aus den Bezeichnungen in unserer Figur hervorgeht, aefb als $\mathfrak{T}_3$, cdgh als $\mathfrak{T}_4$, aegd als $\mathfrak{T}_5$ und bchf als $\mathfrak{T}_6$, so muss offenbar $m_3n_3 = m_4n_4$ sein, und müssen die Geraden m_3m_4 und n_3n_4 senkrecht auf ab stehen, also die

Figur $m_3 n_3 n_4 m_4$ ein Rechteck sein, dessen Ecken in den Geraden $a_1 e_2$, $b_1 f_2$, $c_1 h_4$, $d_1 g_4$ beziehungsweise liegen, und dessen Seiten gegebene Richtungen haben. *) Sucht man nun dieses Rechteck $m_3 n_3 n_4 m_4$, so kann man daraus m_5 und n_6 und somit auch e_5, g_5 und f_6, h_6 und somit das Netz des Prismas und sein Profil $a_2 e_2 g_2 b_2$ finden.

NB. Hätte das Prisma eine mehr als vierseitige Grundfläche, so müssten zu seiner Bestimmung mehr Bedingungen als oben gegeben sein, durch die man mit Hilfe des oben gezeigten Weges dessen Netz finden würde.

Fig. 58. 125. Aufg. Von einem Obelisk sind eine Grundfläche und zwei zusammenstossende Mantelflächen gegeben; man sucht die Risse seiner Ecken.

Aufl. Man nimmt die Tafeln wieder so an, dass die Grundfläche in $\mathfrak{T}_1$, eine Linie derselben $\perp \mathfrak{T}_2$ ist, und klappt die beiden Mantelflächen in der üblichen Art um, so dass $a_1 b_1 c_1 d_1$ die Grundfläche und deren $\mathfrak{R}_1$, $a_1 b_1 f_3 e_3$ und $a_1 c_1 g_4 e_4$ der $\mathfrak{R}_3$ und resp. $\mathfrak{R}_4$ der gegebenen Mantelflächen sind. (Nach der Natur des Obelisken muss ef || ab und eg || ac sein, und braucht der Schnittpunkt von ae und bf nicht mit dem von ae und cg zusammenfallen).

Wir finden nun in der bisherigen Weise die Punkte e, f, g; da noch gh || cd und fh || bd sein muss, so bestimmt sich auch der $\mathfrak{P}$(h) und damit sind alle Ecken und Kanten des Körpers bekannt.

Anm. Hätte der Obelisk fünf Mantelflächen, so würde, wie sich leicht erkennen lässt, dessen Gestalt durch die gegebenen drei Seiten nicht bestimmt sein. Es müsste dann noch ein Bestimmungsstück gegeben werden; wäre dies eine weitere Mantelfläche, so würde die Auflösung ähnlich fortgehen wie oben. Ebenso

*) Zufolge eines Satzes aus der neueren Geometrie findet man dieses Rechteck folgendermassen. Man nimmt drei seiner Eckpunkte auf den entsprechenden drei Geraden an, und sucht den vierten Punkt. Würde man dies öfter wiederholen, so läge der vierte Punkt auf einer Geraden. Sucht man daher nur zwei Lagen des vierten Punktes, so liegt in der Verbindungslinie der beiden Lagen, und natürlich auch auf der vierten Geraden, ein Eck des verlangten Rechtecks.

würde ein sechsseitiger Obelisk durch 4 Mantelflächen gefunden werden können.

126. Aufg Die Risse eines regulären Polyeders zu finden.

Aufl. Wir wollen diese Aufgabe sowohl für das reguläre Dodekaeder sowie für das Ikosaeder in zwei Fällen lösen.

1) Haben wir ein Dodekaeder zu zeichnen, dessen Seite abcde in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und denkt man sich die $\mathfrak{R}_1$ der an diese Seite anstossenden Flächen gezeichnet, so wird man leicht aus der Regelmässigkeit des Körpers erkennen, dass der Umfang der dadurch erhaltenen Zeichnung ein reguläres Zehneck bildet, dessen Ecken f_1, g_1 (da $f_1 g_1 = e_1 c_1$ ist) erhalten werden, wenn man durch c_1, e_1 Senkrechte zu $a_1 b_1$ zieht, und sucht, wo sie die Geraden $o_1 a_1$ und $o_1 b_1$ (o_1 der Mittelpunkt von $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$) schneidet. Betrachtet man die Ebene des Fünfeckes abghf als $\mathfrak{T}_3$ und klappt sie um ab in die Ebene des Blattes, so kann dies in der Art geschehen, dass dieses umgeklappte Fünfeck auf das in der $\mathfrak{T}_1$ liegende fällt, so dass f auf e_1 kommt. Man kann daher die Nebenfigur von f in Bezug auf das System $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_3$ konstruiren, und demnach auch den $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(f). In ähnlicher Art verhält es sich mit $\mathfrak{A}_1$ von h; man ist somit im Stande, den $\mathfrak{R}_2$ des Körpers zu konstruiren, was wir jedoch dem Schüler überlassen wollen. Fig. 59 a.

2) Es soll das Dodekaeder so dargestellt werden, dass eine Kante desselben in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Seitenflächen gleiche Winkel mit $\mathfrak{T}_1$ bilden. Fig. 59 b.

Wenn man sich den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers, der den gestellten Bedingungen entspricht, beiläufig skizzirt, so wird man sich leicht überzeugen, dass er die Gestalt (Fig. 59. b) annehmen wird, in welcher $a_1 b_1$ den $\mathfrak{R}_1$ zweier Kanten vorstellt (von denen eine die in der $\mathfrak{T}_1$ liegende ist), g_1 und h_1 Risse von Kanten sind, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehen (so dass $g_1 c_1$, $g_1 e_1$, $h_1 d_1$, $h_1 f_1$ die $\mathfrak{R}_1$ von vier Seiten vorstellen) und dass jedes der gezeichneten vier Fünfecke, z. B. $a_1 b_1 i_1 h_1 k_1$, der $\mathfrak{R}_1$ von zwei zur $\mathfrak{T}_1$ gleich geneigten Seiten ist. Indem man sich über die $\mathfrak{R}_1$ der zwölf Seiten Rechenschaft gegeben, ist man zu der Ueberzeugung gekommen, dass unsere Zeichnung richtig ist, und ist blos noch die Frage, wie gross die einzelnen Strecken in unserer Figur sein müssen. Zunächst nun ist leicht zu erkennen, dass $i_1 k_1$,

k_1m_1, m_1l_1 und l_1i_1 die Längen der Diagonalen eines Fünfecks haben (als Risse von Diagonalen || $\mathfrak{T}_1$) und dass a_1b_1. c_1d_1, e_1f_1 so lange, als die Kanten des Körpers sind. Da, wie schon bemerkt, f_1h_1 der $\mathfrak{R}_1$ eines Fünfeckes ist, so ist die Strecke f_1h_1 = der Höhe des Fünfeckes und die f_1k_1 gleich der Entfernung einer Seite des Fünfeckes von einer mit der Seite parallelen Diagonale. Zeichnet man sich also ein Fünfeck in seiner wirklichen Gestalt nebst Höhe und Diagonale parallel zur Grundlinie, so erhält man alle zur Konstruktion unserer Figur nothwendigen Masse.

Was den $\mathfrak{R}_2$ des Körpers betrifft, so ist leicht einzusehen, dass er dieselbe Gestalt hat, wie der $\mathfrak{R}_1$, nur muss, wenn der $\mathfrak{R}_2$ wie gewöhnlich senkrecht über $\mathfrak{R}_1$ erscheinen soll, der letztere um 90° gedreht und senkrecht hinauf geschoben worden, damit der entsprechende $\mathfrak{R}_2$ erhalten werde.

Fig. 59 c. 3) Zeichnet man den $\mathfrak{R}_1$ eines regulären Ikosaeders so, dass die Grundfläche einer von fünf zusammenstossenden Seiten gebildeten Pyramide, || $\mathfrak{T}_1$ ist, so erhält er die Gestalt (Fig. 59. c), deren Umfang ein reguläres Zehneck ist, dessen Konstruktion leicht aus der Figur entnommen werden kann. Die Bestimmung der $\mathfrak{A}_1$ der einzelnen Punkte durch Nebenfiguren in ähnlicher Art wie oben beim Dodekaeder überlassen wir dem Schüler.

Fig. 59 d. 4) Stellt man das Ikosaeder so, dass eine Kante desselben in der $\mathfrak{T}_1$ liegt und die in ihr zusammenstossenden Seiten gleiche Winkel mit der $\mathfrak{T}_1$ bilden, so erhält der $\mathfrak{R}_1$ die Gestalt (59. d), aus Gründen, die der Schüler selbst finden wird. In dieser Figur ist offenbar a_1b_1, c_1d_1, f_1g_1 gleich einer Kante des Körpers d_1f_1, c_1g_1, e_1h_1 gleich einer Diagonale der fünfseitigen Grundfläche der obengenannten Pyramide. Der $\mathfrak{R}_2$ hat wieder mit $\mathfrak{R}_1$ gleiche Gestalt, ist aber gegen diesen um 90° verdreht.

Fig. 54. a. b. u. c. 122. Aufg. Es sollen der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Körpers, dessen Gestalt bestimmt ist, der aber gegen die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ eine bestimmte Lage hat, gefunden werden.

Aufl. Es sei die $\mathfrak{E}$ (efg) die Seite eines Körpers, auf welcher ein anderer Körper (abcd) mit einer Seite so liegt, dass, wenn man die Seite $\mathfrak{E}$ (efg) als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet und so umklappt, dass die $\mathfrak{K}'$ (hier der Schnitt von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$) nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, die in der $\mathfrak{E}$ (efg) liegende Seite unseres Körpers nach $a_3b_3c_3$

fällt. Ferner sei die Gestalt des Körpers (abcd) durch seinen $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ in derselben Weise bestimmt, wie dies bisher für das Tafelsystem $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2$ festgesetzt wurde.

Wir legen nun die $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ ebenso in die Ebene unseres Zeichnungsblattes, wie gewöhnlich die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ (also so, dass $\mathfrak{K}''$ parallel zum vorderen Rande des Blattes ist, und dass hinter $\mathfrak{K}_4''$ die $+ \mathfrak{T}_4''$ erscheint) und stellen die $\mathfrak{T}_4$ so, dass eine Umfangslinie, der in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden Seite des Körpers, hier die $\mathfrak{G}$(ab), $\perp \mathfrak{T}_4$ ist. Wenn wir demnach d_4 hinter $\mathfrak{K}_4''$ annehmen, so setzen wir voraus, dass die $\mathfrak{O}_4''$, also auch der $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) positiv ist. Wie man darüber aus der Zeichnung Sicherheit gewinnt, das soll hier gezeigt werden. Haben wir die $\mathfrak{R}_3$ der gegebenen Punkte e, f, g und die $\mathfrak{R}_3$ der in der $\mathfrak{E}$(efg) liegenden Punkte a, b, c des Körpers (letztere durch die gegebene Lage derselben gegen e, f, g, z. B. durch die Entfernungen des $\mathfrak{P}$(a) von e und f) gezeichnet, ebenso den $\mathfrak{P}$(d) durch seinen $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$, so suchen wir die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Punkte a, b, c, d auf die bekannte Art mittelst der Nebenfigur. Wir werden also $\mathfrak{d}'d_3$ (Fig. c) nach ed_3 (Fig. b) tragen, in dieser Figur $d_3 d \perp \mathfrak{KL}_3$ errichten, und $d_3 d$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich $\mathfrak{d}_4'' d_4$ machen, wobei in unserer Zeichnung (Fig. b) $d_3 d$ von d_3 aus gegen den stumpfen Winkel, den $+ \mathfrak{KL}_3$ mit $\mathfrak{KL}_1$ einschliesst, gerichtet ist. Sollte nun $d_3 d$ von d_3 aus gegen den spitzen Winkel (von $+ \mathfrak{KL}_3$ mit $\mathfrak{KL}_1$) gerichtet werden, so müsste (in Fig. c) $d_4'' d_4$ negativ genommen werden. Sobald man also die verschiedenen Vorzeichen festgestellt, und auch die Richtung von $d_3 d$, so wird man mit Sicherheit das Vorzeichen von $\mathfrak{d}_4' d_4$, d. i. den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) angeben können. Wie man weiter die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Punkte findet, ist bekannt.

Anm. Hat man von dem gesuchten $\mathfrak{R}_1$ den Umfang ausgezogen, so darf man nur noch zusehen, ob der $\mathfrak{P}$(d) ein sichtbarer ist für die $\mathfrak{T}_1$; da aber hier aus dem $\mathfrak{R}_2$ dieses Punktes hervorgeht, dass er unter allen Punkten des Körpers abcd am weitesten entfernt ist von der $\mathfrak{T}_1$, so geht daraus klar hervor, dass er für diese Tafel sichtbar ist, und dass demnach die Linien $d_1 a_1$, $d_1 b_1$ und $d_1 c_1$ auszuziehen sind. In dem $\mathfrak{R}_2$ unseres Körpers muss entschieden werden, ob $a_2 c_2$ auszuziehen ist. Um dies zu erfahren, sucht man hier die zwei Punkte, welche beziehungs-

weise den Kanten ac und bd angehören, und die den Schnittpunkt von a_2c_2 und b_2d_2 zum $\mathfrak{R}_2$ haben; dann wird man finden, dass der der Kante bd gehörige Punkt der sichtbare für die $\mathfrak{T}_2$ ist (weil er der von dieser Tafel entferntere ist), dass daher b_2d_2 ausgezogen und demnach a_2c_2 gestrichelt werden muss.

128. Hat man einen Körper aufzunehmen, so nimmt man wo möglich die Tafeln so an, dass in der einen eine Seite des zu bestimmenden Körpers liegt, während man die andere Tafel zu einer Kante der in der ersteren Tafel liegenden Seite senkrecht annimmt. Diese Wahl der Tafeln ist nur dann nicht immer zulässig, wenn die eine zugleich dazu bestimmt ist, die Lage des Körpers gegen den Horizont anzugeben, d. h., wenn die $\mathfrak{T}_1$ horizontal angenommen wird. In diesem Falle werden wir eine $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ so bequem als möglich annehmen und dann mit Hilfe der $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der zu bestimmenden Punkte aufsuchen (in der Art wie in voriger Num.).

Wie man auch die $\mathfrak{T}_1$ gewählt haben mag, so werden wir nun im Stande sein, den $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes nebst seinem $\mathfrak{A}_1$ (also auch daraus seinen $\mathfrak{R}_2$) zu finden, ohne sein Loth eins (oder Loth zwei) wirklich zu errichten, also ohne besondere Apparate (z. B. Senkel) zu diesem Zwecke anzuwenden. Ist nemlich der zu zeichnende Punkt a

1) ein Punkt der $\mathfrak{T}_1$, so ist er selbst sein $\mathfrak{R}_1$ und sein $\mathfrak{A}_1$ ist $= 0$.

2) Fällt der $\mathfrak{R}_1$ des $\mathfrak{P}$(a) mit dem $\mathfrak{R}_1$ eines gegebenen Punktes b zusammen, so ist also sein $\mathfrak{R}_1$ bekannt, sein $\mathfrak{A}_1$ aber ist gleich dem $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(b) $+$ der (leicht messbaren) Entfernung der Punkte a und b.

3) Kann man die Entfernungen des $\mathfrak{P}$(a) von zwei auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Ebenen messen, so ist sein $\mathfrak{R}_1$ von den $\mathfrak{R}_1$ der Ebenen beziehungsweise eben so weit entfernt, als der $\mathfrak{P}$(a) von den Ebenen (s. 78. Satz).

4) Liegt der $\mathfrak{P}$(a) in einer schon bekannten Geraden, so braucht man nur seine Entfernung von einem bekannten Punkte derselben zu messen, um seinen $\mathfrak{R}_1$ (und $\mathfrak{A}_1$) erhalten zu können (s. 85.).

5) Liegt der $\mathfrak{P}$(a) in einer schon bekannten Ebene, so kann man die Entfernung desselben von zwei Punkten, oder zwei sich

schneidenden Geraden, oder von einem Punkt und einer Geraden, die in der Ebene liegen, messen, oder irgendwie nach planimetrischen Regeln seine Lage in der Ebene feststellen, und dann den $\mathfrak{R}_1$ (sowie den $\mathfrak{A}_1$) des $\mathfrak{P}$(a) suchen (s. 90.).

6) Ist der $\mathfrak{P}$(a) in keinem bisher aufgeführten besonderen Falle, so messen wir, wie weit er von drei schon bekannten Punkten in der $\mathfrak{T}_1$ oder, wenn das nicht möglich, wie weit er von irgend drei gegebenen Punkten entfernt ist; wie man daraus den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des Punktes erhält, ist früher (97. und 98.) gezeigt worden.

Anm. Es kommt bei einigen in dieser Num. angegebenen Verfahrungsarten zur Aufsuchung des $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes vor, dass die gefundenen Entfernungen den gesuchten $\mathfrak{R}_1$ nicht vollkommen bestimmen, sondern dass es z. B. zwei Lagen giebt, die dieser $\mathfrak{R}_1$ einnehmen kann; man muss dann am Körper sehen, welcher der richtige $\mathfrak{R}_1$ ist.

129. Hat man den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Körpers, und will man die Entfernung zweier Eckpunkte, so kann man dies nach 76; will man die Grösse eines Winkels oder die Gestalt einer Seite, so betrachtet man ihre Ebene als $\mathfrak{T}_3$ und sucht, nachdem man diese $\mathfrak{T}_3$ umgeklappt hat, den $\mathfrak{R}_3$ dieses Winkels oder der Seite; will man den Winkel zweier Seiten, so kann man ihn nach 83. erhalten.

§. 10.

Durchschnitte von Körpern mit Ebenen, Geraden und Körpern.

130. Aufg. Den Durchschnitt einer $\mathfrak{E}$(abc) mit einem Körper zu finden *). Fig. 56.

Aufl. Da alle Seiten des Körpers von der Ebene nach Geraden geschnitten werden, so ist der gesuchte Durchschnitt ein ebenes Vieleck; jedes Eck dieses Vielecks liegt demnach in zwei

*) Der Schüler wird gut thun, die Nummern 73—76, die wir zu den folgenden Aufgaben verwenden, noch einmal gründlich durchzugehen.

Seiten, also in einer Kante des Körpers. Man kann daher den gesuchten Schnitt finden, wenn man sucht, wo die Kanten des Körpers die gegebene Ebene schneiden, und diese Schnittpunkte so verbindet, dass jede Verbindungslinie einer Seite des Körpers angehört. Da aber jede Kante des Körpers eine begrenzte Linie ist, so wird der Schnittpunkt der die Kanten enthaltenden Geraden mit 𝔈 (abc) (s. 44. oder 45.) nur dann gelten, wenn er zwischen den Endpunkten der Kante liegt. Es werden daher viele Kanten die gegebene Ebene selbst dann nicht schneiden, wenn sie auch nicht parallel mit ihr sind. Kann man daher die Tafeln wählen, wie man will, so nimmt man eine von ihnen, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, so an, dass sie auf der gegebenen Ebene senkrecht steht; dann ist der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene eine Gerade (A_1) und ist nun aus dem $\mathfrak{R}_1$ unserer Figur leicht zu erkennen, dass die Kanten ab, ac, bc die $\mathfrak{E}(A_1)$ nicht mehr erreichen, während die Kanten da, db, dc die $\mathfrak{E}(A_1)$ in den Punkten e, f, g treffen, und hier das △ efg die verlangte Schnittfigur ist.

Sind aber die beiden Tafeln so gegeben, dass die gegebene Ebene keine 𝔏𝔈 ist, so wird man nicht wissen, welche Körperkanten die Ebene schneiden. Man kann dann allerdings von jeder einzelnen Kante den Schnitt mit der Ebene (nach 44. und 45.) aufsuchen; allein es werden eine Menge der gefundenen Punkte nicht (unter Umständen keiner) gelten, und man hat viele Operationen umsonst gemacht. Wie man diesem Uebel entgeht, wird weiter unten gezeigt werden. Zunächst wollen wir folgende Aufgabe, die mit Hilfe der vorliegenden Zeichnung gelöst werden kann, erledigen.

Fig. 56. 131. Aufg. Es sind gegeben ein Körper abcd und eine 𝔊 (A); gesucht ihre Schnittpunkte.

Aufl. Da jeder solche Schnittpunkt der Durchschnitt der 𝔊 (A) mit einer Seite ist, so hat man die Aufgabe zu lösen, den Durchschnitt der 𝔊 (A) mit allen Seiten aufzusuchen. Man sucht demnach den Durchschnitt der $\mathfrak{E}(A_1)$ mit unserem Körper; die Punkte h und i, wo diese Schnittfigur (efg) von der 𝔊 (A) geschnitten wird, sind dann die gesuchten Punkte.

Es giebt demnach so viele Schnittpunkte der 𝔊 (A) und des Körpers abcd, als die Fig. efg mit der 𝔊 (A) Punkte gemein hat; haben also letztere keinen Punkt gemein, so schneiden

sich die gegebenen Raumgrössen nicht. Ist die 𝔊(A) begrenzt, so gilt natürlich nur der Schnittpunkt derselben mit der Fig. (efg), welcher zwischen ihren Grenzpunkten liegt.

Anm. Das Stück hi unserer 𝔊(A), welches im Körper steckt, ist jedenfalls unsichtbar für die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ und wird daher $h_1 i_1$ und $h_2 i_2$ jedenfalls gestrichelt, oder ganz weggelassen. Ebenso wird der $\mathfrak{R}_1$ unserer 𝔊(A), so weit er nicht durch den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers geht, sichtbar sein. Dagegen wird man eine Regel haben müssen, wie man es hinsichtlich des Ausziehens mit denjenigen Stücken der Risse unserer Geraden halten soll, welche zwischen einem Riss des 𝔓(h) oder des 𝔓(i) und dem Umfang des entsprechenden Risses unseres Körpers liegt. Da gilt nun, aus Gründen, die man leicht selbst finden kann, die Regel:

Das zwischen dem $\mathfrak{R}_1(h_1)$ des Schnittpunktes einer Geraden und dem Umfang des $\mathfrak{R}_1$ des (von der Geraden geschnittenen) Körpers liegende Stück des $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden wird **zusammenhängend** ausgezogen, wenn der 𝔓(h) in einer für die $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren Seite des Körpers liegt.

132. Aufg. Den Schnitt eines Prisma's mit einer 𝔊(A) = zu finden. Fig. 60.

Aufl. Stehen die Mantelflächen des Prisma's (wie in Fig. a) senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so sind die $\mathfrak{R}_1$ der Mantelflächen die Geraden $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 d_1$, $d_1 a_1$ und der $\mathfrak{R}_1$ des ganzen Mantels ist daher der Umfang der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$, d. h. die gebrochene Linie $a_1 b_1 c_1 d_1 a_1$; wo nun diese von dem $\mathfrak{R}_1$ der 𝔊(A) geschnitten wird, da ist der $\mathfrak{R}_1$ des Schnittpunktes der 𝔊(A) mit dem Mantel des Prisma's. Es giebt also hier zwei Schnittpunkte, die sich sehr einfach finden lassen, weil der $\mathfrak{R}_1$ der von der 𝔊(A) geschnittenen Körperoberfläche eine Linie ($a_1 b_1 c_1 d_1 a_1$) war.

Sind nun (Fig. b) die Mantelflächen des Prisma's nicht senkrecht auf einer Tafel, also der Riss des Mantels keine Linie, so nehmen wir ein Risssystem an, durch welches der Riss des Prismenmantels eine Linie wird. Wir wenden nemlich Strahlenrisse an, wählen die Strahlen (𝔖𝔱′) so, dass sie parallel zu den Mantelkanten des Prisma's sind, und betrachten als $\mathfrak{T}'$ die 𝔈(B_2), in welcher die Grundfläche abcd des Prisma's liegt.

Dann sind die Mantelkanten des Prisma's 𝔖𝔱′ (also ihre ℜ′ die Punkte a, b, c, d), die Mantelflächen 𝔖𝔱𝔈′ (also ihre ℜ′ die Geraden ab, bc etc.) und der ℜ′ des Prismenmantels die (gebrochene) Linie abcda. Suchen wir nun noch (nach 75.) den ℜ′ der 𝔊(A), nemlich A′, so sind die Punkte e′, f′, in denen A′ und der ℜ′ des Prisma's (nemlich abcda) sich schneiden, die ℜ′ der Schnittpunkte. Die Schnittpunkte (e, f) selbst liegen in den durch e′ und f′ gezogenen 𝔖𝔱′ (e′e, f′f) und in der 𝔊(A).

Anm. Wäre der Körper eine Pyramide mit der Spitze s, so müssten unsere 𝔖𝔱′ so gewählt werden, dass sie durch 𝔓(s) gehen, also Centralstrahlen sind; im übrigen wäre das Verfahren das gleiche.

Fig. 61. 133. Aufg. Den Schnitt einer 𝔈(abc) mit einer Pyramide zu finden.

Aufl. Ist die Ebene, welche den Körper schneidet, keine 𝔏𝔈, und können wir daher nicht erkennen, welche Kanten des Körpers die Ebene schneiden und welche nicht, so verfahren wir im Allgemeinen so, dass wir eine $\mathfrak{T}_3$ annehmen, die auf der ersten (oder zweiten) Spur der 𝔈(abc) senkrecht steht, so dass die Ebene eine $\mathfrak{LE}_3$ wird, und lösen mittelst des Systems $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_3$ die Aufgabe in der Art, dass wir den $\mathfrak{R}_3$ der 𝔈(abc) und die $\mathfrak{R}_3$ aller Ecken des Körpers suchen, und nur in dem neuen Tafelsystem, in welchem die gegebene Ebene eine 𝔏𝔈 ist, die Eckpunkte der Schnittfigur (nach 130.) suchen. Ist dies geschehen, so gehen wir zum alten System zurück, d. h. wir suchen aus den $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_1$ der Punkte ihre $\mathfrak{R}_2$. Die Ausführung einer derartigen Aufgabe wollen wir dem Schüler überlassen.

Ist aber der Körper eine Pyramide (Fig. 61), deren Grundfläche in einer 𝔏𝔈, z. B. in der $\mathfrak{E}(A_2)$ liegt, so ist es vortheilhafter, wenn man die gegebene 𝔈(abc) (statt zur 𝔏𝔈) zur 𝔖𝔱𝔈′ macht (d. h. irgend eine Gerade derselben als 𝔖𝔱′ ansieht), und die $\mathfrak{E}(A_2)$ als 𝔗′ annimmt. Nehmen wir z. B. an, die 𝔖𝔱′ seien ∥ 𝔊(ab), so ist die 𝔊(B), nach welcher die 𝔈(abc) die $\mathfrak{E}(A_2)$ schneidet, der ℜ′ der 𝔈(abc). Der ℜ′ der Grundfläche (def) der Pyramide ist def selbst; wir suchen daher noch den ℜ′ der Spitze s (indem wir durch s einen 𝔖𝔱′ legen und den Punkt s′ suchen, in welchem dieser 𝔖𝔱′ die 𝔗′, d. h. die $\mathfrak{E}(A_2)$ schneidet). Sieht man nun zu, wo der ℜ′ der 𝔈(abc), (d. i. die 𝔊(B)) von

den $\mathfrak{R}'$ der einzelnen Körperkanten geschnitten wird, (hier von ds', es', fs' in k', h', g'), so hat man die $\mathfrak{R}'$ der Schnittpunkte. Um nun aus g' den Punkt g selbst zu erhalten, legen wir durch g' einen $\mathfrak{St}'$ (|| $\mathfrak{G}$ (ab)) und suchen den Punkt g, in welchem dieser $\mathfrak{St}'$ die Kante sf schneidet. In ähnlicher Art finden wir h und k.

Anm. 1. Ist die $\mathfrak{E}$ (abc) unbegrenzt, so verbinden wir die gefundenen Schnittpunkte, um den verlangten Schnitt zu erhalten. Ist die Ebene aber begrenzt, etwa durch ab, bc, ac, so gelten die Schnittlinien nur innerhalb der vorgezeichneten Grenzen (wie in unserer Figur der zusammenhängend ausgezogene Theil des $\mathfrak{R}_1$ des Schnittes zeigt).

Anm. 2. Hätten wir statt einer Pyramide ein Prisma, so würden wir das obige Verfahren behalten, nur würden wir, statt der Spitze s, einen beliebigen Punkt einer Mantelkante annehmen, und die $\mathfrak{R}'$ aller Mantelkanten parallel machen.

134. Aufg. Ein gegebenes dreiseitiges Prisma soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass die Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich ist. Fig. 62.

Aufl. Wir nehmen die eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu den Mantelkanten des Prisma's an, so dass dessen $\mathfrak{R}_1$ zugleich sein Profil vorstellt.

a) Ist nun dieses Profil ein rechtwinkeliges Dreieck abc (Fig. a) und soll der Schnitt einem gegebenen rechtwinkeligen Dreieck ähnlich sein, so muss das Prisma durch eine Ebene geschnitten werden, die || $\mathfrak{G}$ (ab) oder || $\mathfrak{G}$ (ac), je nachdem der Winkel der Schnittfigur, welcher dem Winkel b des Prismenprofils entspricht, grösser oder kleiner als $\wedge$ b ist. Soll in unserem Falle die Schnittfigur $\sim \triangle\, a_1 b_1 d_3$ werden, so schneiden wir das Prisma durch eine Ebene, welche $\mathfrak{G}$ (ab) enthält und durch einen $\mathfrak{P}$ (d) geht, für welchen $a_2 d_2 = a_1 d_3$ ist. Denn diese Ebene schneidet das Prisma offenbar nach einem Dreieck, dessen $\mathfrak{R}_3$ (wenn wir die Ebene als $\mathfrak{T}_3$ und ab als $\mathfrak{K}'$, um die wir umklappen, betrachten) $a_1 b_1 d_3$ ist.

b) Ist aber das Profil abc des Prisma's (wie in Fig. b) nicht rechtwinkelig, und ebenso wenig das $\triangle\, a_1 b_1 c'$, das der Schnittfigur ähnlich sein soll, so denken wir uns die schneidende Ebene gefunden, welche das Prisma $a_1 b_1 c_1$ nach einem Dreiecke ähnlich $a_1 b_1 c'$ schneidet, und behaupten, dass, wenn d_1 statt b_1, also

$\triangle acd$ statt $\triangle acb$ gegeben wäre, dieses Prisma von derselben Ebene nach einem Dreieck geschnitten würde, das ähnlich adc' ist *). Ebenso entspricht dem Prisma $e_1 b_1 c_1$ das $\triangle e_1 b_1 c'$ etc. Setzen wir nun an die Stelle von a_1, b_1 zwei Punkte d_1, e_1 von der Art, dass gleichzeitig der $\wedge e_1 c_1 d_1$ und $\wedge e_1 c' d_1 = 90^\circ$ werden, so wird von der gefunden gedachten Ebene das Prisma $e_1 d_1 c_1$ nach einem Dreiecke geschnitten, das ähnlich $\triangle e_1 d_1 c'$ ist, und da hier das Prisma sowohl, als das Dreieck *rechtwinkelig* sind, so lässt sich die Ebene (nach a) dieser Num.) finden. Es fragt sich daher nur, wie man die Punkte d_1, e_1 erhält. Da aber offenbar die Punkte e_1, c_1, d_1, c' einer Kreislinie angehören, deren Durchmesser $d_1 e_1$, so findet man den Mittelpunkt dieses Kreises, wenn man die Gerade $c' c_1$ senkrecht halbirt und den Punkt m sucht, in dem die Halbirungslinie die $a_1 b_1$ schneidet. Zeichnet man dann aus m mit mc' eine Kreislinie, so schneidet sie die Gerade $a_1 b_1$ in den verlangten Punkten e_1, d_1.

135. Die Oberflächen zweier Körper schneiden sich nach einem Vieleck, dessen Seiten Gerade sind. Jede solche Seite ist der Durchschnitt einer Seite des ersten und einer Seite des zweiten Körpers; demnach gehört jeder Eckpunkt der Schnittlinie einer Kante des einen und einer Seite des andern Körpers an. *Wir erhalten daher alle Ecken der gesuchten Schnittlinie* (die übrigens nicht in einer Ebene zu liegen brauchen, und auch im Allgemeinen nicht darin liegen), *wenn wir die Punkte suchen, in denen die Kanten des ersten Körpers den zweiten, und die, in denen die Kanten des zweiten Körpers den ersten schneiden.* Verbindet man noch diese Punkte so, *dass jede Verbindungslinie* in

---

*) Denn hat das Dreieck, nach welchem das Prisma $(a_1 b_1 c_1)$ von der Ebene geschnitten wird, die Gestalt $a_3 b_3 d_3$, welche $a_1 b_1 c'$ ähnlich ist, so wird dieselbe Ebene das Prisma $(a_1 b_1 d_1)$ nach einem Dreiecke $a_3 c_3 d_3$ schneiden, in welchem der Winkel a_3 und die Seite $a_3 c_4$ unverändert geblieben sind, aber $a_3 d_3$ in demselben Verhältnisse grösser als $a_3 b_3$ ist, wie $a_1 d_1$ grösser ist, als $a_1 b_1$. Macht man daher $ab \parallel a_3 c_3$ und $ab = a_1 b_1$ (so dass $\triangle abc_3 \cong a_1 b_1 c'$) und $bd = b_1 d_1$, so erhält man durch Zeichnung der Geraden $c_3 d$ die Länge $a_3 d_3$. Da aber $\triangle adc_3 \cong \triangle a_1 d_1 c'$, so ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

einer Seite des einen und anderen Körpers liegt, so erhält man die gesuchte Figur. Hat man für jeden Körper bestimmt, welche Seiten (unabhängig von dem anderen Körper) sichtbar sind für die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, so wird man die Seiten des $\mathfrak{R}_1$ unserer Schnittfigur ausziehen, welche für beide Körper in für die $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren Seiten liegen, und die übrigen Seiten stricheln; ähnlich so hält man es mit dem $\mathfrak{R}_2$ der genannten Figur.

Anm. Um sich leicht merken zu können, welche Schnittpunkte verbunden werden dürfen, wird man gut thun, folgendermassen zu verfahren: Sucht man den Durchschnittspunkt der Seite abc des ersten Körpers mit der Kante mn (nach der sich die Seiten mno und mnp schneiden) des zweiten und nennen wir ihn $\mathfrak{P}(1)$ *), so liegt also dieser Punkt in abc des ersten und in den Seiten mno und mnp des zweiten Körpers. Man notire sich nun dies, lösche die zur Aufsuchung des $\mathfrak{P}(1)$ angewendeten Hilfslinien weg, suche den $\mathfrak{P}(2)$, notire sich ein Aehnliches, wie beim $\mathfrak{P}(1)$ u. s. w. Man wird dann aus den Notizen sehen, welche Punkte für beide Körper auf einer Seite liegen. Der bessern Uebersicht wegen macht man sich diese Notizen in der Art, dass man die Seiten des einen Körpers in eine Reihe schreibt, und unter jede Seite die in ihr liegenden Punkte; ebenso verfährt man mit einer zweiten Reihe für den zweiten Körper. Notirt man sich gleich zu jeder Seite der beiden Reihen, ob sie für die $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ sichtbar oder unsichtbar ist, so weiss man gleich für jede Seite eines jeden Risses der Schnittfigur, ob sie ausgezogen wird oder nicht. (Die letztere Notiz wird man am Einfachsten so machen, dass man, wenn eine Seite des einen Körpers abc heisst, welche sichtbar für die $\mathfrak{T}_1$ und unsichtbar für die $\mathfrak{T}_2$ ist, in der obengenannten Reihe unter abc einen ausgezogenen, darüber einen gestrichelten Querstrich macht, wenn man sich vorgenommen hat, unten für die $\mathfrak{T}_1$ und oben für die $\mathfrak{T}_2$ zu notiren). Uebrigens kommen in der Anwendung selten andere Körper, als Prismen und Pyramiden vor; wie man aber

*) Man wird diese Schnittpunkte am Besten mit Ziffern bezeichnen, um sie von anderen Punkten zu unterscheiden.

für solche Körper die vorliegende Aufgabe vollständig löst, werden wir in den folgenden Nummern angeben.

Fig. 63. 136. Aufg. Den Durchschnitt zweier Prismen zu finden, wenn die Seitenkanten des einen Prisma's auf denen des andern senkrecht stehen und man die Tafeln beliebig wählen kann.

Aufl. Man nimmt in diesem Falle die Tafeln am Bequemsten so an, dass jede auf den Seitenkanten eines der beiden Prismen senkrecht steht. Dann ist für das auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechte Prisma der $\mathfrak{R}_1$ jeder Mantelfläche eine Gerade, der einer jeden Mantelkante ein Punkt, demnach der $\mathfrak{R}_1$ des Mantels die Linie $a_1 b_1 c_1 a_1$; ebenso ist der $\mathfrak{R}_2$ des Mantels des zweiten Prisma's die Linie $e_2 d_2 f_2 g_2 e_2$. Da ferner die Kanten der Grundfläche eines Prisma's auch in seinen Mantelflächen liegen, so haben die Grundflächen des ersten Prisma's zum $\mathfrak{R}_1$ die Figur $a_1 b_1 c_1$ (d. h. das von der Linie $a_1 b_1 c_1 a_1$ eingeschlossene Stück Tafel, also eine Fläche und nicht, wie der $\mathfrak{R}_1$ des Mantels, eine Linie). Die $\mathfrak{R}_2$ der Grundflächen haben wir (wie aus der Zeichnung ersichtlich ist) zur $\mathfrak{K}$ parallele Gerade sein lassen. Aehnlich so verhält es sich mit dem zweiten Prisma.

Suchen wir nun den Durchschnitt der beiden Prismen, so wird man aus unserer Fig. unmittelbar erkennen, dass von den Grundflächen unserer Prismen nur die obere des ersten Prisma's zum Durchschnitt kommt, und zwar sind l, m, n und o (l und m, sowie n und o haben gemeinschaftliche $\mathfrak{R}_2$) ihre Schnittpunkte mit dem Mantel des zweiten Prisma's. Sucht man nun noch die Schnittpunkte, welche in den Mantelkanten der Prismen liegen, (wobei durch die Lage derselben sich gleich herausstellt, ob eine solche Kante schneidet; so z. B. wird man unmittelbar erkennen, dass die Kanten a_1, c_1 und g_2 nicht zum Durchschnitt kommen), so hat man alle Eckpunkte der Schnittfigur und es handelt sich nun darum, sie in der rechten Ordnung zu verbinden (135.). Dies ist nun hier desshalb leicht, weil, mit Ausnahme der Punkte in einer Grundfläche, zwei Punkte der Schnittlinie nur dann für jede der beiden Flächen auf einer Seite liegen, wenn ihre $\mathfrak{R}_1$ in einer Seite des $\mathfrak{R}_1$ des ersten und ihre $\mathfrak{R}_2$ in einer des zweiten Prisma's liegen.

Benennen wir daher die gesuchte Schnittlinie dadurch (wie man es in der Elementar-Geometrie gewohnt ist), dass wir die

zur Bezeichnung ihrer Ecken benützten Buchstaben so neben einander schreiben, dass immer zwei auf einander folgende Buchstaben der nemlichen Seite der Figur angehören, so wird unsere Schnittlinie o n e d b f l m k i h o heissen, wodurch zugleich angezeigt ist, wie die Seiten unserer Schnittlinie heissen. Denn suchen wir z. B. mit welchen Punkten der $\mathfrak{P}$ (o) verbunden werden kann, so wird man finden, dass es blos die Punkte h und n sind. Denn dieser $\mathfrak{P}$ (o), welcher mit $\mathfrak{P}$ (n) auf der oberen Grundfläche des ersten Prisma's liegt und daher mit diesem verbunden werden muss, kann (nach dem $\mathfrak{R}_1$ des ersten Prisma's) nur noch verbunden werden mit h, i, m und k. Allein aus dem $\mathfrak{R}_2$ des zweiten Prisma's ergiebt sich, dass von diesen vier Punkten nur h genommen werden darf.

Anm. Wenn man nach dieser Regel die Benennung der gesuchten Schnittlinie aufsucht, so kann es sich treffen, dass man wieder zu dem Buchstaben gelangt, mit dem man angefangen hat, ohne dass man auf alle Schnittpunkte gestossen ist. In diesem Falle verfährt man mit den übrigen Schnittpunkten wieder nach obiger Regel u. s. w. Man wird daher in einem solchen Falle mehr als eine geschlossene Schnittlinie erhalten.

137. Aufg. Den Durchschnitt zweier Prismen zu finden, Fig. 64.
wenn die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ willkührlich gewählt werden können.

Aufl. Man wählt in diesem Falle die Tafeln so, dass die $\mathfrak{T}_1$ auf den Mantelkanten des einen Prisma's senkrecht steht, und dass die $\mathfrak{T}_2$ zu einer Grundfläche senkrecht ist. Dann ist der $\mathfrak{R}_1$ des Mantels jenes Prisma's eine (gebrochene) Linie, hier die Linie $m_1 b_1 d_1 f_1 g_1 m_1$ und diese ist zugleich, soweit sie auch in dem $\mathfrak{R}_1$ des anderen Prisma's liegt, hier also die Linie $a_1 b_1 d_1 f_1 g_1$ der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Schnittlinie. Denkt man sich ferner die Grundfläche des auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrechten Prisma's als $\mathfrak{T}'$ und sucht die Parallel-Risse der gesuchten Schnittpunkte mit Hilfe von $\mathfrak{St}'$, die zu den Mantelkanten dieses Prisma's parallel sind, so sind die $\mathfrak{R}_1$ dieser $\mathfrak{St}'$ parallel zu den $\mathfrak{R}_1$ der eben genannten Mantelkanten, und es sind daher a'_1, b'_1, c'_1 etc. die $\mathfrak{R}'_1$ der schiefen Risse der gesuchten Punkte (s. 73.). Sucht man hieraus die $\mathfrak{R}_2$ ($a'_2 b'_2 c'_2$ etc.) der schiefen Risse dieser Punkte, so kann man auch die $\mathfrak{R}_2$ der entsprechenden $\mathfrak{St}'$ zeichnen, und da,

wo sie von den entsprechenden $\mathfrak{KL}_2$ dieser Punkte getroffen werden, sind die $\mathfrak{R}_2$ unserer gesuchten Schnittpunkte. Schon aus den $\mathfrak{R}_1$ (a_1, b_1 etc.) und den $\mathfrak{R}_1$ (a'_1, b'_1 etc.) der schiefen Risse unserer Punkte lässt sich ersehen, dass sie in unserer Figur in der Ordnung a b d f g l e k c h a verbunden werden müssen; denn die Punkte müssen, wie schon oben erwähnt, so verbunden werden, dass jede Verbindungslinie auf einer Seite des einen und auf einer Seite des anderen Körpers liegen. Sind aber die beiden verbundenen Punkte auf einer Seite des zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Prisma's, so liegen ihre $\mathfrak{R}_1$ auf einer Seite der Grundfläche dieses Prisma's. Sind die Punkte auf einer Mantelfläche des anderen Körpers, so liegen ihre $\mathfrak{R}'$ auf einer Seite der Grundfläche dieses Körpers (weil diese der $\mathfrak{R}'$ jener Mantelfläche ist). Ferner fallen die $\mathfrak{R}_1$ der Verbindungslinien dieser Punkte zusammen mit dem $\mathfrak{R}_1$ des auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Prisma's. Dagegen sind für die $\mathfrak{T}_2$ nur die Punkte b, a, h, f, g und l, sowie die Linien ba, ah, fg und gl sichtbar. Endlich werden (nach 134.) in der $\mathfrak{T}_2$ die Kanten b h, c e, f l und a g so gezeichnet, wie in vorliegender Fig., während d k gestrichelt wird, weil es aus bekannten Gründen in dem zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Prisma unsichtbar ist für die $\mathfrak{T}_2$. Es bleibt daher nur noch übrig, anzugeben, wie man die Kanten zeichnet, welche nicht zum Durchschnitt kommen. Um darüber Aufschluss zu erhalten, darf man nur oben (114.—116.) nachsehen.

Anm. Man kann die vorliegende Auflösung auch für die Aufgabe benützen, wo der Durchschnitt eines Prisma's und einer Pyramide gesucht ist, wenn man wieder die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu den Seitenkanten des Prisma's, die $\mathfrak{T}_2$ beliebig annimmt, und die $\mathfrak{S}'$ durch die Spitze der Pyramide gehen lässt.

Fig. 65. 138. Hat man den Schnitt zweier Pyramiden zu suchen, deren Grundflächen in einer $\mathfrak{LE}$ liegen, und sind diese Grundflächen an dem Durchschnitt nicht betheiligt, so dass man blos zu suchen hat, wo die Mäntel der beiden Körper sich schneiden, so suchen wir, wo die Kanten der ersten Pyramide die zweite und wo die Kanten der zweiten Pyramide die erste schneiden und benützen dazu die Aufgabe in Nr. 132, wenden also Strahlenrisse an.

Wir betrachten zu dem Ende die Mantelkanten der einen Pyramide als 𝔖𝔱′, die der anderen als 𝔖𝔱″ und die Ebene der beiden Grundflächen, hier die 𝔈(A_2) als 𝔗′ und 𝔗″. Dann ist die Grundfläche a′b′c′ der einen Pyramide (a′b′c′d) der 𝔑′ ihres Mantels, die Grundfläche e″f″g″ der Pyramide e″f″g″h der 𝔑″ ihres Mantels *). Suchen wir nun, wo eine 𝔊″, z. B. die 𝔊(g″h), die 𝔓′ schneidet, so müssen wir den 𝔑′ von 𝔊″ suchen, und zu dem Ende in 𝔊(g″h) einen Punkt, am Besten den 𝔓(h) (der auch den anderen 𝔊″ angehört) annehmen, durch ihn den 𝔖𝔱′, d. i. die 𝔊(dh) legen und den Punkt h′ suchen, in welchem 𝔗′ von 𝔊(dh) getroffen wird. Dieser Punkt h′ ist ein Punkt des 𝔑′ der angenommenen 𝔊″, aber auch (da der 𝔓(h) jeder 𝔊″ angehört) einer jeden 𝔊″. Da ausserdem der in der 𝔗′ liegende 𝔓(g″) der 𝔑′ eines Punktes der 𝔊(g″h) ist, so ist der 𝔑′ dieser Geraden die Linie h′g″, und der Punkt g′, in welchem diese Linie dem 𝔑′(a′b′c′a′) des Mantels der 𝔓′ begegnet, ist der 𝔑′ des gesuchten Punktes g. Ebenso ist i′ der 𝔑′ eines Schnittpunktes i. Da die beiden Punkte g und i der 𝔊(g″h) angehören, und diese ein 𝔖𝔱″ ist, dessen 𝔑″ der Punkt g″, so sieht man, dass in g″ der 𝔑″ des Punktes g und des Punktes i liegt. In ähnlicher Weise behandeln wir die übrigen 𝔊″ **). Suchen wir jetzt, wo die 𝔊′ die 𝔓″ schneidet, so müssen wir den 𝔑″ der 𝔊′ suchen, und zu dem Ende in der 𝔊′ einen Punkt annehmen (am Besten den 𝔓(d), der allen 𝔊′ angehört) durch diesen Punkt einen 𝔖𝔱″, d. i. die 𝔊(dh) legen, und sehen, wo diese die 𝔈(A_2) schneidet, wodurch wir wieder auf den Punkt h′ (den wir also auch mit d″ bezeichnen könnten) geführt werden. Wenn wir demnach suchen, wo die Verbindungslinie der beiden Pyramidenspitzen, hier die 𝔊(dh), die 𝔈(A_2) schneiden, so ist dieser Schnittpunkt, hier h′, der 𝔑′ eines Punktes einer jeden 𝔊″ und der 𝔑″ einer jeden 𝔊′.

---

*) Wir wollen die erste dieser Pyramiden mit 𝔓′, die zweite mit 𝔓″ bezeichnen; ferner die Mantelkanten der ersten Pyramide mit 𝔊′, die der anderen mit 𝔊″.

**) Wir überlassen die weitere Ausführung der Zeichnung dem Schüler, und bemerken nur, dass bei der Behandlung der 𝔊(e″h) sich herausstellen wird, dass sie die 𝔓′ nicht schneidet.

Ziehen wir daher, wie schon oben angegeben, h′g″, so ist dies der 𝔑′ einer 𝔊″ und wo diese die Grundlinie (a′b′c′a′) der 𝔓′ trifft, ist der 𝔑′ einer Ecke der gesuchten Schnittfigur. Aber ebenso finden wir den 𝔑″ eines solchen Punktes, wenn wir h′b′ ziehen und suchen, wo diese Linie die Grundlinie der 𝔓″ schneidet.

Haben wir von einem Eckpunkte der Schnittfigur den 𝔑′ und 𝔑″, z. B. g′ und g″ gefunden, und soll daraus der 𝔓(g) gesucht werden, so legen wir durch g′ den 𝔖𝔱′, d h. eine nach dem 𝔓(d) führende Gerade, und durch g″ den 𝔖𝔱″ (d. h. die 𝔊(g″h)) und der Schnitt dieser beiden Strahlen (von denen einer eine Kante des einen Körpers ist) ist der 𝔓(g).

Die Ordnung, in welcher sämmtliche Ecken der Schnittfigur verbunden werden müssen, finden wir wieder dadurch, dass nur solche Punkte verbunden werden dürfen, deren 𝔑′ auf einer Seite der Grundfläche von 𝔓′ und deren 𝔑″ zugleich auf einer Seite der Grundfläche von 𝔑″ liegen. Ferner sind in Bezug auf die $𝔗_1$ die Mantelfläche deren 𝔑′ b′c′ und die deren 𝔑″ e″f″ ist, unsichtbar; in Bezug auf die $𝔗_2$ sind die Mantelflächen a′c′d und f″g″h unsichtbar.

Anm. Wäre Alles wie oben, nur dass statt der einen Pyramide, z. B. der 𝔓″, ein Prisma gegeben wäre, dann fiele die Spitze der 𝔓″ in unendliche Entfernung und müssten wir daher statt der 𝔊(dh) durch d eine Gerade ziehen, die mit den Mantelkanten des Prisma's parallel laufen, und wieder suchen den Punkt h′, in welchem diese Gerade die $𝔈(A_2)$ schneidet. Alles Uebrige bliebe wie oben.

Wären aber statt der beiden Pyramiden zwei Prismen gegeben, so fiele auch h′ in unendliche Ferne, d. h. es wären die 𝔑′ der 𝔊″ und die 𝔑″ der 𝔊′ parallel. Wir müssten dann eine Ebene annehmen, die zu beiden Prismen parallel ist, und den Schnitt dieser Ebene mit $𝔈(A_2)$ suchen. Diese Schnittlinie gäbe die Richtungen der 𝔑′ von 𝔊″ und der 𝔑″ von 𝔊′ an.

Fig. 66. 139. Aufg. Es sind gegeben zwei beliebige Pyramiden, die sich mit ihren Mantelflächen durchschneiden; man sucht ihre Schnittfigur.

Aufl. Man wählt die als frei wählbar vorausgesetzten Tafeln so, dass die eine Tafel, hier die $𝔗_2$, senkrecht steht auf der

$\mathfrak{G}(k_2)$, nach welcher die $\mathfrak{E}(A_2)$ und $\mathfrak{E}(B_2)$, in denen die Grundflächen der Pyramiden liegen, sich schneiden; die andere Tafel, hier die $\mathfrak{T}_1$ so, dass sie mit $\mathfrak{E}(A_2)$ (oder mit B_2) parallel ist.*)

Nennen wir wieder die eine Pyramide, deren Grundfläche in $\mathfrak{E}(A_2)$ liegt, die $\mathfrak{P}'$ und ihre Mantelkanten die $\mathfrak{G}'$, die andere die andere die $\mathfrak{P}''$ und ihre Mantelkanten die $\mathfrak{G}''$.

Wir könnten nun die vorliegende Aufgabe auf die vorige zurückführen, wenn wir den Schnitt der $\mathfrak{P}''$ mit der $\mathfrak{E}(A_2)$ suchten, und diesen Schnitt als Grundfläche der $\mathfrak{P}''$ betrachteten, so dass die beiden Grundflächen wieder in einer $\mathfrak{E}(A_2)$ lägen. Allein theils um die Zeichnung der neuen Grundfläche zu umgehen, theils, weil oft die Ecken dieser Grundfläche über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinausfallen, wollen wir unsere Aufgabe ohne neue Grundfläche zu lösen suchen.

Betrachten wir die Lösung der vorigen Aufgabe näher, so haben wir eigentlich, um einen Eckpunkt der Schnittfigur zu finden, durch die beiden Pyramidenspitzen d, h und eine Mantelkante ($g''h$) eine Ebene ($dg''h$) gelegt und den Schnitt dieser Ebene mit der $\mathfrak{E}(A_2)$, in welcher beide Grundflächen liegen, gesucht. Jetzt werden wir suchen müssen, wo diese Ebene ($dg''h$) die $\mathfrak{E}(A_2)$ und die $\mathfrak{E}(B_2)$ trifft, oder wo die Verbindungslinie (dh) der beiden Spitzen d und h diese beiden Ebenen schneidet.

Suchen wir daher (Fig. 66, in welcher wir die Bezeichnungen wie in voriger Figur gelassen haben) die Punkte d'' und h', nach denen die $\mathfrak{G}$(dh) die Ebenen A_2 und B_2 schneidet, und nehmen wir wieder die $\mathfrak{E}(dg''h)$ an, so schneidet diese die $\mathfrak{E}(B_2)$ nach $d''g''$ und die $\mathfrak{E}(A_2)$ nach der Geraden $h'g'$, welche die $\mathfrak{G}(g''d'')$ in einem Punkte k der Schnittlinie (k_2) der Ebenen A_2 und B_2 begegnet. Mit anderen Worten jede durch $\mathfrak{G}$(dh) gelegte Ebene schneidet die beiden Ebenen A_2 und B_2 nach einer einmal gebrochenen Linie $h'kd''$, deren Brechungspunkt k in der Schnittlinie von $\mathfrak{E}(A_2)$ und $\mathfrak{E}(B_2)$ liegt (während in der vorigen Figur, statt der gebrochenen, eine Gerade erschien). Alles andere bleibt wie in der vorigen Nr.

---

*) Ist die $\mathfrak{T}_1$ aber nicht so gewählt, so macht das an dem folgenden Gange keine Aenderung.

Die Aufgabe modifizirt sich, für den Fall zwei Prismen oder Pyramide und Prisma gegeben sind, in ähnlicher Art, wie in voriger Nr.

Anm. Wäre die Aufgabe ganz allgemein gegeben, wären nemlich die Ebenen der Grundflächen unserer Körper keine 𝔏𝔈, so wäre der Gang der Auflösung derselbe. Man müsste nemlich auch wieder die Schnittlinie der beiden Ebenen der Grundflächen, und die Punkte suchen, in den diese Ebenen von 𝔖 (dh) geschnitten werden (und diese Operationen wären, weil die Ebene keine 𝔏𝔈 sind, etwas umständlicher, als oben). Im Uebrigen bliebe Alles wie oben.

140. Sieht man voraus, oder zeigt es sich bei der Lösung der Aufgabe über den Schnitt zweier Körper (Prismen oder Pyramiden), dass eine Grundfläche beim Schnitt betheiligt ist, so sucht man den Schnitt dieser Grundfläche des einen Körpers mit dem andern (nach Nr. 133.).

141. Will man von einer Seitenfläche die wahre Gestalt derselben (mit Einschluss der darin liegenden Schnittlinie), so darf man nur diese Seite als $\mathfrak{T}_1$ betrachten, umklappen und die $\mathfrak{R}_3$ aller ihrer Punkte und Linien zeichnen.

Anhang.

Die darstellende Geometrie setzt die Kenntniss der Elementargeometrie voraus; besonders wichtig für sie sind die Erklärungen und Sätze, die wir hier folgen lassen und mit denen sich der Schüler vor Beginn des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie vertraut machen muss. Wir haben es überflüssig gefunden, denjenigen Sätzen, welche in jedem guten Lehrbuch der Geometrie zu finden sind, die Beweise beizufügen.

NB. Wir denken uns in dem Folgenden die Ebene und die Gerade *völlig unbegrenzt*.

1. Durch drei Punkte, die nicht in *einer* Geraden liegen; durch eine Gerade und einen ausser ihr liegenden Punkt; durch zwei sich schneidende und durch zwei parallele Gerade ist stets eine Ebene, aber nur eine einzige, möglich.

2. Wenn zwei Gerade weder parallel sind, noch sich schneiden, so nennt man sie sich *kreuzende* oder *windschiefe* Gerade. Durch zwei solche Gerade ist keine Ebene möglich. Unter dem Winkel zweier solcher Geraden verstehen wir den Winkel, den zwei sich schneidende Gerade bilden, die mit den sich kreuzenden beziehungsweise parallel sind.

3. Zwei Ebenen schneiden sich nach einer Geraden; man nennt sie *die Kante der beiden Ebenen*.

4. Eine Gerade und eine Ebene schneiden sich nach einem Punkt; man nennt ihn den *Fusspunkt der Geraden auf der Ebene*.

5. Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein, oder hat sie mit ihr einen Punkt gemein und ist sie zu gleicher Zeit parallel zu einer in der Ebene liegenden Geraden, so liegt sie in der Ebene.

6. Bewegt man eine Gerade so fort, dass sie eine gegebene Gerade A schneidet und zugleich entweder durch einen festen Punkt a geht, oder sich selbst parallel bleibt, so erzeugt sie eine Ebene.

7. Wenn zwei Ebenen sich nach einer Geraden A schneiden, so wird jede von ihnen durch A in zwei Theile getheilt, die wir Ebenenhälften nennen wollen. Ferner theilen sie den unendlichen Raum in vier Theile, die man Flächenwinkel nennt. Jeder solche Winkel wird von zwei Ebenenhälften gebildet, die man seine Schenkel nennt. Sind die vier von zwei sich schneidenden Ebenen gebildeten Flächenwinkel einander gleich, so nennt man jeden von ihnen einen Rechten und sagt von den Ebenen: sie stehen auf einander senkrecht.

8. Hat man drei Ebenen E_1, E_2, E_3 und schneiden sich E_1 und E_2 nach der Linie K_3, E_2 und E_3 nach K_1, E_3 und E_1 nach K_2, so müssen K_1 und K_2, weil sie beide in E_3 liegen, sich schneiden oder parallel sein. Schneiden sie sich in einem Punkte a, so liegt a in E_1, E_2 und E_3, also auch in K_3. Ist aber $K_1 \parallel K_2$, so können sich auch K_3 und K_1 nicht schneiden, weil sonst der Schnittpunkt in E_1, E_2 und E_3, also auch in K_1 und K_2 liegen müsste, und daher nicht $K_1 \parallel K_2$ wäre. Man sieht demnach, dass, wenn drei Ebenen sich nach drei Kanten schneiden, diese Kanten entweder in einem einzigen Punkte zusammenkommen, oder alle drei parallel sind.

9. Wenn eine Gerade gegen eine Ebene so steht, dass sie mit allen durch ihren Fusspunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bildet, so nennt man sie eine Senkrechte oder ein Loth zur Ebene.

10. Wenn zwei Ebenen, oder eine Gerade und eine Ebene sich nicht schneiden, so sagt man: sie sind parallel.

11. Ein Loth zu einer Ebene steht auf allen Geraden der Ebene (auch auf denen, die nicht durch seinen Fusspunkt gehen) senkrecht. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich in der Ebene, auf welcher das Loth L senkrecht steht, eine beliebige Gerade A gezogen. Zieht man nun in der Ebene durch den Fusspunkt von L eine Gerade B parallel zur Geraden A, so wird (nach 2.) der Winkel von A und L gemessen durch den Winkel von B und L; da nun dieser ein Rechter ist, so ist es auch jener.

12. Durch einen Punkt kann man zu einer Ebene nur ein Loth ziehen.

13. Durch einen Punkt kann man zu einer Ebene nur eine parallele Ebene legen.

14. Durch einen Punkt a kann man unzählige Ebenen legen, die auf einer Ebene E senkrecht stehen; alle diese Ebenen enthalten das durch a gehende Loth zur Ebene E.

15. Durch einen Punkt a kann man zu einer Ebene E unzählig viele Parallele ziehen; alle diese Parallelen liegen in einer durch a gehenden mit E parallelen Ebene.

16. Ist eine Gerade A ein Loth zu einer Ebene E, so ist jede, die Gerade A enthaltende Ebene senkrecht zur Ebene E.

17. Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede Gerade der einen Ebene parallel zur andern, und es werden daher zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene nach Parallellinien geschnitten.

18. Ist eine Gerade A nicht senkrecht zu einer Ebene E, so kann man durch A nur eine einzige zu E senkrechte Ebene legen.

19. Ist eine Ebene E_1 nicht parallel zu einer Ebene E_2, schneiden sich also diese Ebenen nach einer Geraden K, so ist nur die Gerade in E_1, welche $\parallel$ K ist, parallel zu E_2.

20. Ist eine Gerade A auf zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene E senkrecht oder ist A der Durchschnitt zweier auf E senkrechter Ebenen, so ist auch $A \perp E$.

21. Ist eine Ebene E_1 parallel zu zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene E_2, oder liegen in E_1 zwei sich schneidende Gerade, die parallel sind zu E_2, so ist $E_1 \parallel E_2$. Sind zwei Parallellinien der E_1 parallel zu E_2, so können E_1 und E_2 sich schneiden.

22. Wenn zwei Ebenen E_1, E_2 auf einander senkrecht stehen und sich nach $\mathfrak{K}$ schneiden, und eine Gerade A ist $\perp \mathfrak{K}$ und zugleich entweder parallel zu E_2 oder liegt in E_1, so ist $A \perp E_1$.

23. Wenn eine Gerade A senkrecht steht auf den Ebenen E_1 und E_2, so ist $E_1 \parallel E_2$.

24. Wenn eine Gerade A und eine Ebene E_1 senkrecht stehen auf einer Ebene E_2, so ist $A \parallel E_1$, oder es liegt A in E_1.

25. Wenn zwei Ebenen parallel sind, so ist ein Loth zur einen Ebene auch senkrecht zur andern.

26. Ist eine Gerade A senkrecht zu einer Ebene E, und eine Gerade $B \parallel A$, so ist auch $B \perp E$.

27. Stehen zwei Gerade auf der nemlichen oder auf parallelen Ebenen senkrecht, so sind die Geraden parallel.

28. Ist eine Gerade parallel zu zwei Ebenen, so ist sie es auch zu deren Kante.

29. Ist eine Gerade A parallel zu einer Ebene E_1, und legt man durch A eine Ebene E_2, die E_1 nach der Geraden B schneidet, so ist B || A.

30. Wenn eine Gerade A parallel ist zu einer Geraden B einer Ebene E, so ist A || E.

31. Wenn eine Gerade A senkrecht steht auf einer Geraden B (s. oben 2.), so kann man durch B eine Ebene legen, die ⊥ A ist, und umgekehrt.

32. Durch einen Punkt a kann man unzählige Gerade legen, die auf einer Geraden A senkrecht stehen; alle jene Geraden liegen in einer Ebene, die durch a geht und ⊥ A ist.

33. Legt man durch zwei Parallellinien A, B einer Ebene E die Ebenen E_1, E_2 senkrecht zur E, so ist E_1 || E_2.

34. Ist eine Ebene E parallel zu einer Geraden A und legt man durch einen Punkt der E eine Linie B || A, so liegt B in E.

35. Sind zwei Ebenen auf einander senkrecht und legt man durch einen Punkt der einen Ebene ein Loth zur zweiten, so liegt dieses in der ersten.

36. Sind zwei Ebenen parallel und legt man durch einen Punkt der einen eine Parallellinie zur anderen, so liegt sie in der ersten Ebene.

37. Sind eine Ebene E und eine Gerade A auf einander senkrecht, und legt man durch einen Punkt der E eine Gerade B ⊥ A, so liegt B in E.

38. Sind zwei sich schneidende Gerade A, B zu zwei sich schneidenden Geraden C, D beziehungsweise parallel, so ist der von A und B gebildete spitze Winkel gleich dem von C und D gebildeten, und ist die Ebene, in welcher A und B liegen, parallel zu der von C und D.

39. Sind zwei sich schneidende Ebenen E_1, E_2 resp. parallel zu den Ebenen E_3, E_4, so sind die spitzen Flächenwinkel, die E_1

und E_2 einerseits und E_3 und E_4 andererseits bilden, einander gleich; ferner ist dann die Kante von E_1 und E_2 parallel zu der von E_3 und E_4.

40. Die Entfernung eines Punktes von einer Ebene wird erhalten, wenn man durch den Punkt ein Loth zur Ebene legt, und von dem Punkt bis zum Fusspunkt des Lothes misst.

41. Die Entfernung einer Geraden A von einer zu ihr parallelen Ebene E ist gleich der Entfernung eines Punktes der Geraden von der Ebene E. Ebenso ist die Entfernung zweier paralleler Ebenen gleich der Entfernung eines Punktes der einen Ebene von der anderen.

42. Die Entfernung einer Geraden A von einer sie kreuzenden Geraden B wird gefunden, wenn man eine Ebene E annimmt, die die A enthält und mit B parallel ist; die Entfernung der B von der E ist dann gleich der Entfernung der sich kreuzenden Geraden A und B.

43. Der Winkel einer Geraden A mit einer Ebene E ist gleich dem Winkel, den A mit der Geraden B bildet, nach welcher E von einer durch A gehenden zu E senkrechten Ebene geschnitten wird. Es ist daher der spitze Winkel, der von A und E gebildet wird, der Complementswinkel desjenigen spitzen Winkels, den A mit einem Loth zur E bildet.

44. Der Winkel zweier Ebenen wird gemessen durch den Winkel, den die Geraden bilden, nach denen die Ebenen von einer zu ihnen senkrechten Ebene geschnitten werden.

45. Hat man zwei Ebenen E_1, E_2, die einen spitzen Winkel W mit einander bilden, und ist eine Gerade $A \perp E_1$, so ist der spitze Winkel, den A mit E_2 bildet, gleich einem Rechten weniger W.

46. Nimmt man zwischen den Schenkeln eines Flächenwinkels einen Punkt a an und zieht von ihm aus Lothe zu diesen Schenkeln, welche diese resp. in den Punkten b, c treffen, so ist die Summe des Flächenwinkels und des $\wedge$ bac gleich zwei Rechten. Denn die $\mathfrak{E}$(abc) steht senkrecht auf der Kante unseres Flächenwinkels und schneidet diese in einem Punkte d. Denkt man sich daher db und dc gezogen, so erhält man ein Viereck, in welchem $\wedge$ bdc gleich dem Flächenwinkel ist, wäh-

rend die Winkel dba und dca Rechte sind. Da aber die vier Winkel unseres Vierecks = 4 R sind, so ist $\wedge$ bdc + $\wedge$ bac = 2 R.

47. Steht eine Ebene auf einer Geraden ab in ihrem Mittelpunkte senkrecht, so ist jeder Punkt der Ebene gleichweit entfernt von den Punkten a und b.

48. Halbirt man einen Flächenwinkel durch eine Ebene, so ist jeder Punkt dieser Ebene gleichweit entfernt von den Schenkeln des Flächenwinkels.

49. Denkt man sich von einem Punkte a aus beliebig viele Gerade A, B, C etc. gezogen und durch A und B, B und C, C und D etc. Ebenen gelegt, welche von den genannten in ihnen liegenden Geraden begrenzt werden, so nennt man das dadurch erhaltene Gebilde ein Raumeck, Eck, Spitze oder Vielkant, den 𝔓 (a) seinen Scheitel, die Geraden A, B etc. seine Kanten, die Winkel, welche A und B, B und C etc. bilden, seine Seiten, die Winkel, welche die Ebenen zweier unmittelbar auf einander folgender Seiten bilden, die Winkel des Ecks. Ferner nennt man dieses Gebilde ein 3, 4, 5 etc. seitiges Eck, oder ein 3, 4, 5 etc. kant, je nachdem es 3, 4, 5 etc. Seiten oder Kanten hat. Endlich nennt man jede Ebene, welche zwei Kanten des Ecks enthält, ohne mit einer Seite desselben zusammenzufallen, eine Diagonalebene.

50. Denkt man sich von einem Punkte a aus drei Gerade A, A', A'' gezogen, welche nicht in einer Ebene liegen, so nennt man dieses Gebilde ein Dreikant, und zwar das Dreikant AA'A''; die Geraden A, A', A'' seine Kanten, a seinen Scheitel. Ferner nennt man den hohlen Winkel, welcher von zwei Kanten des Dreikants gebildet wird, eine Seite desselben, so dass das Dreikant die drei Seiten AA', AA'' und A'A'' hat. Je zwei Kanten des Dreikants bestimmen eine Ebene, und je zwei solcher Ebenen bilden einen hohlen Winkel, dessen Kante eine Kante des Dreikants ist, und der schlechtweg Winkel des Dreikants genannt wird. Wir wollen diese Winkel mit dem Buchstaben α bezeichnen und diesem Buchstaben so viele Accente (Striche rechts oben) geben, als der Buchstabe A hat, der seine Kante bezeichnet, so dass die Winkel des Dreikants, die A, A', A'' zu Kanten haben, nach einander mit α, α' α'' bezeichnet werden.

51. Nimmt man in dem Raume, der von den drei das Dreikant bildenden Ebenen eingeschlossen wird, einen Punkt b an, und fällt von ihm aus auf die Seiten AA', AA'', A'A'' nach einander die Senkrechten B'', B', B *), so erhält man ein neues Dreikant, dessen Seiten BB', BB'', B'B'' (nach 46.) nach einander gleich den Supplementswinkeln von α'', α', α sind. Da aber B $\perp$ A'A'' und B' $\perp$ AA'', so ist auch BB' $\perp$ A'' (s. 16. und 20.). Ebenso ist A' $\perp$ BB'' und A $\perp$ B'B''. Nennen wir daher die an den Kanten B, B', B'' gebildeten Winkel nach einander β, β', β'', so sind auch die Seiten BB', BB'', B'B'' Supplemente zu den Winkeln β'', β', β. Man nennt daher von diesen Dreikanten das eine das Supplementar- (Ergänzungs-) Dreikant des anderen.

52. Die Summe zweier Seiten eines Dreikants ist stets grösser, als die dritte Seite.

53. Die Summe der Seiten eines Dreikants ist stets grösser als 0^0 und kleiner als 360^0.

54. Da eine Seite des Dreikants der hohle Winkel zweier Kanten ist, so ist jede Seite $> 0^0$ und $< 180^0$. Ebenso ist jeder Winkel des Dreikants $> 0^0$ und $< 180^0$. Betrachtet man nun ein gegebenes Dreikant, z. B. das (AA'A'') als Supplementardreikant eines Dreikants (BB'B''), so ist (wenn wir die oben (50.) eingeführte Bezeichnueg beibehalten) $\alpha'' = 180^0 - BB'$, $\alpha' = 180^0 - BB''$, $\alpha = 180^0 - B'B''$, und demnach $\alpha'' + \alpha' + \alpha = 540^0 - (BB' + BB'' + B'B'')$. Da aber $BB' + BB'' + B'B'' > 0^0$ und $< 360^0$, so ist $\alpha'' + \alpha' + \alpha < 540^0$ und $> 180^0$. **Es ist also die Summe der Winkel eines Dreikants stets kleiner als 6 Rechte und stets grösser als 2 Rechte.**

55. Ein Dreikant ist bestimmt (theils eindeutig, theils zweideutig), wenn von den 3 Seiten und 3 Winkeln desselben, die zusammen 6 Stücke bilden, 3 Stücke gegeben sind.

56. Einen von lauter Ebenen begrenzten Körper nennt man ein Polyeder. Jede Grenzfläche desselben ist eine ebene Figur

*) Man wird bemerken, dass die Senkrechte so viel Accente hat, als die Kante des Dreikants, die in der Ebene, auf der jene senkrecht steht, **nicht** liegt; z. B. B'' so viel als A'', welche in der Seite AA' nicht liegt.

und wird seine Seite genannt; den Durchschnitt zweier Seiten nennt man eine Kante des Polyeders, und den Punkt, in dem mehrere Kanten zusammenstossen, ein Eck desselben.

57. Hat ein Polyeder drei oder mehr parallele Kanten, deren Endpunkte sämmtliche Ecken des Körpers bilden, so nennt man diesen Körper ein Prisma. Die Anfangspunkte sowie die Endpunkte der parallelen Kanten bilden gewöhnlich eine ebene (mitunter unebene) Figur, die man die Grundfläche des Prisma's nennt, die übrigen Seiten (in denen also parallele Kanten liegen) heisst man die Mantelflächen, die parallelen Kanten die Mantelkanten, die Kanten in den Grundflächen die Grundkanten, den Inbegriff aller Mantelflächen den Mantel des Prisma's, und das Prisma so vielseitig, als es Mantelflächen oder Mantelkanten hat

Liegen die beiden Grundflächen eines Prisma's in parallelen Ebenen, so nennt man es ein schiefes oder senkrechtes, je nachdem diese Ebenen schief oder senkrecht zu den Mantelkanten stehen.

Sind die Grundflächen eines Prisma's Parallelogramme, die in parallelen Ebenen liegen, so nennt man das Prisma ein Parallelopiped.

58. Schneidet man ein Prisma durch zwei parallele Ebenen, welche alle Mantelkanten (s. 57.) durchschneiden, so sind ihre Schnitte kongruente Figuren, die so viele Seiten haben, als das Prisma Mantelflächen hat. Steht eine solche Schnittebene zugleich senkrecht auf den Mantelflächen, so nennt man ihren Durchschnitt mit dem Prisma das Profil des Prisma's.

59. Schneiden sich drei oder mehr Kanten eines Polyeders wirklich oder in ihren Verlängerungen in einem Punkte, und sind die Endpunkte dieser Kanten zugleich sämmtliche Ecken des Körpers, so nennt man den Körper eine Pyramide, die sich schneidenden Kanten die Mantelkanten, die durch je zwei auf einander folgende Mantelkanten gehenden Seiten die Mantelflächen der Pyramide.

Kommen die Mantelkanten wirklich in einem Punkte zusammen, so nennt man diesen Punkt die Spitze. Die anderen Endpunkte der Mantelkante, die gewöhnlich in einer Ebene liegen, bilden die Grundfläche der Pyramide. Schneiden sich

die Mantelkanten nicht wirklich (sondern erst in der Verlängerung) in einem Punkte, so hat die Pyramide zwei Grundflächen.

Schneidet man eine Pyramide durch zwei parallele Ebenen, so sind die Schnitte ähnliche Figuren.

60. Hat ein Körper zwei parallele Seitenflächen, deren Seitenlinien beziehungsweise parallel laufen, während die übrigen Seitenflächen Parallel-Trapeze sind, so heisst der Körper ein Obelisk; die parallelen Seitenflächen nennt man die Grundflächen, die Trapeze die Mantelflächen des Obelisk.

61. Legt man die Seiten eines Raumecks oder eines Körpers so in eine Ebene, dass immer zwei Seiten die Kante gemein haben, mit der sie am Raumeck oder resp. Körper selbst zusammenstossen, so nennt man die dadurch erhaltene Zeichnung das Netz des Raumecks oder resp. des Körpers.

62. Zum Schlusse geben wir hier noch die Auflösung einer Aufgabe, der man in der darstellenden Geometrie mitunter vortheilhaft anzuwenden Gelegenheit hat. Wir meinen die Aufgabe, einen Punkt oder eine Gerade in einer begrenzten Ebene zu finden, die zu Punkten oder Linien, die in dieser Ebene, aber ausserhalb ihrer Grenzen, liegen, in bestimmten Beziehungen steht. Wir wollen die Lösung dieser Aufgabe an folgendem speziellen Fall zeigen:

Aufg. Es ist ein Punkt gesucht, der von den (ausserhalb der Grenzen der Figur mnop liegenden) Punkten, in denen sich die Geraden A und B und die Geraden A und C schneiden, gegebene Entfernungen hat (Fig. 67.).

Aufl. Man nehme in unserer Ebene mnop einen Punkt an, am Besten einen Punkt in einer der gegebenen Geraden, z. B. den Punkt a in der Geraden A, und ziehe die beliebigen Geraden ab, ac, von denen eine die Gerade B (in b), die andere die Gerade C (in c) schneidet, trage von a aus auf ab und ac die Längen ad und ae so, dass ad : ab = ae : ac (wie 1 : 2 z. B.) und ziehe durch d und e die zu den Geraden B und C resp. Parallelen D und E, so ist das von den Geraden A, D und E eingeschlossene Dreieck fgh dem ähnlich, welches von den Geraden A, B und C gebildet wird. Sucht man nun einen Punkt i, dessen Entfernungen von den Punkten f, g (in welchen Punkten sich die Geraden A und D, A und E schneiden) zu den gege-

benen Entfernungen beziehungsweise in demselben Verhältnisse stehen, wie ad : ab (in unserer Figur wie 1 : 2), zieht ai und trägt darauf von a aus eine Länge ak, welche sich zu ai wie ab : ad (in der Fig. = 2 : 1) verhält, so ist k der gesuchte Punkt.

Ist unter ähnlichen Voraussetzungen eine Gerade gesucht, so sucht man in der oben angegebenen Art zwei Punkte der Geraden. Dabei sind dann die den Punkten i und k entsprechenden (homologen) Geraden zu einander parallel.

Ist aber eine Gerade gesucht, die durch den Punkt a (Fig. 68.) und den Schnittpunkt der Geraden A und B geht, so kann man diese Gerade auch finden, wenn man zwei parallele Gerade bc, de zeichnet, welche die Geraden A, B in den Punkten b und c, d und e schneiden, und von denen eine (bc) durch a geht. Theilt man nun de durch den Punkt f so, dass df : fe = ba : bc, so ist f ein Punkt der gesuchten Geraden.

Druck von Bieling (Dietz) in Nürnberg.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die grosse Frequenz, deren sich die hiesige polytechnische Schule seit zwei Jahren zu erfreuen hat, nöthigte mich, meinen Unterricht theilweise doppelt zu geben. Dieser Umstand und anderweitige unvorhergesehene Amtsgeschäfte haben es mir unmöglich gemacht, den vorliegenden Band (II), meinem in dem Vorworte zum Bande I gegebenen Versprechen gemäss, erscheinen zu lassen.

Dieser Band II ist als zweite Auflage meines „Lehrbuchs der darstellenden Geometrie für polytechnische Schulen" zu betrachten. Da aber unter diesen polytechnischen Schulen diejenigen älteren Datums gemeint sind, welche eigentlich Mittelschulen waren, während die neue Auflage für technische Hochschulen bestimmt ist, so musste diese Auflage bedeutend erweitert werden. Dass dies in der That geschehen, lehrt schon ein Vergleich des äusseren Umfangs, mehr noch ein Vergleich der Inhaltsverzeichnisse beider Auflagen. Ganz besonders aber wird man natürlich die vorgenommenen Erweiterungen und angebrachten Verbesserungen beurtheilen können bei einem genaueren Eingehen auf den Inhalt dieses Buches. Man wird sich dabei überzeugen, dass ich bestrebt war, Alles aufzunehmen, was dem Techniker aus der darstellenden Geometrie allenfalls von Nutzen sein könnte. Bei diesen Erweiterungen des Buches habe ich aus der neueren Literatur hauptsächlich das vortreffliche Werk von De la Gournerie benützt. Dass ich aber vieles Neue selbstständig hinzugefügt, vieles auf eigenthümliche Art hergeleitet, wird jeder Fachmann leicht herausfinden.

Man wird auch in diesem Buche viele neue Namen lesen, die ich in meinem Unterrichte gebrauche, und die ich mir hiemit zur Einführung vorzuschlagen erlaube, da bisher vorkommende Namen für die entsprechenden Dinge sehr häufig reine Uebersetzungen aus dem Französischen sind, und daher nichts weniger, als deutsch klingen. So wird man dem Namen „Fläche gleichen Fallens“ (von surface d'egal pente) gewiss sofort anmerken, dass er nicht ursprünglich deutsch ist, und wird man nicht leugnen können, dass der von mir dafür vorgeschlagene Name „Böschungsfläche“ sich besser empfiehlt.

Den Forderungen der Kritik entsprechend, habe ich die Abkürzungen möglichst vermieden, und nur so viel davon beibehalten, als ohne alle Beschwerde beibehalten werden kann. Aber ich muss gestehen, gerade in diesem Bande könnte man Abkürzungen mit grossem Vortheile anwenden. Nicht der Raumersparniss und um dadurch das Buch wohlfeiler zu machen, wie das von einer Seite vermuthet worden, liebe ich die Abkürzungen; nein! der Uebersichtlichkeit wegen bediene ich mich gerne derselben. Wenn ich das Zeichen: 𝔚𝔉 (ABC) sehe, so erkenne ich gleich, dass hier eine windschiefe Fläche besprochen wird, deren Leitlinien (Schneidlinien) A, B und C heissen. Warum sollte man in der Geometrie nicht eben so gut das Recht haben, die verschiedenen Elemente abgekürzt zu charakterisiren, als in der Chemie? Noch dazu, nachdem die Anzahl Elemente (verschiedene Flächen) der Geometrie bei Weitem geringer ist, als die in der Chemie. Doch ich habe der Kritik nachgegeben, wenigstens in dem gedruckten Buche. Bei meinem Unterrichte bediene ich mich der Abkürzungen noch fort, und, wie meine Schüler alle bezeugen werden, mit grossem Nutzen. Denn ich kann damit an der Tafel die zu behan-

delnde Aufgabe sehr übersichtlich anschreiben, und dem Schüler so stets gegenwärtig halten, um was es sich handelt.

Die Methode, welche ich in der neuen Auflage zur Anwendung bringe, stimme mit der in der alten Auflage überein, und ist von der Art, dass der Schüler die Auseinandersetzungen verstehen kann, wenn er nur elementare Geometrie und niedere Analysis (die er ja beim Eintritt in die polytechnische Schule mitbringen muss) versteht, während nicht verlangt wird, dass er mit der neueren Geometrie, mit der (älteren oder neueren) analytischen Geometrie oder mit Differenzial- und Integratrechnung bekannt ist. Nur hie und da, wo es sich nicht vermeiden liess, sind aus der neueren oder analytischen Geometrie Thatsachen entlehnt, von deren Wahrheit der Schüler entweder in der einen oder anderen dieser Wissenschaften nachträglich zur Ueberzeugung gelangt. An der hiesigen Schule ist eine andere Methode, als die genannte, nicht anwendbar. Denn die darstellende Geometrie wird hier im ersten Jahrescurse angefangen und vollendet, und die meisten Schüler bringen gar keine, oder doch nur sehr geringe Kenntnisse der darstellenden Geometrie mit. — Ich muss aber gestehen, ich bin überhaupt nicht dafür, dass man für den Techniker die neuere Geometrie mit der darstellenden vereinigt, so sehr ich es für wünschenswerth halte, wenn der Mathematiker die darstellende Geometrie auch in Verbindung mit der neueren Geometrie (etwa nach Fiedlers vortrefflichem Buche) studirt. Für den Techniker reicht die ältere Mode vollständig aus, und ist die neuere unpraktisch und unnütz. Denn so schön und elegant die neuere Geometrie ist, so überraschend einfache Resultate sie oft zu Tage fördert, so schwierig ist es wieder, ihren Gang und ihre Auseinandersetzung im Gedächtnisse zu behalten, wenn man sich nicht beständig in Uebung mit ihr hält.

Dazu hat aber in seinem Berufsgeschäft wohl der Mathematiker, nicht aber der Techniker Gelegenheit. Der Letztere wird daher die Methode der neuen Geometrie bald vergessen, während er mit der Methode der darstellenden Geometrie, die er bei allen seinen graphischen Arbeiten anwendet, stets vertraut bleibt. Dazu kommt noch, dass der Techniker jetzt so Vieles zu lernen hat, und daher eine so grosse Zeit auf sein Studium verwenden muss, dass wir ihm nichts, was er entbehren kann, also auch die neuere Geometrie nicht, aufbürden sollten. Unter diesen Gesichtspunkten wird man die in diesem Buche eingehaltene Methode für gerechtfertigt halten.

Indem ich zum Schlusse noch dem geehrten Verleger für die hübsche Ausstattung dieses Buches meinen Dank ausspreche, übergebe ich dasselbe meinen Schülern als Leitfaden und meinen Fachgenossen zu rücksichtsvoller Beurtheilung.

München, Oktober 1873.

Der Verfasser.

Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Von den Curven.

§. 8. Regeln über die graphische Bestimmung von Curven überhaupt.

§. 9. Berührungen von ℭ.

§. 10. Umhüllungscurven.

§. 11. Krümmung und Windung von ℭ.

§. 12. Zeichnung von $\mathfrak{C}$.

Vierter Abschnitt.

Von den krummen Flächen.

§. 13. Allgemeine Regeln für die Bestimmung krummer Flächen.

§. 14. Allgemeines über Berührung von Flächen.

§. 15. Umhüllungsflächen.

§. 16. Eintheilung der Flächen (𝔉).

§. 17. Graphische Bestimmung der 𝔉.

§. 18. Eigenschaften der verschiedenen Flächengruppen.

§. 19. Tangentialebenen von 𝔉 bei gegebenem Berührungspunkte.

§. 20. Schnitte von Linien und Flächen mit Flächen, und Tangenten an Schnittlinien.

§. 21. Abwickelung einer 𝔉 auf einer anderen.

§. 22. Krümmung von Flächen.

§. 23. Tangentialebene an Flächen, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben.

§. 24. Gewundene Curven und ihre Berührungen.

§. 25. Tangentialebenen an zwei und drei 𝔉.

§. 26. Tangentialflächen an Flächen.

Fünfter Abschnitt.

Anwendungen.

§. 27. Verschiedene Anwendungen.

§. 28. Aufgaben über das Vierkant.

Berichtigungen.

Seite 148 Zeile 6 v. u. statt D, d lies F, f.

" 158 Nr. 327 statt F_2 lies überall H_2.

Darstellende Geometrie.

Dritter Abschnitt.

Von den Curven.

§ 8.

Regeln über die graphische Bestimmung der Curven überhaupt.

142. Wenn ein Punkt, z. B. die Spitze eines Bleistiftes, auf irgend eine Weise sich bewegt, so beschreibt er eine Linie. Ist kein Theil dieser Linie gerade, so nennt man sie eine krumme Linie oder Curve. Es ist nun zunächst anzugeben, wie die darstellende Geometrie krumme Linien durch Zeichnung bestimmt.

Wie zur Bestimmung von Geraden, so nimmt man auch zur Bestimmung von Curven (abg. $\mathfrak{C}$) zwei auf einander senkrechte Tafeln an, auf welchen man nach deren Umklappung die Risse der $\mathfrak{C}$ verzeichnet. Während aber der erste Riss einer Geraden entweder ein Punkt oder eine Gerade, und demnach durch höchstens zwei Punkte der Geraden schon bestimmt ist, so findet diese Bedingung bei den $\mathfrak{C}$ in der Regel nicht statt. Denken wir uns nemlich durch alle Punkte einer $\mathfrak{C}$ erste Lothe gelegt, so können diese nicht zusammenfallen, weil sonst die sämmtlichen Punkte in diesem gemeinschaftlichen Loth, also in einer Geraden lägen, und daher keine $\mathfrak{C}$ gäben. Es müssen daher die ersten Lothe einer $\mathfrak{C}$ eine Fläche bilden, die wir die erste Lothfläche der $\mathfrak{C}$ nennen wollen. Diese Lothfläche ist in dem besonderen Falle, und nur in diesem, eine Ebene, wo die $\mathfrak{C}$ in einer auf der ersten Tafel ($\mathfrak{T}_1$) senkrechten Ebene liegt; dann nennen wir dieselbe die erste Lothebene der $\mathfrak{C}$. In jedem

anderen Falle ist die Lothfläche der $\mathfrak{C}$ eine *krumme* Fläche, die wir den *ersten Lothcylinder* der $\mathfrak{C}$ nennen werden. Es ergeben sich demnach folgende Sätze:

1) *Der Riss einer $\mathfrak{C}$ kann nie ein Punkt sein. Er ist in der Regel eine krumme Linie, und nur dann eine Gerade, wenn die $\mathfrak{C}$ in einer Lothebene liegt.*

2) *Liegt eine $\mathfrak{C}$ in einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene, so ist ihr erster Riss $\parallel \mathfrak{K}_1$, und umgekehrt.* Da man in diesem Falle die $\mathfrak{K}_1$ so annehmen kann, dass sie mit dem ersten Riss der $\mathfrak{C}$ zusammenkommt, also die $\mathfrak{C}$ selbst in der $\mathfrak{T}_2$ liegt und mit ihrem zweiten Riss zusammenfällt, so folgt:

3) *Wenn der erste Riss einer $\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{K}_1$ ist, so ist ihr zweiter Riss kongruent mit der $\mathfrak{C}$ selbst.*

Anm. 1. Setzt man in den eben gemachten Entwickelungen sowohl, als in den Sätzen, *zwei* statt *eins*, so erhält man ähnliche Resultate für die zweite Tafel. Da diese Bemerkung auch für alle folgenden Entwickelungen und Sätze gilt, so werden wir es auch künftig dem Schüler überlassen, die für die $\mathfrak{T}_1$ gewonnenen Resultate auch für die $\mathfrak{T}_2$ auszusprechen.

Anm. 2. Ist von einer $\mathfrak{C}$ der Parallelriss (Parallelprojection) gesucht, so bilden die Stralen ihrer Punkte in der Regel eine krumme Fläche, die wir den *Stralencylinder* der $\mathfrak{C}$. nennen, während bei Centralrissen (Centralprojectionen) einer $\mathfrak{C}$ die von den Stralen ihrer Punkte gebildete krumme Fläche ihr *Stralenkegel* heisst. Ist aber in beiden Fällen die von den Stralen gebildete Fläche eben, so heisst die Stralenfläche die *Stralenebene* der $\mathfrak{C}$.

Man sieht also, dass auch

4) *der Stralenriss einer $\mathfrak{C}$ in der Regel wieder eine $\mathfrak{C}$ und nur ausnahmsweise eine Gerade ist.*

143. Ist der erste Riss einer $\mathfrak{C}$ eine Gerade, so kann es in der Regel ihr zweiter Riss *nicht* sein. Denn wäre auch dieser eine Gerade, so müsste die $\mathfrak{C}$ in den beiden durch ihre Risse bestimmten Lothebenen liegen. Fallen daher diese Lothebenen nicht in eine zusammen, so wäre die $\mathfrak{C}$ der Durchschnitt zweier Ebenen, also eine Gerade und keine $\mathfrak{C}$. Fallen aber die beiden durch die Risse der $\mathfrak{C}$ bestimmten Lothebenen zusammen, in

welchem Falle die 𝔆 in einer zur 𝔎 senkrechten Ebene liegt, so sind ihre beiden Risse Gerade, die senkrecht zur 𝔎 sind. Allein in diesem Falle bestimmen ihre beiden Risse nur eine einzige Ebene, in der die 𝔆 liegt, und lassen daher ausserdem die 𝔆 unbestimmt.

144. Wir denken uns jede 𝔆 durch einen Buchstaben aus dem grossen lateinischen Alphabet bezeichnet und schreiben an deren Risse denselben Buchstaben, den wir rechts unten mit der Zahl versehen, die der Tafel entspricht, in welcher der Riss liegt. Ist daher die 𝔆 mit A bezeichnet gedacht, so schreiben wir an ihre Risse die Buchstaben A_1, A_2.

Wir verstehen daher unter Curve A, abgekürzt 𝔆 (A), die 𝔆, deren Risse mit A_1. A_2 bezeichnet sind. Dagegen verstehen wir unter 𝔆 (abc..) die 𝔆, welche die (durch ihre Risse gegebenen) Punkte a, b, c... enthält.

145. Ist der Riss einer 𝔆 gerade, so genügen zwei Punkte desselben, um ihn mit Hilfe eines Lineals, ist er kreisförmig, so reichen der Mittelpunkt und ein Punkt der Peripherie hin, um ihn mittelst des Zirkels zu zeichnen. Ist er aber von anderer Gestalt, so besitzen wir gewöhnlich kein Werkzeug, um ihn mit dessen Hilfe in einem Zuge zu zeichnen. Es bleibt uns daher nichts übrig, als recht viele so nahe an einander liegende Punkte des Risses aufzusuchen, dass das Auge die Gestalt des Risses daraus erkennen kann. — Ein geübter Zeichner kann dann mit dem Bleistifte aus freier Hand eine Linie durch die Punkte führen, und sie an unrichtig scheinenden Stellen so lange ausbessern, bis sie seinem Auge als hinreichend übereinstimmend erscheint mit der Linie, die durch die aufgesuchten Punkte bestimmt ist. Das Ausziehen der Linie mit Tusche geschieht dann entweder ebenfalls aus freier Hand, oder mit Hilfe eines Curvenlineals, d. h. eines Lineals, das mit verschiedenen Krümmungen versehen ist. Man legt dann an die einzelnen Stücke der zu zeichnenden Curve die am besten passenden Krümmungen des Lineals, um die Curve stückweise mittelst der Ziehfeder auszuziehen. Es gibt noch ein drittes Mittel, die aufgefundenen Punkte zu verbinden, ohne eine 𝔆 aus freier Hand zeichnen zu müssen und das darin besteht, dass man jeden zwischen zwei nächstliegenden gefundenen Punkten eingeschlossenen Bogen der zu zeich-

nenden Linie als Kreisbogen ansieht, die Mittelpunkte dieser Bögen nach später entwickelten Regeln aufsucht, und sie mittelst des Zirkels zeichnet. Da hiezu weder ein geübtes Auge noch eine geübte Hand gehört, so ist diese Methode am meisten zu empfehlen.

146. Nach welcher der oben genannten Arten man auch die Risse einer darzustellenden 𝔈 zeichnen mag, immer ist es nothwendig, die Risse von beliebig vielen Punkten der 𝔈 auffinden zu können; demnach müssen alle Punkte der 𝔈 bestimmt sein. Wir wollen daher, wenn auch nicht alle, so doch wenigstens die in der Anwendung gebräuchlichsten Mittel zur Bestimmung aller Punkte einer 𝔈 angeben. Die 𝔈 ist entweder der Schnitt zweier gegebenen Flächen (diese Bestimmungsweise wird später besprochen), oder wir bestimmen sie dadurch, dass wir dieselbe durch einen nach einem gegebenen Gesetze beweglichen (erzeugenden) Punkt beschreiben (erzeugen) lassen, d. h. wir verlangen: der nach dem gegebenen Gesetze bewegliche Punkt soll in allen seinen Lagen, die er diesem Gesetze gemäss einnehmen kann, in der zu bestimmenden Curve liegen. Die am häufigsten vorkommenden Erzeugungs-Gesetze sind folgende:

1) Der erzeugende Punkt soll auf einer gegebenen Fläche bleiben, und seine Entfernungen von zwei Punkten oder zwei Linien oder einem Punkte und einer Linie müssen in bestimmten Beziehungen zu einander stehen (so dass die eine Entfernung sich aus der anderen finden lässt). Die gegebenen Punkte oder Linien werden Leitende (Leitpunkt, Leitlinie) der (zu bildenden) 𝔈 genannt. Diese Art der Erzeugung kommt besonders bei solchen 𝔈 vor, die in einer Ebene liegen. Dann ist die gegebene Fläche die Ebene der 𝔈 und die gegebenen Punkte und Linien (letztere meistens Gerade, seltener Kreise) liegen in dieser Ebene. Die beiden Entfernungen eines Punktes der 𝔈 von den zwei gegebenen Leitenden nennen wir dann seine Coordinaten und geben die Beziehungen, in denen sie stehen, durch eine Gleichung an, in welcher x und y die Coordinatenlängen bedeuten, die übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen aber gegebenen Strecken oder Winkel bedeuten. Gibt man in der Gleichung dem x einen

beliebigen Werth, so findet sich mittelst derselben der zugehörige Werth für y entweder durch Rechnung oder Konstruktion, je nachdem man die Längen als begrenzte Grade gibt, oder in bestimmten Längeneinheiten, z. B. Millimetern. Man sieht also, dass x und y sehr verschiedene Werthe annehmen können, weshalb man sie Variable oder Veränderliche nennt; im Gegensatze dazu nennt man die in der Gleichung gegebenen Grössen, die ihren Werth also nicht ändern, Konstante oder Unveränderliche.

2) Der erzeugende Punkt soll auf einer Fläche sich so bewegen, dass er mit einer auf dieser Fläche nach einem gegebenen Gesetze bewegten Linie in fester Verbindung bleibt. Die bewegte Linie wird die Erzeugende der 𝔈 genannt. Das Gesetz, nach welchem sich die Erzeugende bewegt, wird bestimmt durch gegebene feste Punkte oder feste Linien (Leitende), gegen welche die Erzeugende bestimmte Bedingungen zu erfüllen hat.

3) Der erzeugende Punkt soll sich auf einer beweglichen Linie (Erzeugende) nach einem Gesetze bewegen, das mit dem Bewegungsgesetze der Erzeugenden in gegebener Beziehung steht.

Ein besonderer Fall dieser Erzeugungsart ist der, in welchem sich eine gerade Linie in einer Ebene um einen festen Punkt o in einer Richtung dreht, und zugleich ein Punkt auf ihr in einer Richtung fortläuft nach einem Gesetze, das mit dem Gesetze der Drehung der Geraden in einer bestimmten Beziehung steht.

Auch hier lässt sich das Gesetz der Bewegung des erzeugenden Punktes durch eine Gleichung ausdrücken, in welcher als Coordinoten auftreten: 1) der Winkel φ, den die drehbare Gerade mit einer durch den festen Punkt o gehenden unbeweglichen Geraden X einschliesst, und 2) die Entfernung u des erzeugenden Punktes von dem festen Punkte (man nennt dieses u den radius vector, radius, Stral). Diese Coordinaten φ und u nennt man die Polarcoordinaten der Curve, den Punkt o den Pol und X die Axe.

147. Jeder nach einem gegebenen Gesetze erzeugten Curve werden wir einen Namen geben, und daher alle nach demselben Gesetze gebildete 𝔈 **gleichnamig** nennen. Es lässt aber jedes Erzeugungsgesetz einer 𝔈 noch unzählige Gestalten der 𝔈 zu, je nach der gegenseitigen Lage der Leitenden und je nach den gegebenen Konstanten. (So z. B. nennt man bekanntlich eine in einer Ebene liegende 𝔈, deren Punkte alle von einem in dieser Ebene gegebenen festen Punkte (Mittelpunkt) gleich weit abstehen, eine Kreislinie. Die C verdient daher diesen Namen, wieweit auch ihre Punkte von dem Mittelpunkte entfernt sind und es gibt daher auch unzählig vielerlei Kreislinien, weil die zu gebende Länge (der Halbmesser) unendlich verschieden sein kann.) Sind aber für zwei gleichnamige 𝔈 alle gegebenen Längen und Winkel beziehungsweise gleich, so sind die Curven kongruent ($\cong$); sind die Winkel beziehungsweise gleich und die Längen der einen in demselben Verhältniss wie die entsprechenden der anderen, so sind die Curven ähnlich ($\sim$).

148. Hat man zwei verschiedene Gleichungen, die sich auf verschiedene Paare von Leitenden beziehen, so kann es sein, dass beide Gleichungen auf 𝔈 von gleicher Art führen. Will man sich darüber Gewissheit verschaffen, so muss man im Stande sein, das eine Gesetz auf das andere oder beide auf ein drittes zurückzuführen. Wir werden später Gelegenheit haben, darüber Beispiele zu machen.

149. Liegt die ganze 𝔈 in einer Ebene, so nennt man die 𝔈 eine **ebene Curve**, wo nicht, eine **gewundene** (unebene, doppelt gekrümmte, windschiefe) 𝔈. Liegt die 𝔈 auf einer Kugelfläche, so heisst sie eine **sphärische** 𝔈. Kommt der erzeugende Punkt, von **welchem** Punkte der 𝔈 man ihn auch ausgehen lässt, wieder in seine ursprüngliche Lage zurück (wie dies z. B. bei einer Kreisline der Fall ist), so nennt man die 𝔈 **geschlossen**, wo nicht, **offen**.

Fig. 69. 150. Führt das Bildungsgesetz einer 𝔈 auf **zwei** getrennte 𝔈, die also beide zusammen die verlangte 𝔈 ausmachen, so nennt man die 𝔈 eine **Zwillingscurve**. Wird eine **ebene** 𝔈 von einer in ihrer Ebene liegenden Geraden symmetrisch getheilt, so heisst sie eine **symmetrische** 𝔈 und die Gerade ihre **Axe**. Schneidet diese Axe die 𝔈, so nennt man die Axe **reel**, wo nicht **imma-**

ginär. Hat eine Curve zwei zu einander senkrechte Axen, so nennt man deren Durchschnitt den Mittelpunct (Centrum) und jede durch diesen Punkt gelegte Gerade einen Durchmesser (Diameter) der 𝕮.

Denn sind (Fig. 69) A und B*) die beiden auf einander senkrechten Axen der 𝕮, die sich in o schneiden, und a ein beliebiger Punkt der 𝕮, so entsprechen diesem, da A und B Axen der 𝕮 sind, noch die Punkte b, c, d der 𝕮, die offenbar so liegen, dass a, o und c einer Geraden angehören und dass ao = oc ist. Es lässt sich demnach durch o nach jeder Richtung eine Sehne der 𝕮 ziehen, die in o halbirt wird, und die man daher Durchmesser nennt, während eben deshalb der Punkt o Centrum der 𝕮 heisst.

151. Sind die Risse einer 𝕮 so ausgefallen, dass jedem Punkte a_1 ihres ersten Risses zwei zweite Risse, nemlich a_2 und b_2 entsprechen können, während, ihrem Erzeugungsgesetze nach, der Punkt, dessen erster Riss in a_1 liegt, a_2 zum zweiten Riss haben muss, so ist es nothwendig (wenn nicht durch andere Mittel schon diese Zweideutigkeit gehoben ist) ausser den Rissen der 𝕮 noch einen Punkt in ihr, z. B. 𝔓 (a), zu geben, und nennen wir dann diese Curve (Aa). Hat man den einen Punkt a, so ist für alle anderen Punkte bestimmt, wie ihre Risse zusammen gehören. Denkt man sich nemlich den Punkt a (Fig. a) nach links bewegt, bis er mit dem Punkt e (dem Punkte der 𝕮, der am Weitesten links liegt) zusammenfällt, so bleibt während dieser Zeit a_1 unterhalb c_1 und gleichzeitig a_2 unterhalb c_2, während über c hinaus beide Risse oberhalb c_1 und resp. c_2 erscheinen. Es ist also hier durch den Punkt a ausgesprochen: Fig. 70.

*) Der Schüler wird gut thun, jede Figur, auf die sich der Text bezieht, und die mitunter in unseren Tafeln gar nicht gezeichnet ist, nach Anleitung des Textes, selbst zu entwerfen (nöthigenfalls unter Zuhilfenahme der entsprechenden Figur in unseren Tafeln), und zwar wird er die Zeichnungsoperationen in der Reihenfolge vornehmen, die der Text vorschreibt. Dann werden ihn auch Linien, die im Texte nicht erwähnt sind, und welche die Figur allenfalls enthält, weil sie später einmal (bei einer anderen Gelegenheit, wo dieselbe Figur Verwendung findet) gebraucht werden, nicht irre machen. Wir bitten den Schüler, diese Anmerkung ja zu beherzigen und zu befolgen.

Jedem ersten Riss eines Punktes der 𝔈 unter c_1 entspricht ein zweiter Riss unter c_2.

Es versteht sich, dass der Punkt a auch so gegeben sein könnte, dass dem ersten Riss unter c_1 ein zweiter Riss ober c_2 entsprochen hätte.

Es kann aber auch sein, dass jedem ersten Riss eines Punktes der 𝔈 zwei Punkte, also auch zwei zweite Risse entsprechen sollen. Denken wir uns z. B. eine Kreislinie A in der $\mathfrak{T}_2$ (deren erster Riss daher in $\mathfrak{K}_1$ liegt, und deren zweiter Riss mit der Kreislinie selbst zusammenfällt), so entsprechen jedem ersten Riss eines Punktes von A zwei Punkte, also auch zwei zweite Risse. In diesem Falle ist die 𝔈 durch ihre Risse (A_1 und A_2) vollkommen bestimmt, und nennen wir dann die Curve 𝔈 (A), ohne darin einen Punkt angeben zu müssen.

Fig. 71. 152. Ist die Fläche, in der sich der erzeugende Punkt zu bewegen hat, eben, so nehmen wir zur Darstellung der 𝔈 die Tafeln so an, dass eine davon, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, mit der Ebene der 𝔈 und daher der erste Riss der 𝔈 mit dieser selbst zusammenfällt. Sind aber die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ schon gegeben, und kann keine von beiden mit der Ebene der 𝔈 zusammenfallend gemacht werden, so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, in der die 𝔈 liegt, sucht nach ihrer Umklappung den dritten Riss der 𝔈 und daraus ihren ersten und zweiten Riss. Wir wollen darüber folgendes Beispiel machen:

Aufg. Es sind gegeben die Punkte a, b und c; gesucht die Risse einer durch diese Punkte bestimmten Kreislinie A.

Aufl. Man nimmt die Ebene (a b c) als $\mathfrak{T}_3$, so ist die Spur eins dieser Ebene die $\mathfrak{K}'$. Klappt man nun die $\mathfrak{T}_3$ um, etwa so, dass die $\mathfrak{K}'_1$ und $\mathfrak{K}'_3$ zusammenfallen, und sucht (nach 66) a_3, b_3 und c_3, so ist die Kreislinie A_3, die durch a_3, b_3 und c_3 geht, der dritte Riss unseres Kreises A. Sucht man nun von beliebig vielen Punkten, deren dritte Risse in A_3 liegen, wie vom 𝔓 (d), den ersten und zweiten Riss, so bekommt man die Risse der Kreislinie A.

Anm. Wir wollen bei dieser Gelegenheit ein für allemal bemerken, dass wir in der Folge unter dem **Halbmesser** eines Kreises die Länge verstehen, die der Entfernung seines Centrums von einem Punkte seiner Peri-

pherie gleich ist, während wir unter seinem Radius (Stral) jede Gerade verstanden wissen wollen, die durch seinen Mittelpunkt geht, ohne Rücksicht auf ihre Grenzpunkte.

§ 9.

Berührungen von Curven.

153. Zwei Punkte einer Curve, die so nahe liegen, dass der von ihnen eingeschlossene Curvenbogen als gerade betrachtet werden kann, werden Nachbarpunkte, und der zwischen ihnen enthaltene Bogen Element der Curve genannt. Da aber jedes messbare Stück einer 𝔈 krumm ist, so kann nur der Bogen als wirklich gerade angesehen werden, dessen Endpunkte unendlich nahe an einander liegen (deren Entfernung also unmessbar klein ist), und die daher in der Zeichnung in einen Punkt zusammenfallen. Mehrere aufeinander folgende Punkte a, b, c, d etc., die so liegen, dass je zwei nächstfolgende Punkte Nachbarpunkte sind, sollen Folgepunkte und die von ihnen gebildoten Elemente ab, bc, cd etc. Folge-Elemente heissen. Zwei zusammenstossende Folge-Elemente, wie ab, bc, die also einen 𝔓 (b) gemein haben, nennt man Nachbar-Elemente.

154. Man denke sich eine 𝔈 (A), auf dieser einen Punkt a, und bezeichne die auf der 𝔈 (A) liegenden Nachbarpunkte von a mit b, c. Legt man nun durch a und einen 𝔓 (d) der 𝔈 eine Gerade A und dreht diese um den 𝔓 (a) so, dass der 𝔓 (d) dem 𝔓 (a) immer näher rückt, so wird die Lage der Geraden, in welcher der 𝔓 (d) mit dem 𝔓 (a) zusammenfällt, eine **Berührungslinie** oder **Tangente** der 𝔈 im 𝔓 (a) und a ihr **Berührungspunkt** genannt. Dreht man die Gerade A blos so weit, bis der 𝔓 (d) mit dem 𝔓 (b) zusammenfällt, so ist sie, genau genommen, in dieser Lage keine Tangente; allein da sie offenbar mit der Tangente einen so unendlich kleinen Winkel bildet, dass sie in der Zeichnung von ihr nicht unterschieden werden kann, so können wir auch diese Lage der Geraden A als Tangente für den 𝔓 (a) ansehen. Dasselbe gilt ebenso für diejenige Lage der Geraden A, in der der 𝔓 (d) auf den 𝔓 (c) gefallen ist. Wir lassen daher den Satz gelten:

1) **Wenn eine Gerade mit einer 𝔈 einen 𝔓 (a) gemein hat und ausserdem noch einen dem 𝔓 (a) benachbarten Punkt der 𝔈 enthält, so ist die Gerade eine Tangente der 𝔈, die diese im 𝔓 (a) berührt.**

Da eine Gerade, die mit einer andern irgend zwei Punkte, also auch zwei Nachbarpunkte gemein hat, mit ihr zusammenfällt, so folgt der Satz:

2) **Die Tangente einer Geraden in irgend einem ihrer Punkte ist die Gerade selbst.**

Ist die 𝔈 offen und entfernt sich der die 𝔈 erzeugende Punkt von einer bestimmten Stellung dieses Punktes aus immer weiter und weiter bis in's Unendliche fort, so entspricht dem unendlich fernen Punkte der 𝔈 auch eine Tangente, deren Berührungspunkt also in unendlicher Ferne liegt, und demnach auf unserer Figur nicht angegeben werden kann, wie weit wir auch das Blatt verlängern würden. Eine solche Tangente nennt man **Asymptote**.

Berührt eine Gerade eine Curve in **zwei** Punkten, so nennt man die Gerade eine **Doppeltangente**.

Anm. Die oben gegebene Erklärung einer Tangente an einer 𝔈 giebt uns ein Mittel an die Hand, an eine in einer Tafel gezeichneten 𝔈 für einen 𝔓 (a) derselben annähernd eine Tangente zu zeichnen. Legt man nemlich ein Lineal so, dass seine Gerade durch a geht, und ausserdem durch einen 𝔓 (d) der 𝔈, und dreht man dieses Lineal so lange um a, bis das Auge die Lage zu sehen glaubt, in der der 𝔓 (d) auf a gefallen ist, so ist die Gerade, welche die Kante des Lineals bestimmt, annähernd eine Tangente der 𝔈 im P (a). So erscheint z. B. in der Fig. 72a die 𝔊 (B_1) als eine Tangente der 𝔈 (A_1) im 𝔓 (a_1).

155. Zieht man durch einen 𝔓 (a) einer 𝔈 eine Gerade B, die auf der im 𝔓 (a) an die 𝔈 gelegten Tangente senkrecht steht, so **nennt man diese** 𝔊 (B) **eine Normale der** 𝔈 **im** 𝔓 (a), **und den** 𝔓 (a) **den Fusspunkt der Normalen.** Bezeichnen wir wieder den Nachbarpunkt von a mit b, und denken uns das unendlich kleine Curvenstück **ab** senkrecht halbirt, so

ist die so erhaltene Gerade, genau genommen, nicht die 𝔊 (B), aber, wenn wir sie zeichnen, so lässt sie sich, da sie ihr unendlich nahe liegt, von derselben nicht unterscheiden. Wir lassen daher den Satz gelten:

1) Wenn eine Gerade auf einer Tangente einer ℭ in ihrem Berührungspunkte senkrecht steht, oder wenn sie ein Element der ℭ senkrecht halbirt, so ist sie eine Normale der ℭ.

Hieraus folgt:

2) Jeder Radius einer Kreislinie ist eine Normale derselben.

Da man durch den 𝔓 (a) unendlich viele Grade legen kann, die auf der Tangente im 𝔓 (a) senkrecht stehen, so sieht man:

3) Es giebt für jeden Punkt a einer ℭ unendlich viele Normalen. Alle diese bilden offenbar eine Ebene, die auf der Tangente senkrecht steht; diese Ebene nennt man die Normalebene der ℭ im 𝔓 (a).

156. Haben zwei ℭ zwei Nachbarpunkte a, b gemein, so sagt man, sie berühren sich, und ist die Gerade **ab** Tangente an beiden im 𝔓 (a), und umgekehrt. Es folgt daher der Satz

Damit sich zwei ℭ im 𝔓 (a) berühren, ist es nothwendig, aber auch gerade genügend, dass sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben.

157. Wird eine ℭ (A) von einer Geraden im 𝔓 (a) berührt, d. h. hat sie mit der Geraden ausser a noch den ihm benachbarten 𝔓 (b) gemein, so kann diese Tangente oder, was dasselbe ist, die 𝔊 (ab) entweder auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehen, d. h. ein Loth eins sein, oder nicht. Im ersten Falle ist der erste Riss der Tangente der Punkt a_1 und ihr zweiter Riss (welcher durch a_2 geht) ist $\perp$ $\mathfrak{K}_2$. Im zweiten Falle geht der erste Riss der Tangente, welcher eine Gerade ist, durch a_1 und b_1; da aber diese Punkte unendlich nahe liegen, so hat hier der erste Riss der Tangente mit dem ersten Riss der ℭ (A) zwei Nachbarpunkte (a_1 und b_1) gemein. Wir haben also den Satz:

Der erste Riss einer Tangente an einer ℭ (A) im 𝔓 (a) ist entweder der 𝔓 (a_1) oder eine in a_1 zu A_1 gezogene Tangente.

Anm. Setzt man in der eben gemachten Entwickelung Stral prim, Riss prim, A′, a′ statt Loth eins, Riss eins, A_1, a_1 (s. 73 u. folg.), so kann man sich leicht überzeugen, dass der eben ausgesprochene Satz auch für schiefe und Central-Risse gilt.

Fig. 72. 158. Hat man die Risse einer 𝔈 (A) und auf ihr einen 𝔓 (a), für den die Tangente der 𝔈 (A) gesucht ist, so darf man nur in a_1 eine Tangente (B_1) an A_1 und in a_2 eine Tangente (B_2) an A_2 legen (Fig. a), so sind B_1, B_2 die Risse der gesuchten Tangente. Ist aber (wie in Fig. b und c) der zweite Riss der Tangente für den Punkt a ⊥ $𝔎_2$, so ist die Tangente selbst entweder bloss senkrecht zur 𝔎 oder sie ist ⊥ $𝔗_1$; im ersten Falle muss (wie in Fig. b) der erste Riss der Tangente eine Gerade sein, die senkrecht zur 𝔎 steht, und A_1 in a_1 berührt; giebt es aber (wie in Fig. c) in a_1 keine Tangente an A_1, die zugleich ⊥ $𝔎_1$ ist, so kann es nicht anders sein, als dass die gesuchte Tangente ⊥ $𝔗_1$ ist, und demnach a_1 zum ersten Riss hat. In Fig. b. aber ist die Tangente aus ihren beiden Rissen nicht bestimmt, und wird sie erst bekannt, wenn man eine $𝔗_3$ zu Hilfe nimmt, den dritten Riss der 𝔈 (A) und des 𝔓 (a) sucht, in a_3 an A_3 eine Tangente (B_3) legt, und von irgend einem 𝔓 (b) der Tangente (B), dessen ersten Riss man beliebig annehmen kann, den ersten und zweiten Riss sucht, wodurch man die 𝔊 (ab) als die gesuchte Tangente erhält.

159. Haben zwei 𝔈 einen 𝔓 (a) gemein, ohne sich in ihm zu berühren, so sagt man, sie schneiden sich im 𝔓 (a). Man versteht dann unter dem im 𝔓 (a) von ihnen gebildeten Winkel denjenigen, welchen die im 𝔓 (a) an die 𝔈 gelegten Tangenten mit einander einschliessen. Hat eine 𝔈 mit einer Geraden, die keine Tangente von ihr ist, einen 𝔓 (a) gemein, so schneiden sich diese Linien im 𝔓 (a), und bilden im 𝔓 (a) den Winkel, welchen die Gerade mit der im 𝔓 (a) an die 𝔈 gelegten Tangente einschliesst. Wenn eine 𝔈 und eine Ebene einen Punkt a gemein haben, so versteht man unter dem Winkel der 𝔈 und Ebene im 𝔓 (a) denjenigen, welchen die Ebene mit der im 𝔓 (a) an die 𝔈 gedachten Tangente bildet.

160. Ist der Winkel, den eine ℭ mit einer Ebene im 𝔓 (a) bildet, = o, d. h. enthält die Ebene die Tangente im 𝔓 (a), so nennt man diese Ebene eine *Berührungsebene*, *Tangentialebene* der ℭ im 𝔓 (a) und a ihren Berührungspunkt; ist jener Winkel ein rechter, d. h. steht die Ebene im 𝔓 (a) auf der Tangente für den 𝔓 (a) senkrecht, so ist die Ebene die *Normalebene* (s. 156. Anm.) der ℭ im 𝔓 (a) und a ihr Fusspunkt. Man sieht hieraus, dass es in einem 𝔓 (a) einer Curve unendlich viele Tangentialebenen und, im Allgemeinen, nur eine Normalebene für sie gibt.

161. Kommt der erzeugende Punkt einer ℭ bei seiner Fig. 73.
Bewegung mehr als einmal durch einen bestimmten 𝔓 (a) der ℭ, so nennt man diesen 𝔓 (a) einen *doppelten*, *dreifachen*, *vierfachen* etc. Punkt, je nachdem der erzeugende Punkt zweimal, dreimal, viermal etc. durch ihn kommt. So ist 𝔓 (a) der ℭ (A) in Fig. 73 a ein Doppelpunkt. Für diesen Punkt kann es so viele Tangenten geben, als der Punkt vielfach ist. Für einen Doppelpunkt giebt es in der Regel *zwei* Tangente (Doppelpunkt *erster* Art) an die ℭ und man sagt dann, *die ℭ schneidet sich selbst in diesem Punkte*. Fallen aber ausnahmsweise (wie in Fig. 73 b) die beiden Tangente für den Doppelpunkt in eine *zusammen*, so sagt man, die ℭ berührt sich selbst in diesem Punkte (Doppelpunkt zweiter Art). Aehnlich verhält es sich bei dreifachen, vierfachen etc. Punkten.

162. Hat man eine ebene ℭ, wie die ℭ (A) in Fig. a, Fig. 74.
und zieht man in deren Ebene für einen 𝔓 (a) der ℭ die Tangente (B) und die Normale (C), so liegen in der Regel die beiden dem 𝔓 (a) benachbarten Punkte der ℭ (von denen einer rechts und einer links vom 𝔓 (a) liegt) auf *einerlei* Seite der Tangente und auf *zweierlei* Seiten der Normalen, wie man sich leicht durch Anschauung überzeugen kann. Ausnahmsweise kann es aber auch (Fig. b) sein, dass die beiden Nachbarpunkte von a auf *zweierlei* Seiten der Tangente und auf *zweierlei* Seiten der Normale liegen. Einen solchen Punkt a nennen wir einen *Wellenpunkt* oder *Wendepunkt* der Curve. Es kann aber auch kommen, dass die Nachbarpunkte von a auf *einer* Seite der Normale liegen (wie in Fig. c, d und e); dann nennen wir den 𝔓 (a) einen *Grat* oder *Rückkehrpunkt* und zwar

der ersten (Fig. c) oder zweiten (Fig. d) oder dritten Art (Fig. e), je nachdem die Nachbarpunkte von a auf zwei Seiten oder auf einer Seite der Tangente liegen, oder zusammenfallen.

163. Unter der Entfernung eines Punktes a von einer 𝔈 (A) versteht man die Entfernung dieses 𝔓 (a) von demjenigen Punkte b der 𝔈 (A), für welchen die 𝔊 (ab) eine Normale ist, und wofür die Strecke ab die kürzeste ist, die von a nach der 𝔈 gezogen werden kann.

Haben zwei in derselben Ebene liegende 𝔈 die Eigenschaft, dass alle Punkte der einen 𝔈 gleich weit von der andern entfernt sind, so nennen wir die beiden 𝔈 parallel.

§ 10.

Umhüllungscurven.

164. Gesetzt, es solle sich eine Linie von bestimmtem Namen (s. 147) nach einem gegebenen Gesetze bewegen, und es sei gesucht die 𝔈, welche von allen Lagen der bewegten Linie berührt wird.

Sind nun a, b, c, d etc. Folgepunkte (153) der gesuchten Curve, A, B, C, D etc. aufeinanderfolgende Lagen der bewegten Linie, so dass die gesuchte 𝔈 mit A das Element ab, mit B das Element b c mit C das Element cd etc. gemein hat, so sieht man, dass sich A und B nach a, B und C nach b, C und D nach d etc. schneiden. Da nun A und B, B und C etc. unendlich nahe an einander liegen, so geht hieraus hervor, dass die verlangte 𝔈 auch erhalten wird, wenn man die Punkte sucht, in denen je zwei unendlich nahe Lagen der bewegten Linie sich schneiden. Eine solche 𝔈, welche durch die Bewegung einer Linie von bestimmtem Namen entsteht, die sie in allen ihren Lagen berührt, nennt man eine **Umhüllungscurve** und die durch ihre Bewegung sie erzeugende Linie heisst in allen ihren Stellungen ihre **Umhüllte**

Fig. 75. 165. Es sei die Umhüllte, d. h. die sich bewegende Linie eine Gerade. Um nun die gesuchte 𝔈 zu erhalten, zeichnet man die bewegliche Gerade (welche sich in der vorliegenden Figur

beispielsweise so bewegen soll, dass sie in der $\mathfrak{T}_1$ bleibt und zu der in $\mathfrak{T}_1$ liegenden $\mathfrak{C}$ (M) stets normal ist) in sehr nahe liegenden Lagen, und sodann eine $\mathfrak{C}$ (N), welche alle diese Geraden berührt. Nennen wir die Punkte, in denen die Umhüllten A, B, C, D etc. von der $\mathfrak{C}$ (N) berührt werden, nach einander a, b, c, d etc. und betrachten wir, um die $\mathfrak{C}$ (N) aus Kreisbögen zusammen zu setzen, $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ *) etc. als Kreisbögen, so liegt das Centrum des Kreises für den Bogen ab in der Geraden O, die den Winkel von A und B so wie den Bogen ab halbirt. Hat man daher a, so lässt sich der Mittelpunkt m für den Bogen ab finden, wenn man in a eine $\mathfrak{G}$ (am) $\perp$ A zieht. Hat man m, so lässt sich b finden durch die $\mathfrak{G}$ (mb) $\perp$ $\mathfrak{G}$ (B). Ist aber von den Punkten a, b, c etc. keiner bekannt, so nimmt man die ersten drei Umhüllten A, B, C so nahe an einander an, dass die Bögen ab und bc, als einem Kreise angehörig betrachtet werden können, und demnach die zwei Halbirungslinien ihrer zwei auf einander folgenden Winkel sich in einem Punkte m schneiden, der von A, B und C gleich weit absteht. Fällt man von m die zu A, B, C senkrechten ma, mb, mc, welche sie in den Punkten a, b, c schneiden, so ist der Kreisbogen abc als Bogen der $\mathfrak{C}$ (A) zu betrachten, und man kann, da der Punkt a ein Punkt der $\mathfrak{C}$ (B) ist, mittelst dessen die folgenden Punkte eben so finden, wie vorhin, wo der $\mathfrak{P}$ (a) als bekannt angenommen war.

166. Es sei ferner die Umhüllte eine Kreislinie, die sich Fig. 76.
in ihrer Ebene (hier in der $\mathfrak{T}_1$) so fortbewegen soll, dass ihr Mittelpunkt eine gegebene $\mathfrak{C}$ (M) durchläuft und ihr Halbmesser unverändert bleibt.

Ist a ein Punkt der $\mathfrak{C}$ (M), welcher der Mittelpunkt der Kreislinie A ist, und suchen wir, wo A von einer Kreislinie B geschnitten wird, die ihren Mittelpunkt in einem nicht sehr weit von a entfernten $\mathfrak{P}$ (b) der $\mathfrak{C}$ (M) hat, so sieht man leicht ein, dass dies in den Punkten p und q geschieht, die erhalten werden, wenn man die Schnitte der Kreislinie A mit derjenigen Geraden sucht, die $\overline{ab}$ senkrecht halbirt. Liegt nun b unend-

*) Während wir unter $\mathfrak{G}$ (ab) die Gerade, unter $\mathfrak{C}$ (ab) die $\mathfrak{C}$ verstehen, welche durch die Punkte a und b geht, ohne ihre Gren-

lich nahe an a, so ist die $\mathfrak{G}$ (ab) die Tangente der $\mathfrak{C}$ (M) im $\mathfrak{P}$ (a) und daher die senkrechte Halbirungslinie von $\overline{ab}$ die Normale der $\mathfrak{C}$ (M) in a. Da aber in diesem Falle, wo nämlich $\overline{ae}$ ein Element der $\mathfrak{C}$ (M) ist, die Schnitte der Kreislinie A mit der aus b beschriebenen Kreislinie Punkte unserer Umhüllungscurve sind, so erhält man folgenden Satz:

1) *Wenn die Umhüllte eine Kreislinie mit unveränderlichem Halbmesser ist, die sich in ihrer Ebene so bewegt, dass ihr Mittelpunkt eine $\mathfrak{C}$ (M) beschreibt, so erhält man die Punkte m, n, welche eine Umhüllte A mit der gesuchten Umhüllung gemein hat, wenn man sucht, wo A von der in ihrem Mittelpunkt a zur $\mathfrak{C}$ (M) gezogenen Normalen geschnitten wird.*

Weil unsere Umhüllung in m und n von A berührt wird, so hat sie in diesen Punkten mit A eine gemeinschaftliche Normale; und da $\mathfrak{G}$ (mn) die Normale für A in den Punkten m und n ist, so ist in diesen Punkten die $\mathfrak{G}$ (mn) auch Normale der gesuchten Umhüllungscurve. Wir sehen daher

2) *dass jede Normale der $\mathfrak{C}$ (M) zugleich Normale der Umhüllungscurve ist*, und

3) *dass alle Punkte der Umhüllungscurve gleich weit (um den Halbmesser von A) von M entfernt sind, diese $\mathfrak{C}$ demnach mit M parallel läuft* (s. 163).

Anm. 1. Wir wollen gleich hier darauf aufmerksam machen, obgleich wir erst später (s. 215) einen klaren Einblick in die Sache gewinnen, dass die Parallele zu einer Curve A die in Fig. 76 a angegebene Gestalt B annehmen kann, also eine $\mathfrak{C}$ werden kann, die in a und b einen Grat und in c einen Doppelpunkt hat.

Anm. 2. Es ist bekannt, dass eine Parallele zu einer Geraden wieder eine Gerade, eine in der Ebene einer Kreislinie liegende Parallele zu dieser wieder eine Kreislinie ist. Man kann

---

zen zu berücksichtigen, verstehen wir unter $\mathfrak{G}$ (ab) oder $\overline{ab}$ die *von den Punkten a und b begrenzte* Gerade, unter $\mathfrak{C}$ $(\widehat{ab})$ oder $\widehat{ab}$ die von a und b begrenzte $\mathfrak{C}$.

aber nicht nachweisen, und es ist auch in der Regel nicht der Fall, dass eine zu einer anderen ebenen 𝔈 (M) in ihrer Ebene gezogene Parallele mit M gleichnamig ist.

Fig. 77.

167. Nehmen wir jetzt an, es bewege sich wieder ein Kreis in einer gegebenen Ebene so, dass sein Mittelpunkt eine Linie dieser Ebene beschreibt, sein Halbmesser aber sich während der Bewegung des Kreises ändert (so dass er für jeden Mittelpunkt eine andere Länge hat), und es soll wieder die Umhüllungscurve dieses Kreises angegeben werden.

Setzen wir zunächst voraus, der Mittelpunkt beschreibe die Gerade A, und sein Halbmesser verändere sich nach dem durch die Linie B ausgesprochenen Gesetze in der Art, dass, für irgend einen in A angenommenen Punkt a als Mittelpunkt, der entsprechende Halbmesser gleich der in a zu A gezogenen Senkrechteu $\overline{ab}$ (zwischen A und B) sei.

Ist nun, wie in Fig. a, die Linie B eine Gerade, die A im Punkt m schneidet, so ist leicht einzusehen, dass, wenn man aus einem Punkte a mit dem entsprechenden Halbmesser $\overline{ab}$ einen Kreis D beschreibt, und von m aus Tangenten C daran legt (es giebt offenbar zwei solche Tangenten, von denen wir der Deutlichkeit der Figur wegen nur eine, die untere, gezeichnet haben) diese Linien C die gesuchten Umhüllungscurven sind. Zugleich geht hieraus hervor, dass der dem Mittelpunkt a entsprechende Punkt c (der Umhüllungslinie) der Berührungspunkt der aus m an den (aus a mit dem Halbmesser $\overline{ab}$ beschriebenen) Kreis D gezogenen Tangente ist.

NB. Wäre $\overline{ac}$ (also auch das ihm gleiche $\overline{ab}$) grösser als $\overline{am}$, so gäbe es von m aus keine Tangente an den Kreis D, und die Aufgabe wäre unmöglich. Ist aber $\overline{ac}$ oder $\overline{ab} > \overline{am}$, so ist der Winkel abm $< 45^\circ$. Wenn also der spitze Winkel, den die Gerade B mit der Geraden A bildet $< 45^\circ$ ist, so ist die Aufgabe unmöglich.

Ist aber wieder (Fig. b) die Gerade A der Ort der Mittelpunkte des bewegten Kreises, die Linie B aber, welche das Gesetz, nach der sich der Halbmesser des Kreises ändert, eine Curve, und sollen wir wieder den Punkt der Umhüllungscurve angeben, der dem Mittelpunkt a entspricht, und dessen entsprechender

Halbmesser $\overline{ab}$ ist, so denken wir uns, wir hätten von der ℭ (B) blos das kleine Stückchen, das zwischen B und seinem Nachbarpunkte liegt. Dieses Stück ist aber **gerade** und liegt auf der in b an die ℭ (B) gezogenen Tangente E, welche A in m schneidet. Für unsere Aufgabe können wir also E an die Stelle von B setzen. Wenn wir demnach aus a mit dem Halbmesser $\overline{ab}$ einen Kreis D beschreiben und aus m eine Tangente C daran legen, die D in c berührt, so ist c der verlangte Punkt der Umhüllungscurve und C die Tangente dieser Curve im Punkt c. Man kann also auf diese Art für **jeden** Punkt a der Geraden A den entsprechenden Punkt c der Umhüllungscurve nebst der diesem Punkte entsprechenden Tangente C oder Normale ac angeben, sobald man die dem Punkte b entsprechende Tangente (entweder nach dem Augenmasse oder nach einer Konstruktion) zeichnen kann.

Anm. Für alle Punkte von B, für welche die entsprechende Tangente E mit A einen spitzen Winkel bildet, der $> 45°$ ist, ist die Aufgabe unmöglich.

Fig. 78. 168. Es soll wieder die Umhüllungscurve eines beweglichen veränderlichen Kreises gesucht werden, dessen Mittelpunkt aber nicht eine Gerade durchläuft, sondern eine **krumme** Linie A.

Zunächst muss hier wieder das Gesetz der Aenderung des Halbmessers gegeben sein, was dadurch geschehen kann, dass man sagt, es sollen die Halbmesser der Kreise für die Punkte der Curve A (Fig. a) durch die Fig. b in der Weise bestimmt werden, dass der Punkt a von A dem a' von A' entspricht, und jeder Punkt rechts von a in A (z. B. a_1) jedem Punkt rechts von a' in A', für welchen die Länge $a'a'_1 = aa_1$ ist, entspricht. Dann soll der entsprechende Halbmesser (in der Fig. b) wieder wie früher gemessen werden, z. B. für den Punkt a durch a'b'. Ist nun auf diese Weise der Ort der beweglichen Kreismittelpunkte, nemlich die Curve A, und das Aenderungsgesetz für den Halbmesser (durch Fig. b) gegeben, und soll man für einen Punkt a in A den entsprechenden Punkt c der gesuchten Umhüllungscurve finden, so denken wir uns, es sei von A blos das zwischen a und seinem Nachbarpunkte liegende (unendlich kleine) Stück gegeben. Dieses Stück liegt in der Geraden F, welche A in a berührt. Wir können daher F an die Stelle von A setzen, und da in

diesem Falle F gerade ist, so löst sich die Aufgabe ähnlich wie in voriger Nummer. Wir werden nemlich in b′ (Fig. b) die Tangente F′ an B′ legen, wodurch wir den Punkt m′ erhalten, werden dann $\overline{am} = \overline{a'm'}$ machen, von a einen Kreis D mit dem Halbmesser $\overline{a'b'}$ ziehen und von m aus eine Tangente C daran legen, die ihn nach dem gesuchten Punkt c berührt; zugleich ist C die Tangente der gesuchten Umhüllungscurve für den Punkt c.

§ 11.

Krümmung und Windung von Curven.

169. Man denke sich zu einer 𝔆 (A) in einem 𝔓 (a) derselben (dessen Nachbarpunkt b heissen mag, während der folgende Nachbarpunkt von b mit c bezeichnet werde) eine Normalebene und eine Tangente (C) gelegt, ferner auf der Normalebene einen 𝔓 (d) angenommen, den man als Centrum einer durch a gehenden Kreislinie B ansieht, so ist im 𝔓 (a) die Gerade C sowohl Normalebene von B als von A; demnach wird die 𝔆 (A) von der Kreislinie B im 𝔓 (a) berührt. Da diese Behauptung wahr bleibt, in welchem Punkte der Normalebene für a man den 𝔓 (d) annimmt, so sieht man, dass es in einem 𝔓 (a) einer 𝔆 (A) an diese unzählige berührende Kreislinien giebt, deren Mittelpunkte in der dem 𝔓 (a) entsprechenden Normalebene der 𝔆 (A) liegen. Man kann daher zur näheren Bestimmung des Centrums unseres Berührungskreises noch die Bedingung hinzufügen, dass seine Peripherie durch einen 𝔓 (e) der 𝔆 (A) gehen soll. In diesem Falle ist die Ebene des Kreises durch C und e bestimmt und liegt daher sein Centrum d in der Geraden der 𝔈 (Ce), welche 𝔖 $\overline{(ae)}$ senkrecht halbirt, ferner in der in 𝔈 (Ce) zur 𝔆 (A) gezogenen Normalen für den 𝔓 (a). Lässt man nun den 𝔓 (e) dem 𝔓 (a) immer näher rücken (wodurch sich natürlich auch die Lage des Mittelpunktes d verändert), bis er endlich mit dem 𝔓 (a) zusammenfällt, so wird in dieser Lage des 𝔓 (e) unser Berührungskreis der Krümmungskreis (Osculationskreis, Schmiegungskreis) der 𝔆 (a) im 𝔓 (a) genannt, und es giebt also für jeden Punkt einer 𝔆 (wenn er anders kein

vielfacher Punkt ist) einen einzigen Krümmungskreis. Betrachten wir nun als Normalebene in a die Ebene, welche das Element $\widehat{ab}$ senkrecht halbirt und lassen den 𝔓 (e), anstatt ihn mit a zusammenfallen zu lassen, auf den 𝔓 (e) fallen, der unendlich nahe an b liegt, so werden wir einen Kreis erhalten, der durch die Folgepunkte a, b, c geht und genau genommen, nicht unser Krümmungskreis ist, aber ihm so nahe liegt, dass wir ihn von diesem nicht unterscheiden können; wir können daher auch diesen Kreis, der also durch die Folgepunkte a, b, c geht, als Krümmungskreis für den 𝔓 (a) ansehen, und lassen deshalb den Satz gelten:

1) Wenn eine Kreislinie mit einer 𝔈 (A) drei Folgepunkte oder zwei Nachbarelemente gemein hat, so ist sie der Krümmungskreis der 𝔈 (A).

Da jede Kreislinie mit einer anderen zusammenfällt, wenn sie irgend drei Punkte, also auch drei Folgepunkte, mit ihr gemein hat, so folgt:

2) Der Krümmungskreis eines Kreises in irgend einem Punkte seiner Peripherie ist der Kreis selbst.

Man nennt den Mittelpunkt des Krümmungskreises den Krümmungsmittelpunkt, seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser, seine Ebene die Krümmungsebene, und sagt, die 𝔈 (A) ist im 𝔓 (a) um so mehr gekrümmt, je kleiner in diesem Punkte der Krümmungshalbmesser ist.

Verbindet man den Mittelpunkt des Krümmungskreises mit dem 𝔓 (a), in welchem er die 𝔈 berührt, so ist das die Normale der 𝔈, welche in der Krümmungsebene liegt, und den Namen Hauptnormale führt. Errichtet man aber durch a eine Senkrechte zur Krümmungsebene, so erhält man ebenfalls eine Normale, die man Binormale nennt.

Anm. Ist eine 𝔈 eben, so liegt jeder Krümmungskreis in der Ebene der 𝔈. Es ist daher die Ebene der 𝔈 die Krümmungsebene für alle ihre Punkte, und jede in der Ebene der 𝔈 liegende Normale eine Hauptnormale.

170. Jede Hauptnormale wird von ihrem Fusspunkte a in zwei Theile getheilt, von denen in der Regel einer den Krüm-

mungsmittelpunkt enthält, der andere nicht. Man sagt nun von allen Punkten dieser Hauptnormale, die mit dem Krümmungsmittelpunkt auf einer Seite von a sich befinden, sie liegen auf der hohlen, konkaven, von den anderen, sie befinden sich auf der erhabenen, konvexen Seite der Curve. Wenn wir aber sagten, in der Regel, so thaten wir es in Rücksicht darauf, dass der Krümmungshalbmesser möglicher Weise unendlich gross oder unendlich klein werden kann, d. h. dass der Krümmungsmittelpunkt gar nicht existirt, oder mit dem 𝔓 (a) der 𝔈 (A) zusammenfällt; in diesen beiden Ausnahmsfällen ist für den 𝔓 (a) eine konvexe und konkave Seite der 𝔈 nicht zu unterscheiden.

171. Wir haben oben gesehen, dass eine Tangente und eine 𝔈 ein Curvenelement (zwei Nachbarpunkte), eine 𝔈 und ihr Krümmungskreis zwei Nachbarelemente gemein haben. Es kann aber auch kömmen, dass zwei 𝔈 drei, vier etc. Elemente gemein haben. Man sagt nun von zwei 𝔈, sie berühren sich nach zweiter, dritter etc. Ordnung, wenn sie zwei, drei etc. aufeinanderfolgende Elemente gemein haben.

172. Sind a, b, c, d etc. Folgepunkte einer ebenen 𝔈 (A) und halbiren wir die Elemente ab, bc, cd etc. nacheinander durch die Geraden B, C, D etc., welche auf ihnen beziehungsweise senkrecht stehen, und in der Ebene der 𝔈 (A) liegen, so schneiden sich B und C in einem 𝔓 (m), C und D in einem 𝔓 (n) etc., und ist der 𝔓 (m) der Mittelpunkt für den Kreis abc, n der für bcd etc. Da aber $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ etc. Elemente der 𝔈 (A) sind, so sind die Punkte m, n etc. die aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunkte der 𝔈 (A), die selbst wieder eine Curve (M) bilden. Zugleich sind aber aus demselben Grunde die Geraden B, C, D etc. die aufeinanderfolgenden Normalen der 𝔈 (A); daher ist die Curve M die Umhüllungscurve dieser Normalen, und folglich die Normalen B, C, D etc. der 𝔈 (A) zugleich Tangenten der 𝔈 (M). Hieraus folgt der Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte einer ebenen 𝔈 (A) bilden in der Regel eine Curve M, die zugleich die Umhüllungscurve der Normalen der 𝔈 (A) ist; es sind daher diese Normalen zugleich Tangenten der 𝔈 (M). Von solchen zwei Curven, die so liegen, dass die Normalen der ersten 𝔈 Tangenten zur zweiten sind, nennt man (s. 215) die

erste die Evolvente der zweiten, und die zweite die Evolute der ersten und ist also die 𝔈 (M) die Evolute der 𝔈 (A) und die 𝔈 (A) die Evolvente der 𝔈 (M).

173. Sind ab, bc, cd drei aufeinanderfolgende Elemente einer unebenen Curve, so liegen ab und bc in einer Krümmungsebene, bc und cd in einer zweiten, die von der ersten sich so wenig unterscheidet, dass wir sie mit ihr als zusammenfallend ansehen können. Genau genommen sind es aber zwei Ebenen, die einen unendlich kleinen Winkel bilden; man nennt diesen Winkel den Windungswinkel der Curve und daher solche Curven gewundene Curven. Bei ebenen Curven fallen, wie wir schon oben gesehen, alle Krümmungsebenen zusammen und giebt es daher bei ihnen keine Windung, oder ihre Windungswinkel sind = 0.

Legt man durch die vier Folgepunkte a, b, c, d eine Kugel, die also die 𝔈 nach dritter Ordnung (171) berührt, so nennt man diese Kugel eine Krümmungs- oder Schmiegungs-Kugel. Liegen ausnahmsweise die vier Folgepunkte in einer Ebene, d. h. ist der Windungswinkel der beiden Krümmungsebenen abc, bcd = 0, so geht hier die Schmiegungskugel in eine Schmiegungsebene über.

174. Hat eine Curve die Eigenschaft, dass zwei beliebige, aber gleichlange Stücke derselben kongruent sind, so muss sie in allen Punkten gleiche Krümmung und gleiche Windung haben. Denn legt man auf ein Stück, das aus 3 aufeinanderfolgenden Elementen besteht, ein beliebig zweites von derselben Länge, so dass es das erste deckt, so decken auch die zwei aufeinanderfolgenden Krümmungsebenen des zweiten Stückes diejenigen des ersten, und es ist daher der Windungswinkel des zweiten Stückes (und da dies ein beliebiges war, jeder Windungswinkel) dem des ersten gleich. Nimmt man ebenso Stücke von zwei Elementen, so lässt sich damit erweisen, dass alle Punkte der Curve dieselbe Krümmung haben.

Hat eine ebene 𝔈 die Eigenschaft, dass ihre Stücke von gleicher Länge kongruent sind, und die 𝔈 daher überall gleiche Krümmung hat, so ist sie eine Kreislinie. Denn sind A, B, C etc. aufeinanderfolgende Normalen der Folgepunkte a, b, c etc., so schneiden sich A und B in einem Krümmungsmittel-

punkte m der Curve. Würde B von C in einem anderen Punkte als m, z. B. im Punkte n, geschnitten, so wäre bm der Krümmungshalbmesser des Elements ab, und bn der von bc. Da aber alle Krümmungshalbmesser gleich sein sollen, so müssen sich auch B und C im m, also auch aus demselben Grunde C und D im m schneiden u. s. w. Es fallen also hier alle Krümmungsmittel zusammen in den Punkt m, und da dieser Punkt demnach von allen Punkten der Curve gleichweit entfernt ist, so sieht man, dass die Curve ein Kreis ist. Zugleich erhellt daraus, dass in diesem Falle die Evolute ein einziger Punkt ist. Wir haben also den Satz:

> *Wenn eine ebene Curve in allen ihren Punkten gleich gekrümmt ist, so ist sie eine Kreislinie, und ihre Evolute ist ein Punkt.*

175. Obgleich, wie wir gesehen haben, mit Ausnahme der Kreislinie, jede ebene Curve in ihren verschiedenen Punkten verschiedene Krümmungshalbmesser haben und es demnach geometrisch genommen keinen Kreisbogen geben kann, der mit einem Curvenbogen ab zusammenfällt, so wird man doch, wenn der Winkel, den die in a und b errichteten Normalen bilden, klein ist, einen Kreisbogen zeichnen können, der so nahe mit dem Bogen ab zusammenfällt, dass ihn das Auge nicht davon unterscheiden kann, und dies wird darum der Fall sein, weil die *gezeichneten* Linien keine *mathematischen* sind, sondern immer eine bestimmte Dicke haben. Wir werden daher ein brauchbares Resultat erhalten, wenn wir eine zu zeichnende ebene Curve aus lauter Kreisbögen ab, bc, cd etc. zusammensetzen, die eine geringe Anzahl Grade haben. Betrachten wir aber ab als Kreisbogen, und ist m sein Mittelpunkt, so sind die Radien am und bm seine Normalen in den Punkten a, b, und da der Kreisbogen ab als gleichbedeutend mit dem Curvenbogen ab angesehen wird, so sind am und bm zugleich Normalen der Curve. Man erhält demnach den Punkt m, wenn man in den Punkten a, b die Normalen A, B der Curve zieht und ihren Schnittpunkt sucht. Hat man aber so den Punkt m gefunden, so ist er nur dann brauchbar, wenn $\overline{ma} = \overline{mb}$ ist, und dies wird der Fall sein, wenn $\overset{\frown}{ab}$ nicht zu gross ist, Wäre aber $\overline{ma}$ nicht gleich $\overline{mb}$, so müsste man zwischen a und b noch einen Punkt o der

Curve aufsuchen und die Kreisbogen ao und ob behandeln. Würden auch diese Bögen zu gross sein, so müsste man noch weiter unterabtheilen.

Auf diese Art kann man jede Curve, *deren Normalen man durch Konstruktion finden kann*, durch aufeinanderfolgende Punkte a, b, c etc. so in Bögen theilen, dass jeder solche Bogen $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ etc. als Kreisbogen gezeichnet werden kann. Dies ist, wie oben gesagt, der Fall, wenn die in den Endpunkten eines solchen Bogens, z. B. $\widehat{ab}$, konstruirte Normalen sich in einem Punkte m schneiden, für welchen $\overline{ma} = \overline{mb}$ sich herausstellt. Dabei kann es sein, dass, geometrich genau genommen, $\overline{ma} > \text{mb}$ ist (s. 193), dass aber der Unterschied dieser beiden Strecken in der Zeichnung (graphisch) nicht bemerkbar ist.

Wir wollen daher solche Curvenbögen $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ etc., die sich *graphisch* als Kreisbögen ansehen lassen, *graphische Elemente* der Curve, und die ihnen entsprechenden Kreise *graphische* Krümmungskreise, ihre Mittelpunkte *graphische Krümmungsmittelpunkte* etc. nennen.

176. Hat man eine oder mehrere Curven in der eben beschriebenen Art aus Kreisbögen zusammengesetzt, so ist es dadurch möglich, Aufgaben in Bezug auf diese Curven in Aufgaben in Bezug auf Kreise zu verwandeln. Zu dem Ende darf man nur untersuchen, *welche graphische Krümmungskreise bei der Aufgabe betheiligt sind*, und dann in Bezug auf diese Kreise die Lösung suchen. Ein Beispiel wird das Gesagte erläutern. Sei etwa an zwei Curven eine gemeinsame Tangente zu ziehen und deren Berührungspunkte anzugeben. So lege man ein Lineal so an die Curven, dass es augenscheinlich beide berührt, und wird man leicht sehen, auf *welchen graphischen Elementen* die Berührungspunkte (die man zwar nicht genau erkennt) liegen; man hat dann an die entsprechenden graphischen Krümmungskreise die gemeinschaftliche Tangente zu legen. In ähnlicher Weise kann man alle Aufgaben über Tangenten an eine Curve auf solche an einen Kreis (den entsprechenden graphischen Krümmungskreis) überführen. — Soll man von einem Punkte a an eine (aus Kreisbögen zusammengesetzte) Curve eine Normale ziehen, so setzt man in a die Spitze eines Zirkels ein und öffnet ihn so lange, bis die andere Spitze augen-

scheinlich die Curve berührt. Obgleich man den Berührungspunkt nicht genau erkennen kann, so lässt sich doch unterscheiden, welcher Bogen der Curve, und demnach, welcher graphische Krümmungskreis berührt wird. Verbindet man den Mittelpunkt dieses Kreises mit a, so erhält man genau die verlangte Normale, und durch diese auch genau den Fusspunkt derselben.

§ 12.

Zeichnung und Eigenschaften der für die Anwendung wichtigeren Curven und Konstruktion ihrer Tangenten und Normalen.

177. Mit Ausnahme der Schraubenlinie (s. 225) sind alle praktisch wichtigen Curven ebene Curven, die wir in einer der oben (146) angeführten Arten bestimmen, und zwar zunächst so, dass wir sie in einer Tafel (z. B. $\mathfrak{T}_1$) annehmen. Bestimmen wir die Curve in Bezug auf zwei zu einander senkrechten Leitlinien, die Coordinatenaxen X und Y, so bezeichnen wir die Entfernung eines beliebigen Curvenpunktes von X mit y und von Y mit x und nennen y die Ordinate, x die Abscisse und beide (x und y) zusammen die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes. Zuweilen, wenn auch selten, lässt man X und Y schief gegen einander stehen, und richtet dann y nicht senkrecht zu X, sondern || Y; ebenso x || X. In diesem Falle nennt man x und y die schiefwinkeligen Coordinaten des Curvenpunktes. Bei beiden Coordinatensystemen nennt man den Schnitt von X und Y den Anfangspunkt oder Ursprung, unterscheidet die beiden Theile, in welche X oder Y vom Ursprung getheilt wird, durch + und —, und nennt für den betreffenden Curvenpunkt das x + oder —, je nachdem der Punkt (von Y aus) auf Seite des + X oder — X liegt; ähnlich verhält es sich mit y. Hat man eine beliebige Gerade A, die durch den Anfangspunkt geht, so ist offenbar für jeden Punkt derselben das Verhältniss $\frac{y}{x}$ dieselbe Zahl a, also $y = ax$. Hat man eine beliebige nicht durch den Anfangspunkt o gehende Gerade B und zieht man durch o eine Parallele A zu B, so erkennt man leicht, dass für B sich ergiebt $y = ax + b$,

wenn b die Entfernung der Schnittpunkte der Geraden X und B von o bedeutet.

Es ist also in diesem Falle die Gleichung einer Geraden eine lineare oder vom ersten Grad, d. h. es kommen x und y in keiner höheren, als der ersten Potenz in der Gleichung vor. Ist die Gleichung einer Curve algebraisch, d. h. kommen x und y nur in lauter ganzen positiven Potenzen und in einer endlichen Anzahl von Gliedern vor (oder lässt sich die Gleichung auf eine solche Form bringen), so nennt man sie vom n^{ten} Grad, wenn die höchste Potenz, in der x oder y vorkommt, oder die höchste Anzahl Faktoren aus x und y, die in irgend einem Gliede vorkommen, n ist.

Schneiden sich zwei Curven, so gelten für den Schnittpunkt, da er in beiden Curven liegt, beide Gleichungen, man kann daher, indem man aus denselben x und y sucht, die Coordinaten des Schnittpunktes finden, und erhält so viele Schnittpunkte, als es zusammengehörige Werthe für x und y giebt.

Schneiden sich eine ebene algebraische Curve vom n^{ten} Grade und eine gerade Linie, und sucht man aus der Gleichung der Geraden das y und setzt dessen Werth in die Gleichung der Curve ein, so erhält man daraus, [wenn der Werth für y nicht konstant ist, sondern das x enthält*)] n Werthe für x (von denen auch ein, zwei oder mehr Paare immaginär werden können); für jeden Werth von x findet man durch Einsetzen in die Gleichung der Geraden den zugehörigen (reelen oder immaginären) Werth von y. Man erhält also so viele Schnittpunkte (reele und immaginäre zusammen) einer Curve n^{ten} Grades mit einer allgemeinen (weder mit X noch Y parallelen Geraden), als n Einheiten enthält. Da man nun eine ebene Curve von n^{ter} Ordnung nennt, wenn sie von irgend einer Geraden nach n Punkten geschnitten werden kann, so sieht man:

---

*) Hat man z. B. die Gleichung $x^2y + y - 1 = 0$, so ist sie (wegen des Gliedes x^2y, das 3 Faktoren aus x und y enthält) vom 3ten Grade. Ist aber die Gleichung der Geraden $y = 2$, so wird durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung der Curve nur eine Gleichung des 2ten Grades erhalten.

Jede Curve, deren Gleichung in Bezug auf zwei (rechtwinkelige oder schiefe) Coordinatenaxen gegeben ist, ist von so vielter Ordnung, als der Grad der Gleichung angiebt und umgekehrt. Die Gleichung einer Geraden in Bezug auf zwei Coordinatenaxen ist daher linear.

Anm. Ist daher eine Curve auf irgend eine andere Art, als in Bezug auf Coordinatenaxen gegeben und soll man ihre Ordnung ermitteln, so muss man ihre Coordinatenaxengleichung aufsuchen (s. 184).

178. Legt man durch eine Gerade, die eine ebene Curve nach n Punkten schneidet, eine Ebene, die nicht mit der Ebene der Curve zusammenfällt, so schneidet offenbar auch sie die Curve nach n Punkten. Man kann daher auch sagen, dass eine ebene Curve n^{ter} Ordnung ist, wenn sie von einer beliebigen Ebene nach n (reelen und immaginären) Punkten geschnitten. Analog dem nennt man eine **algebraische** unebene (gewundene) Curve, d. i. eine **unebene Curve**, deren **Risse algebraische Curven** sind, von der n^{ten} Ordnung, wenn sie von einer Ebene nach höchstens n (reelen und immaginären Punkten) geschnitten werden kann.

Man nennt daher überhaupt eine Curve im Raume von der n^{ten} Ordnung, wenn sie von einer Ebene nach höchstens n (reelen und immaginären) Punkten **geschnitten** werden kann.

179. Kann eine Curve im Raume von einer Ebene nur in zwei reelen Punkten höchstens geschnitten werden, so ist die Curve **eben**. Denn wäre sie uneben, so könnte man durch irgend drei ihrer reelen Punkte eine Ebene legen, die also die Curve nach drei Punkten schneidet, ohne mit ihr zusammenzufallen, und die Ebene hätte mit der Curve **drei** reele Punkte gemein.

Man sieht also, dass alle Curven zweiter Ordnung ebene Curven sind.

180. Hat man im Raume eine ebene Curve A n^{ter} Ordnung und eine Gerade B, die sie in n Punkten schneidet, und nimmt man die $\mathfrak{T}_1$ beliebig so an, dass sie nicht auf der Ebene der Curve senkrecht steht (dass also der erste Riss der Curve **keine** Gerade ist), also der erste Riss (B_1) von B auch kein

Punkt ist, so hat auch B_1 mit A_1 n Punkte gemein und es ist daher auch A_1 (der erste Riss der Curve A) n^{ter} Ordnung.

Man hat also den Satz:

Der erste Riss einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung ist ebenfalls eine Curve n^{ter} Ordnung, oder (wenn die $\mathfrak{T}_1$ auf der Ebene der $\mathfrak{E}$ senkrecht steht) eine Gerade.

In ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass auch der Riss prim (Stralenriss, sowohl Centralriss, als Parallelriss) einer Curve n^{ter} Ordnung eine Gerade (wenn die Ebene der Curve Stralenebene ist) oder eine Curve n^{ter} Ordnung ist.

181. Man kann jede Gerade als einen Kreis in einer Ebene $\mathfrak{E}$ von unendlich grossem Halbmesser betrachten und umgekehrt, so dass also die Gerade als eine geschlossene Linie zu betrachten ist, deren Schliessungspunkt aber in unendlicher Ferne liegt. Man sagt daher, die Gerade hat einen unendlich fernen Punkt. Ist eine Gerade B von $\mathfrak{E}$ mit einer Geraden A parallel, so sagt man, B schneidet A in unendlicher Ferne, oder B und A haben einen unendlich fernen Punkt gemein; einen unendlich fernen Punkt, da ja zwei Gerade, ohne zusammenzufallen, nicht zwei Punkte gemein haben können. Ist auch Gerade C (in $\mathfrak{E}$) || A, so schneiden auch diese sich im unendlich fernen Punkt der Geraden. Irgend ein System von parallelen Geraden einer Ebene $\mathfrak{E}$ hat also einen unendlich fernen Punkt der $\mathfrak{E}$ gemein. Ein zweites System paralleler Geraden der $\mathfrak{E}$ hat einen zweiten unendlich fernen Punkt der $\mathfrak{E}$ gemein, ein drittes einen dritten etc. Alle diese unendlich fernen Punkte der Ebene werden erhalten, wenn man A um einen Punkt a dieser Geraden in der Ebene dreht, wobei der unendlich ferne Punkt von A eine Kreislinie von unendlich grossem Halbmesser beschreibt, deren Punkte alle in unendlicher Ferne liegen, und die man daher die unendlich ferne Gerade der Ebene nennt. Ist eine Ebene $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{E}$ parallel, so sagt man, sie schneidet $\mathfrak{E}$ nach ihrer unendlich fernen Geraden. Irgend ein System von parallelen Ebenen hat daher eine unendlich ferne Gerade gemein, ein zweites eine zweite etc. Alle diese unendlich fernen Geraden im Raume kann man erhalten, wenn man einen Punkt als Mittelpunkt einer Kugel mit unendlich grossem

Halbmesser beschreibt, die also offenbar als eine Ebene angesehen werden kann, und die man daher die unendlich ferne Ebene nennt. Sie wird von jeder Ebene nach einer Kreislinie von unendlich grossem Halbmesser geschnitten, deren sämmtliche Punkte in unendlicher Ferne liegen, also nach einer unendlich fernen Geraden der Ebene.

Ist nun in einer Ebene eine Curve gegeben, so kann es sein, dass auch diese unendlich ferne Punkte hat, in welchem Falle die Curve, wie schon früher angegeben, offen heisst. Ist die ebene Curve n^{ter} Ordnung, so wird sie auch von der unendlich fernen Geraden der Ebene nach höchstens n (unendlich fernen Punkten) geschnitten, und wenn wir blos die reelen unendlich fernen Punkte in's Auge fassen, so kann es sein, dass eine ebene Curve n^{ter} Ordnung keinen, einen, zwei etc. bis zu n unendlich fernen Punkten hat.

182. Betrachten wir nun die algebraischen Curven zweiter Ordnung, welche, wie oben gezeigt wurde, alle ebene Curven sind, so können diese keinen, einen oder zwei unendlich ferne Punkte haben, und giebt es also dreierlei Curven zweiter Ordnung:

1) eine solche, die keinen unendlich fernen Punkt hat; man nennt sie Ellipse;

2) eine solche, die einen unendlich fernen Punkt hat; sie heisst Parabel;

3) eine solche, die zwei unendlich ferne Punkte hat und den Namen Hyperbel führt.

Hat man eine dieser Curven im Raume, und sucht man ihren ersten Riss, so ist dieser, wie oben gezeigt, wieder eine Curve zweiter Ordnung, und liegt der erste Riss ihres unendlich fernen Punktes auch in unendlicher Ferne. Es ist also der erste Riss (ebenso der Parallelriss) einer Ellipse, Parabel, Hyperbel wieder resp. eine Ellipse, Parabel, Hyperbel. Sucht man aber den Centralriss einer solchen Curve auf einer Tafel ($\mathfrak{T}'$), die mit der Ebene der Curve nicht parallel ist, so sieht man, dass der Centralriss ($\mathfrak{R}'$) eines unendlich fernen Punktes, dessen Stral also mit der Ebene der Curve (also nicht mit der $\mathfrak{T}'$) parallel ist, die $\mathfrak{T}'$ in einem endlich entfernten Punkte trifft. Ebenso sieht man ein, dass der Punkt der Curve, dessen Stral $\parallel$ $\mathfrak{T}'$ ist

wenn es einen solchen giebt, diese Tafel in einem unendlich fernen Punkte trifft. Es kann also der $\mathfrak{R}'$ einer Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nach Lage der $\mathfrak{T}'$ eine jede dieser Curven werden.

Nun ist offenbar die Kreislinie eine Linie zweiter Ordnung, denn, wenn man die auf einander senkrechten Coordinaten von X und Y durch das Centrum der Kreislinie legt, so ist für jeden Punkt derselben $x^2 + y^2 = r^2$ (wenn r der Halbmesser ist); es gehört also der Kreis zu den Ellipsen. Nimmt man nun einen Punkt a ausserhalb der Ebene des Kreises A als Centrum a eines Stralensystems an und irgend eine Ebene als $\mathfrak{T}'$, und sucht den $\mathfrak{R}'$ der Curve A, indem man durch alle Punkte der A Stralen legt, welche einen Kegel geben, wie er aus der Stereometrie bekannt ist, so ist der Schnitt von $\mathfrak{T}'$ mit diesem Kegel der $\mathfrak{R}'$ von A. Dieser $\mathfrak{R}'$ ist aber zweiter Ordnung und hat keinen, einen oder zwei unendlich ferne Punkte, je nachdem die $\mathfrak{T}'$ mit keinem, einem oder zwei Stralen parallel gewählt wird*). Man kann also die Linien zweiter Ordnung auch als Schnitte von Ebenen mit einem Kreiskegel erhalten. Deshalb nennt man diese Linien auch Kegelschnitte.

Da diese Kegelschnitte von wissenschaftlicher und praktischer Wichtigkeit sind, so wollen wir sie in Folgendem näher betrachten, und da sie eben sind, voraussetzen, dass sie in der Ebene unseres Zeichnungsblattes liegen.

Fig. 79. 183. Aufg. Es sind gegeben zwei Punkte, a, b; gesucht eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt c derselben die Entfernungen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ dieselbe Summe 2α geben.

Aufl. Nimmt man auf der Geraden ab die Punkte d und e so an, dass $\overline{de} = 2\alpha$, und dass der Mittelpunkt f von $\overline{ab}$ zugleich der von $\overline{de}$ ist, so sind d und e Punkte der gesuchten Curve. Denn es ist dann offenbar $\overline{ab} + \overline{be} = \overline{ae} + \overline{ad} = \overline{de} = 2\alpha$ und demnach e (ebenso d) ein Punkt der Curve.

*) Legt man durch das Centrum a eine Ebene, so kann die so gewählt werden, dass sie die Kreislinie nach zwei Punkten schneidet oder berührt oder nichts mit ihr gemein hat. Ist dann $\mathfrak{T}' \parallel$ mit der Ebene, so wird sie im ersten Falle mit keiner, im zweiten mit einer, im dritten mit zwei Geraden parallel sein.

Einen beliebigen 𝔓 (c) der gesuchten Curve erhält man, wenn man $\overline{de}$ durch einen 𝔓 (g) in zwei Theile theilt, und aus den Punkten a und b mit den Halbmessern $\overline{dg}$ und $\overline{eg}$ Kreisbögen A, B beschreibt; der 𝔓 (c), in welchem sich diese Bögen schneiden, ist ein Punkt der verlangten Curve. Da unsere Kreisbögen sich in noch einem Punkte, nemlich in h, scheiden, so erhalten wir durch diese Konstruktion zwei Punkte, die gegen die Gerade de symmetrisch liegen. Wiederholt man diese Konstruktion mit *denselben* Halbmessern, beschreibt aber aus a den kleinern und aus b den grösseren Kreis, so erhält man wieder zwei Punkte, die gegen die (aus f senkrecht zu de gezogene) Gerade fk mit den Punkten c, h symmetrisch liegen. Nimmt man $\overline{ad}$ zum kleinen $\overline{ae}$ zum grösseren Halbmesser, so berühren sich die Kreise, und man erhält die Punkte d und e. Nimmt man den kleinen Halbmesser kleiner als $\overline{ad}$, und daher den grösseren grösser als $\overline{ae}$, so haben die beiden Kreise *keinen* Punkt gemein. Macht man endlich die beiden Halbmesser gleich, also jeden halb so gross als $\overline{de}$, so erhält man die Punkte k und l in der Geraden fk.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass die gesuchte Curve *geschlossen* ist; da sie aber auch, wie wir bald sehen werden, zweiter Ordnung ist, so ist es eine Ellipse. Wir sehen ferner, dass die Ellipse zwei aufeinander senkrechte Axen (de, lk) und also auch einen Mittelpunkt (f) hat, und auf jeder dieser Axen zwei Punkte der Curve liegen, die unter allen Punkten der Curve von der anderen Axe am weitesten entfernt sind. Man nennt diese Axenpunkte die *Scheitel*, die Leitpunkte a, b die *Brennpunkte*, die Axe, auf welcher die Brennpunkte liegen, die *grosse* oder *Hauptaxe*, die andere die *kleine* oder *Nebenaxe* der Ellipse, und die Verbindungslinie eines Punktes der Curve mit den Brennpunkten seine *Brennstralen*. Ferner nennt man die Entfernung der Scheitel d und e die *grosse*, der Scheitel k und l die *kleine Axenlänge*, $\overline{fe}$ die *grosse*, fk die *kleine* Halbaxe*) und $\overline{ab}$ die *Exzentrizität* der Ellipse. Endlich sieht man, dass

*) Da durch das „Halb" schon ausgedrückt ist, dass eine Länge bezeichnet werden soll, so braucht man das Wort Länge nicht hinzuzufügen.

1) die grosse Axenlänge gleich der Brennstralen-Summe eines jeden Ellipsenpunktes ist, und

2) die grosse, die kleine Halbaxe und die halbe Exzentrizität die Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes (afk) sind, in welchem die grosse Halbaxe die Hypotenuse bildet.

Anm. Fallen die beiden Brennpunkte aufeinander in den Punkt a, so sind offenbar alle Punkte der Ellipse von a gleichweit entfernt und geht die Ellipse in den Kreis über. Man sieht also, dass der Kreis als eine Ellipse angesehen worden, deren Exzentrizität = o ist, oder deren Halbaxen einander gleich sind.

NB. Hier und bei der folgenden 𝕮 (Hyperbel) ist unter dem Brennstrahl eines 𝔓 (b) enie von diesem Punkt begrenzte Gerade zu verstehen, die von da aus nur nach einer Richtung fortgeht, und zwar nach derjenigen, die den Brennpunkt enthält. Ist aber von der Länge des Brennstrahls die Rede, so ist der Punkt der Ellipse (oder Hyberbel) die eine, der Brennpunkt aber die andere Grenze desselben.

184. Wollen wir uns überzeugen, dass die eben beschriebene Curve zweiter Ordnung ist, so müssen wir ihre Gleichung in Bezug auf Coordinatenaxen aufsuchen. Wir wählen der Bequemlichkeit wegen die Axen X, Y so, dass sie mit den Ellipsenaxen beziehungsweise zusammenfallen (daher ist f der Anfangspunkt), und zwar wollen wir festsetzen, dass X mit der Hauptaxe und Y mit der Nebenaxe zusammenfällt, und dass die + x rechts, die + y oben liege).

Ziehen wir nun cm $\perp$ X, so ist für den beliebigen Punkt c, cm = y und fm = x. Setzen wir die Brennstralenlängen $\overline{ac}$ und $\overline{bc} = \rho_1$ resp. ρ_2, ferner $\overline{fk} = \beta$ und $\overline{af} = \overline{bf} = \gamma$, so ist $\rho_1^2 = y^2 + (\gamma + x)^2$ und $\rho_2^2 = y^2 + (x-\gamma)^2$ und demnach $\rho_1^2 - \rho_2^2 = 4\gamma x$; da aber $\rho_1 + \rho_2 = 2\alpha$, so ist $\rho_1 - \rho_2 = \frac{2\gamma x}{\alpha}$ und demnach

$$\rho_1 = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} \ldots\ldots\ldots A.$$

Weil aber $\rho^2 = y^2 + (\gamma + x)^2$, so erhält man aus den letzten beiden Gleichungen, in Verbindung mit der aus dem zweiten Satze der vorigen Nummer folgenden Satze: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, nach gehöriger Reduktion, die wir dem Schüler überlassen, die Gleichung: B). . . . . $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, wodurch man sich überzeugt, dass unsere Curve zweiter Ordnung, also, da sie auch geschlossen, eine Ellipse ist.

Anm. Diese Gleichung B) der Ellipse, bei welcher die Coordinatenaxen X, Y mit der Haupt- beziehungsweise Nebenaxe zusammenfallen, nennt man die Axengleichung der Ellipse.

185. Sind a und b die Brennpunkte und c ein Punkt einer Ellipse, so findet man einen 𝔓 (d) derselben, der von c nicht weit entfernt ist, wenn man den einen Brennstral $(\overline{ac})$ um ein kleines Stück $\overline{ce}$ länger und den anderen $(\overline{bc})$ um ebensoviel $(\overline{cf})$ kürzer macht, und nun $\overline{ae}$ und $\overline{bf}$ als Brennstralen des gesuchten Punktes d betrachtet; wo die aus den Mittelpunkten a, b beschriebenen Bögen df und de sich schneiden, ist der Punkt d. Soll nun dieses d unendlich nahe am 𝔓 (c) liegen, so können wir die Bögen $\overline{ed}$, $\overline{ef}$ als Gerade betrachten, die auf den Radien ae, bf resp. senkrecht stehen, und die Figur cfde ist dann ein Viereck, dessen Diagonale ce seinen Winkel bei c halbirt. Da aber unter der Voraussetzung, dass d unendlich nahe an c liegt, die Gerade cd die Tangente der Ellipse im 𝔓 (c) ist, so erhalten wir folgende Sätze: Fig. 80.

1) die Tangente einer Ellipse in einem 𝔓 (c) derselben bildet mit den Brennstralen des 𝔓 (c) gleiche Winkel und
2) die Normale der Ellipse im 𝔓 (c) halbirt den Winkel der dem 𝔓 (c) entsprechenden Brennstralen.

Anm. Betrachtet man die Ellipse als einer Spiegelfläche angehörig, so wird jeder Licht- oder Wärmestral, der von einem Brennpunkte ausgeht, nach dem anderen Brennpunkte reflektirt, weil dann, nach dem bekannten Gesetze, der einfallende und reflektirte Stral mit der Normalen (dem Einfallslothe) gleiche Winkel bilden. Befindet sich also eine Wärmequelle in einem

Brennpunkte, so wird auch im anderen Brennpunkte sich Wärme konzentriren, und ein Brennen veranlassen können. Daher führen diese Punkte den Namen Brennpunkte.

Fig. 81. 186. Sind a, b die Brennpunkte, c ein Punkt einer Ellipse, und trägt man auf ac von c aus $\overline{cd} = \overline{cb}$, so wird $\overline{bd}$ von der Tangente ce senkrecht halbirt, indem diese Tangente den Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreieckes bcd in zwei gleiche Theile theilt. Da aber nun $\overline{ad} = \overline{ac} + \overline{cb} = 2\alpha$ ist (wenn wir unter α wieder die grosse Halbaxe verstehen), so werden die den verschiedenen Punkten c der Ellipse entsprechenden Punkte d in einer Kreislinie A liegen, die aus a mit einem Halbmesser gleich der grossen Axenlänge (2α) beschrieben ist. Ferner sind der Punkt d und der Brennpunkt b von jedem Punkte der Tangente (in c) gleichweit entfernt, und ist die Gerade db senkrecht zur Tangente. Endlich liegen die Punkte a, c und d in einer Geraden. Nennen wir nun die aus einem Brennpunkt (hier a) mit der grossen Axenlänge beschriebene Kreislinie die Leitlinie und den anderen Brennpunkt (hier b) schlechtweg den Brennpunkt der Ellipse so sieht man, dass jeder Punkt c der Ellipse von der Leitlinie und dem Brennpunkt gleichweit entfernt ist. Wir werden dadurch im Stande sein, folgende Aufgaben zu lösen.

Fig. 81. 187. Sind die Brennpunkte a, b und die grosse Axenlänge ($= \overline{ad}$) einer Ellipse gegeben, und gesucht eine Tangente, die

1) durch einen gegebenen 𝔓 (e) geht, so beschreibt man aus a mit der grossen Axenlänge eine Kreislinie A (die Leitlinie) und sucht auf dieser einen Punkt d, der von e ebensoweit als von b entfernt ist; dieser Punkt ist der der gesuchten Tangente entsprechende Punkt der Leitlinie, und wird daher gefunden, indem man die Kreislinie A mit einer zweiten aus e mit dem Durchmesser $\overline{eb}$ beschriebenen Kreislinie B durchschneidet. Halbirt man nun $\overline{bd}$ senkrecht durch die Gerade B, so ist dies die gesuchte Tangente, und der Punkt c, in welchem diese von dem Radius da geschnitten wird, ist ihr Berührungspunkt;

2) parallel einer Geraden C ist, so zieht man durch b die 𝔊 (bd) $\perp$ 𝔊 (C) und der Punkt d, in welchem sie die Leitlinie A schneidet, entspricht der gesuchten Tangente. Halbirt man daher bd senkrecht, so erhält man die Tangente D, und

der Punkt c, wo diese vom Radius ad geschnitten wird, ist ihr Berührungspunkt.

Anm. Da die Kreislinien B und A sich hier in zwei Punkten schneiden, so giebt es durch den gegebenen 𝔓 (e) zwei Tangenten. Es könnte aber auch dieser Punkt so liegen, dass B und A sich nicht schnitten, und daher keine Tangente, oder so, dass B und A sich berührten und nur eine Tangente möglich wäre. Im letzten Falle müsste der Punkt e in ad liegen und (da auch in B) mit c zusammenfallen, also ein Punkt der Ellipse sein. Da ferner die Gerade bd stets, wie in unserer Figur, durch den innerhalb des Kreises A liegenden Punkt b geht, so schneidet sie die Kreislinie A immer in zwei Punkten, und giebt es daher parallel einer Geraden stets zwei Tangenten an einer Ellipse.

188. Aus der Axengleichung (s. 184) der Ellipse ergiebt sich die Gleichung: Fig. 82.

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich eine weitere Konstruktion für die Ellipse ableiten, wenn man bedenkt, dass $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ die Kathete z eines rechtwinkeligen Dreiecks bedeutet, dessen zweite Kathete x und dessen Hypotenuse α ist; ferner, dass dann $y : \beta = z : \alpha$ ist. Sind daher X die Haupt- und Y die Nebenaxe, a der Mittelpunkt, b und c Scheitel (also $\overline{ab} = \alpha$, $ac = \beta$) einer Ellipse und soll ein Punkt, dessen $x = \overline{ad}$ ist, gefunden werden, so erhält man das z, wenn man de $\perp$ Z zieht und dieses de mit einer aus a mit dem Halbmesser $\overline{ab}$ beschriebenen Kreislinie A in e durchschneidet; $\overline{de}$ ist dann dieses z. Trägt man noch auf ae von a aus $\overline{af} = \overline{ac} = \beta$ und zieht $\overline{fp} \parallel$ X, so ist p der verlangte Punkt der Ellipse, d. h. es ist $\overline{dp} = y$. Denn es ist

$$\overline{dp} : \beta = z : \alpha.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Ellipse.

Man beschreibt aus dem Centrum a die Kreise A und B mit den Halbmessern α und β, zeichnet einen Radius ae dieser Kreise, der A in e und B in f schneidet, und zieht aus e eine

Senkrechte zu X und aus f eine Senkrechte zu y; der Schnitt p dieser Senkrechten ist ein Punkt der Ellipse.

Wären von der Ellipse aber gegeben das Centrum a, der Scheitel b und der beliebige Punkt p, so könnte man mit Hilfe derselben Figur nach einander e und f und daraus B, also β, finden, und nun irgend einen weiteren Punkt der Ellipse durch dieselbe Konstruktion erhalten.

Fig. 82. 189. Zieht man noch gp $\perp$ ae, das X in k schneidet, so ist offenbar $\overline{gp} = \overline{ae} = \alpha$ und $\overline{pk} = \overline{af} = \beta$ und $\overline{gk} = \alpha - \beta$.

Trägt man daher auf eine Gerade C (z. B. auf den geraden Rand eines Papierstreifens) von einem Punkt p aus nach einer Richtung pg $= \alpha$ und pk $= \beta$ und legt diese Gerade so, dass k (der Endpunkt der kleinen Halbaxe) auf der grossen Axe X, und g (der Endpunkt der grossen Halbaxe) auf der kleinen Axe Y liegt, so ist p ein Punkt der Ellipse. Giebt man dem C eine andere Lage, aber wieder so, dass k auf X und g auf Y liegt, so erhält man einen anderen Punkt p der Ellipse.

Macht man in ein Bretchen, das man auf ein Blatt Papier legt, zwei aufeinander senkrechte schmale Schlitze X und Y; hat man ferner einen Stangenzirkel, auf dem drei verstellbare Stücke sich befinden, von denen zwei mit (in die Schlitze passenden) abwärts gerichteten Stiftchen g, k und eines einen abwärts gerichteten Bleistift p trägt, und stellt diese drei Stücke so, dass pg $= \alpha$ und pk $= \beta$ ist; lässt man endlich k in X und g in Y sich verschieben, so zeichnet p eine Ellipse. Ein solches Instrument nennt man einen Ellipsenzirkel.

Anm. Zieht man durch p eine Gerade D so, dass sie mit C symmetrisch gegen pd liegt, so wird D das X in einem Punkt k′, Y in einem g′ schneiden, und es wird $\overline{pk'} = \overline{pk} = \beta$, $\overline{pg'} = \overline{py} = \alpha$ und $\overline{g'k'} = \alpha + \beta$ sein. Dadurch wird man in ähnlicher Weise mittelst eines Papierstreifens oder Ellipsen-Zirkels die Ellipse finden können.

Fig. 83. 190. Es sei eine Kreislinie A, deren Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$ den $\wedge$ α bildet, gegeben, und ihr erster Riss (der, da A zweiter Ordnung und geschlossen ist, eine Ellipse sein muss) gesucht. Nehmen wir die $\mathfrak{T}_2$ so an, dass sie auf der Ebene der Kreislinie senkrecht steht, so ist der zweite Riss von A die Gerade A_2, welche mit $\mathfrak{K}_2$ den Winkel α bildet. Ist nun e der Mittel-

punkt von A und nimmt man die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass sie durch e_2 geht, so liegt der $\mathfrak{P}$ (e) in der $\mathfrak{T}_1$, und diese schneidet daher den Kreis A nach einem Durchmesser $\overline{ab}$, dessen zweiter Riss in e_2 ist. Betrachtet man nun die Ebene des Kreises A als $\mathfrak{T}_3$, so bildet diese mit der $\mathfrak{T}_1$ ein schiefwinkeliges Tafelsystem, dessen $\mathfrak{K}'$ ab ist. Klappt man nun die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ um, so ist die Kreislinie A_3 der dritte Riss von A. Sucht man ferner den ersten Riss des in der zu ab senkrechten Geraden $e_1 c_3$ liegenden Punktes c_3 des Kreises A_3, so ist $\overline{e_1 c_1}$ bekanntlich die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $= \overline{e_1 c_3}$ und in welchem der Winkel den $e_1 c_1$ und $e_1 c_3$ bilden, $= \wedge\ \alpha$ ist. Bestimmt man noch den ersten Riss (f_1) eines $\mathfrak{P}$ (f), dessen dritter Riss f_3 ist, so ist bekanntlich $\overline{f' f_3}$ gleich der Hypotenuse $(a_2\ f_2)$, und $\overline{f' f_1}$ gleich der Kathete $a_2 f_2$ eines rechtwinkeligen Dreiecks $a_2 f_2 f_2$, in welchem der Winkel $f_2 a_2 f_2\ = \wedge\ \alpha$ ist. Da aber für alle Punkte der Kreislinie A der $\wedge\ \alpha$ derselbe ist, so folgt, dass die Proportion $\overline{f' f_1} : \overline{f' f_3} = \overline{c_1 e_1} : \overline{c_3 e_1}$, oder $\overline{f' f_1} : \sqrt{\overline{e_1 f_3}^2 - \overline{e_1 f'}^2} = \overline{c_1 e_1} : \overline{c_3 e}$ oder (wenn $\overline{f' f_1} = y$, $\overline{e_1 f'} = x$, $\overline{e_1 f_3} = \alpha$ und $\overline{e_1 c_1} = \beta$ setzt) $y : \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \beta : \alpha$ für alle Punkte der Kreislinie gilt. Demnach gehört jeder erster Riss eines Punktes von A einer in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Ellipse an, deren Halbaxen $\overline{e_1 a_1}$ und $\overline{e_1 c_1}$ sind. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

> Wenn eine Kreislinie weder parallel noch senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ ist, so ist ihr erster Riss eine Ellipse, deren Mittelpunkt der erste Riss des Kreismittelpunktes und deren grosse Axe parallel zur ersten Spur der Kreisebene ist. Ferner ist die grosse Halbaxe der Ellipse gleich dem Halbmesser des Kreises und die kleine Halbaxe derselben gleich der Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Hypotenuse gleich dem Halbmesser des Kreises ist, und mit dieser Kathete den Winkel bildet, den die Ebene des Kreises mit der $\mathfrak{T}_1$ einschliesst.

191. Aus der vorigen Nr. ergiebt sich ein einfaches Mittel an eine Ellipse, die nach 188 konstruirt ist, eine Tangente zu Fig. 83.

legen, wenn der Berührungspunkt f gegeben ist. Man betrachtet nemlich die Ellipse als ersten Riss einer Kreislinie A, deren dritter Riss die Kreislinie A_3 ist, und die gesuchte Tangente als ersten Riss einer Tangente von A für den Punkt f. Dann ist $f_3 g_3$, welches A_3 in f_3 berührt, der dritte Riss dieser Tangente und demnach $f_1 g_1$ ihr erster Riss, also die gesuchte Tangente der Ellipse.

Fig. 84. 192. Aufg. Eine Ellipse sei ihrer Gestalt nach bestimmt (z. B. durch ihre Halbaxen α und β); man soll sie, aus Kreisbögen zusammengesetzt, zeichnen.

Aufl. Man konstruirt von der Ellipse in nicht zu grosser Entfernung von einander einzelne Punkte a, b, c, d, e, zeichnet die entsprechenden Normalen, A, B, C, D, E, so sind die Punkte, in denen sich je zwei aufeinander folgende Normalen A und B, B und C etc. schneiden, die Mittelpunkte der Bögen ab, bc, etc. Hiebei ist es natürlich gleichgültig, welche Konstruktionsweise der Ellipse man anwendet, wenn man nur die Punkte in nicht zu grosser Entfernung wählt, und für jeden Punkt die Normale genau konstruirt.

In unserer Figur haben wir von m aus die Längen $\overline{ma} = \alpha$ und $\overline{me} = \beta$ auf die Axen X, Y aufgetragen, und aus e mit der Länge α die X in p und q durchschnitten, und so diese Punkte als Brennpunkte erhalten. Nun wurden für die Punkte b, c, e (nach Nr. 183), die entsprechenden Normalen (nach Nr. 185) konstruirt, und aus den Schnittpunkten α, β, γ, δ der aufeinander folgenden Normalenpaare die Bögen ab, bc, cd, de gezeichnet.

Will man den anderen Quadranten (rechts von Y) zeichnen, so muss man die den Punkten links (a, b, c . . .) entsprechenden Punkte rechts (a′, b′, c′ . . .) aufsuchen; die Konstruktion der Normalen aber ist einfach durch die symmetrische Lage der entsprechenden Normalen zu vollführen. So gehen z. B. die Normale für b und b′ durch denselben Punkt n der Y.

Damit aber die Zeichnung in dieser Weise ausführbar ist, und nicht zu viele Normalen gezogen werden müssen, thut man gut, die Punkte der Ellipse so zu wählen, dass der Bogen $\widehat{ab}$ ziemlich klein ist, $\widehat{bc}$ etwas grösser als $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ etwas grösser, als $\widehat{bc}$

u. s. w. Wie gross aber $\widehat{ab}$ gewählt werden muss, das ist Sache der Uebung.

193. Um aber über die Wahl dieser Bögen genauere Aufschlüsse zu erhalten, und klarer in dieser ganzen Konstruktion zu sehen, wollen wir (in Figur 85) in einem Punkte p (mit den Coordinaten x, y) der Ellipse A (deren Axen X, Y die Scheitel a, b enthalten) die Normale zeichnen, welche X in q schneidet. Sind f_1, f_2 die Brennpunkte, also $pf_1 = \rho_1$ und $pf_2 = \rho_2$ die Brennstralen, deren Winkel von der Normalen halbirt wird, so folgt hieraus nach einem bekannten Satze aus der Planimetrie: Fig. 85.

$$\overline{f_1 q} : \overline{f_2 q} = \rho_1 : \rho_2 = \left(\alpha + \frac{\gamma x}{\alpha}\right) : \left(\alpha - \frac{\gamma x}{\alpha}\right) \text{ und}$$

$$\text{daraus } \overline{f_1 q} = \gamma + \frac{\gamma^2 x}{\alpha^2}, \ \overline{qc} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x, \ \overline{mq} = \frac{\beta^2 x}{\alpha^2}.$$

Hieraus ergiebt sich $\overline{aq} = \alpha - \frac{\gamma^2 x}{\alpha^2}$ und $pq = \sqrt{y^2 + \overline{mq}^2}$ $= \frac{\beta}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^4 - \gamma^2 x^2}$.

Soll nun ap ein Kreisbogen sein, so muss $\overline{aq} = \overline{pq}$ sein, woraus sich ergiebt $x = \alpha$, d. h. es muss p mit a zusammenfallen oder diesem unendlich nahe liegen. Für diesen Fall ist $\overline{aq} = \overline{pq} = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Man sieht hieraus zunächst, dass der Krümmungshalbmesser im Scheitel a der Hauptaxe einer Ellipse $= \frac{\beta^2}{\alpha}$ und daher (wenn man gleichzeitig Y mit X und β mit α vertauscht) im Scheitel b der Nebenaxe $= \frac{\alpha^2}{\beta}$. Man überzeugt sich aber auch, dass nur ein unendlich kleiner Bogen der Ellipse in der Nähe des Scheitels als Kreisbogen angesehen werden kann.

Bedenkt man aber, dass unsere Striche keine mathematischen Linien sind, und dass in Folge davon zwei Strecken auch als gleich angesehen werden können, wenn sie sich um eine sehr kleine Länge δ unterscheiden, die wir in der Ausführung von Zeichnungen vernachlässigen können, so können wir den

Bogen $\widehat{ap}$ als Kreisbogen ansehen, wenn $\overline{aq} - \overline{pq} = \delta$ ist. Setzen wir daher

$\alpha - \frac{\gamma^2 x}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^4 - \gamma^2 x^2} = \delta$, so ergiebt sich daraus:

$x = \alpha - \delta \pm \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{2\alpha\delta - \delta^2}$ oder, da δ sehr klein, und daher δ gegen α und δ^2 gegen $2\alpha\delta$ vernachlässigt werden kann:

$x = \alpha - \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{2\alpha\delta}$, in welchem Ausdrucke wir das Vorzeichen — (und nicht +) gewählt haben, da wir wissen, dass x nicht grösser als α werden kann. (Hätten wir $-\delta$ statt δ gesetzt, so würde aus dem Ausdruck $\sqrt{2\alpha\delta}$ der immaginär geworden wäre, sich ergeben haben, dass $+\delta$ statt $-\delta$ zu setzen sei.)

Wollen wir ein ähnliches Resultat in Bezug auf den Scheitel b in der Nebenaxe, so dürfen wir nur Y mit X und gleichzeitig β mit α vertauschen (wodurch, statt $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, erhalten wird: $\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \gamma \sqrt{-1}$. Da aber für diesen Fall $-\delta$ statt δ gesetzt werden muss, so erhalten wir:

$$y = \beta - \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{2\beta\delta}.$$

Anm. Nachdem wir uns nun überzeugt haben, dass wir eine Curve wirklich aus Kreisbögen zusammensetzen und Normalen derselben durch Konstruktion finden können, wollen wir das, was oben (176) besprochen wurde, noch weiter ausdehnen. Soll nemlich in Bezug auf Curven, deren Normalen wir durch Konstruktion finden können, eine Aufgabe gelöst werden, die man wie dort bemerkt wurde, auf Kreise (graphische Krümmungskreise) zurückführen will, so ist es gar nicht nöthig, die Curven wirklich zu konstruiren, sondern es genügt, wenn man die Curve nur beiläufig aus freier Hand (provisorisch) entwirft, um annähernd die Lage des gesuchten Punktes angeben zu können. Nimmt man nun zu beiden Seiten dieses provisorischen Punktes a auf der provisorischen Curve Punkte b, c an, die nicht weit von a entfernt sind, und sucht aus diesen die entsprechenden genauen (definitiven) Punkte der gegebenen Curve, so kann man den

dazwischen liegenden definitiven Curvenbogen (aus Kreisbögen zusammengesetzt) zeichnen, und dann, wie oben, (176) angegeben, verfahren. Dadurch erspart man die Zeichnung des übrigen Theils der Curve, und wird ein geübter Zeichner sogar einen Curvenbogen erhalten, der als graphisches Element betrachtet werden kann. Um eine derartige Konstruktion klar zu machen, namentlich aber die Art, wie man aus den provisorischen Punkten die Definitiven findet, wollen wir ein Beispiel machen.

Es seien von einer Ellipse die Scheitel auf ihrer Haupt- und Nebenaxe dann ein Punkt p gegeben, von welchem aus eine Normale an die Ellipse gezogen werden soll. Zeichnet man nun von der Ellipse den bei der Aufgabe betheiligten Quadranten möglichst gut aus freier Hand, und beschreibt aus p einen Kreis, der die provisorische Curve in einem Punkt a berührt, so ist a der provisorische Fusspunkt der verlangten Normale. Nimmt man nun auf der provisorischen Ellipse nahe an a (auf beiden Seiten von a) die Punkte b und c an, so findet man die ihnen entsprechenden definitiven Punkte in folgender Art. Man sucht die Brennpunkte f, f' der Ellipse, beschreibt aus f eine Kreislinie B, die durch b geht, sucht den zu $\overline{fb}$ gehörigen zweiten Brennstral (der also zu $\overline{fb}$ addirt, die grosse Axenlänge giebt) und beschreibt mit ihm aus f' einen zweiten Kreis C, der B in der Nähe von b in dem definitiven Punkte d schneidet. Sucht man ebenso den dem Punkte c entsprechenden definitiven Punkt e und konstruirt in d und e die Normalen, welche sich in m schneiden, so ist der aus m beschriebene, durch d und e gehende Kreisbogen das verlangte graphische Element. Zeigte sich's, dass d und e zu weit von einander liegen, so müsste man zwischen ihnen noch einen Punkt annehmen. Wäre aber der Bogen de zu kurz, so müsste man noch den benachbarten Bogen zu Hilfe nehmen.

194. Es seien für eine Ellipse $\alpha = 30$ *), $\beta = 24$, daher $\gamma = 18$; man soll die Curve aus Kreisbögen zusammensetzen. Fig. 84.

Wenn wir voraussetzen, dass wir in unserer Zeichnung feine Striche machen, so ist doch eine Länge von $\frac{1}{10}$ Millimeter

*) Hier und in allen folgenden Aufgaben, sollen die Längeneinheiten Millimeter sein.

so klein, dass wir sie (da sie mit blossem Auge kaum wahrgenommen wird) vernachlässigen können. Soll daher der Bogen $\widehat{ab}$ als Kreisbogen angesehen werden, so muss das x dieses Bogens sein:

$$x = \alpha - \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{2\alpha\delta},$$ oder, wenn wir $\alpha = 30, \beta = 24, \delta = \frac{1}{20}$ setzen,

$$x = 30 - 2,3 = 27,7.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für das y des Punktes d:

$$y = \beta - \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{2\beta\delta} = 24 - 2,6 = 21,4$$ *)

Haben wir nun die Punkte b und d durch die in 188 angegebene Konstruktion gefunden, so nehmen wir zwischen b und d noch so viele Punkte an, dass, wie oben bemerkt, $\widehat{bc}$ nur wenig grösser, als $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ etwas kleiner, als $\widehat{de}$ wird. In unserer Zeichnung wird daher ein einziger Punkt zwischen b und d genügen. Hat man nun so die Punkte b, c, d konstruirt, und sucht man die entsprechenden Normalen (nach 191 oder 185) B, C, D, so wird man finden, dass sich die Ellipse für die Zeichnung genau genug aus Kreisbögen zusammensetzen lässt.

Fig. 86. 195. Es kommt in der Anwendung oft vor, dass man, wenn a und b Scheitel einer Ellipse mit den Axen A, B und dem Mittelpunkt c sind, diese Ellipse nicht genau zeichnen braucht, sondern es genügt, wenn der Bogen $\widehat{ab}$, aus zwei Kreisbögen ad, db zusammengesetzt ist, die sich in d berühren, und ihre Mittelpunkte m, n in A, B haben. Man nennt in diesem Falle den Bogen ab einen Korbbogen. Es müssen demnach d, m, n in einer Geraden liegen und $\overline{ma} = \overline{md} = r$, $\overline{nb} = \overline{nd} = R$ sein.

Um nun die Punkte m, n zu erhalten, zeichnet man aus c mit dem Halbmesser $\overline{ca}$ den Kreisbogen afe, zieht einen beliebigen Radius cf, und aus a und b Parallele zu af und ef, die sich in d schneiden. Macht man noch dn || cf, so erhält man

*) Haben wir einen Massstab, der nur auf Millimeter getheilt ist, so können wir die Dezimalstellen durch Schätzung messen, wobei wir das obige x und y eher etwas grösser nehmen, da hiedurch die Genauigkeit vergrössert wird.

m und n. Denn es ist $\triangle$ amd $\sim$ $\triangle$ acf, also $\overline{am} = \overline{md}$, und $\triangle$ bnd $\sim$ $\triangle$ ecf, also $\overline{nd} = \overline{nb}$.

Man sieht, es lässt sich unsere Aufgabe auf unendlich verschiedene Arten lösen, da cf beliebig ist. Die beste Lösung ist die, bei welcher der Uebergang von $\widehat{ad}$ auf $\widehat{bd}$ am wenigsten auffällt, und dies ist der Fall, wenn $\frac{R}{r}$ möglichst klein ist, oder wenn cf $\perp$ ab. In dieser Art nimmt man also cf an, um einen möglichst gefällig aussehenden Korbbogen zu erhalten *).

Anm. Auch wenn ac und cb nicht senkrecht aufeinanderstehen kann, in derselben Art ein Korbbogen von a nach b konstruirt werden; nun muss, wenn $\wedge$ acb spitz ist, $\overline{bc} > \overline{ac}$. cos $\widehat{acb}$ sein.

196. Aufg. Es sind gegeben die Punkte a und b; gesucht eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt c derselben $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ dieselbe Differenz haben. Fig. 87.

Aufl. Nimmt man auf der Geraden ab die Punkte d und e so an, dass $\overline{de}$ gleich der konstanten Differenz (2α) ist und dass der Mittelpunkt f von $\overline{de}$ zugleich der von $\overline{ab}$ ist, so sind (aus ähnlichen Gründen wie oben bei der Ellipse) d und e Punkte der gesuchten Curve; ferner findet man einen 𝔓 (c) dieser Curve, wenn man auf ab einen 𝔓 (g) annimmt und mit $\overline{dg}$, $\overline{eg}$ aus den Punkten a, b Kreisbögen A, B beschreibt, deren Schnittpunkt c der Curve angehört; denn es ist $\overline{ac} - \overline{bc} = \overline{dg} - \overline{eg} = \overline{de} = 2\alpha$. Da unsere Kreisbögen sich in noch einem Punkte (h) schneiden, so erhalten wir hier zwei Curvenpunkte, die gegen die Gerade ab symmetrisch liegen. Wiederholt man diese

*) Man sieht aus unserer Figur, dass $\overline{mn}^2 = \overline{mc}^2 + \overline{nc}^2$ oder, $\overline{ac} = a$, $\overline{bc} = b$, $\overline{ab} = c$ gesetzt, $(R - r)^2 = (R - b)^2 + (a - r)^2$. Sucht man hieraus den Werth von r, für welchen $\frac{R}{r}$ ein Minimum wird, so findet man $(R - b) : (a - r) = a : b$, d. h. es ist dn $\perp$ ab. — Setzt man, wie manche Schriftsteller behaupten, R — r möglichst klein, wobei dn gegen A und B unter 45° geneigt erscheint, so kann es kommen, dass r negativ, also die Konstruktion unmöglich wird, während sie nach obigen Verfahren ausführbar ist. Man sieht daraus, dass das Verlangen, $\frac{R}{r}$ solle ein Minimum sein, das richtige ist.

Konstruktion mit denselben Halbmessern und Mittelpunkten, nur dass man in a mit dem kleineren und in b mit dem grösseren Halbmesser einsetzt, so erhält man wieder zwei Curvenpunkte, die mit den Punkten c und h gegen die (durch f senkrecht zu ab gezogene) 𝔖 (C) beziehungsweise symmetrisch liegen. Nimmt man $\overline{ae}$ zum kleineren und $\overline{be}$ zum grösseren Halbmesser, so berühren sich die Kreisbögen und man erhält als Curvenpunkte d oder e. Nimmt man den grösseren Halbmesser kleiner als $\overline{db}$ oder den kleineren kleiner als $\overline{be}$, so haben die Kreisbögen keinen Punkt gemein, und man erhält keinen Curvenpunkt. Nimmt man aber den 𝔓 (g) rechts von b an, in (welchem Falle die Halbmesser der Kreisbögen A und B beziehlich grösser sind als $\overline{db}$ und $\overline{be}$), so werden sich die Kreisbögen A und B stets schneiden (wie weit entfernt auch g von b genommen werden) da in diesem Falle die Summe ihrer Halbmesser grösser ist, als die Entfernung ihrer Mittelpunkte.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass die gesuchte Curve, die den Namen Hyperbel führt, eine Zwillingscurve ist, deren beide Theile offen sind; dass sie zwei aufeinander senkrechte Axen, und zwar eine reele (de) und eine immaginäre (C), und einen Mittelpunkt f hat. Die in der reelen Axe, welche auch Hauptaxe heisst, liegenden Punkte d und e der Hyperbel nennt man ihre Scheitel, die in jener Axe liegenden Leitpunkte a und b ihre Brennpunkte. Die Entfernung der Scheitel (d und e) nennt man die reele Axenlänge, ihre Hälfte, oder die Entfernung des Mittelpunktes von einem Scheitel, die reele Halbaxe; die Entfernung der Brennpunkte die Exzentrizität; die von einem Curvenpunkte nach einem Brennpunkte geführte Gerade Brennstral. Endlich erhalten wir den Satz:

Die reele Axenlänge einer Hyperbel ist gleich der Brennstralendifferenz eines beliebigen Punktes in ihr.

Fig. 88. 197. Durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie bei der Ellipse findet man folgende Sätze:

1) Die Tangente einer Hyperbel im 𝔓 (c) halbirt den Winkel der Brennstralen dieses Punktes;
2) die Normale der Hyperbel im 𝔓 (c) bildet mit den Brennstralen dieses Punktes gleiche Winkel.

Hieraus findet man (s. 186) die Tangente einer Hyperbel, wenn die Brennpunkte a und b und die reele Axenlänge gegeben sind

a) durch einen 𝔓 (e), indem man mit der reelen Axenlänge aus dem einen Brennpunkt (hier a) eine Kreislinie A (die Leitlinie) beschreibt und den Punkt d aufsucht, in welchem diese von der aus e mit dem Halbmesser $\overline{eb}$ beschriebenen Kreislinie B geschnitten wird. Halbirt man wieder $\overline{bd}$ durch die dazu Senkrechte D, so ist diese Gerade die verlangte Tangente, und der Punkt c, in welchem sie vom Radius da der Leitlinie geschnitten wird, ist der Berührungspunkt der Tangente;

b) parallel einer Geraden C, wenn man durch b eine Gerade bd senkrecht zu C zeichnet, und $\overline{bd}$ senkrecht halbirt; diese Halbirungslinie D ist die gesuchte Tangente, und der Punkt c, in welchem sie von dem Radius ad der Directrix geschnitten wird, der Berührungspunkt.

Anm. Auch hier können, wenn die Tangente durch den Punkt e gehen soll, ebenso wie bei der Ellipse die Fälle vorkommen, dass es zwei Tangenten oder keine Tangente oder eine giebt, und wird im letzteren Falle der 𝔓 (e) der Hyperbel selbst angehören. Aber auch, wenn die Tangente parallel zur Geraden C sein soll, können uns die drei Fälle begegnen, indem hier der Punkt b ausserhalb des Kreises A liegt, und demnach die Gerade bd nicht immer wie in unser Figur die Kreislinie A (in zwei Punkten) schneidet; dieselbe kann vielmehr auch so liegen, dass sie keinen Punkt mit A gemein hat, in welchem Falle eine Tangente || C unmöglich ist. Es kann aber auch der besondere Fall eintreten, dass die 𝔖 (bd) die Leitlinie A berührt, und demnach nur eine Tangente || C möglich ist. Diesen Fall wollen wir in der folgenden Nr. näher betrachten.

198. Nehmen wir an, die Gerade B, mit der die an eine Hyperbel (deren Leitlinie A und deren Brennpunkt b ist) zu legende Tangente parallel sein soll, sei so beschaffen, dass die aus b zu ihr gezogene Senkrechte bc die Leitlinie A in c berührt, so giebt es natürlich nur eine Tangente. Suchen wir diese, indem wir bc in e senkrecht halbiren, so muss diese Halbirungslinie de durch den Mittelpunkt d der Hyperbel gehen (denn es ist ad : db = ce : eb). Suchen wir den Berührungspunkt unserer Tangente, indem wir ihren Schnitt mit der Ge- Fig. 89.

raden ac suchen, so finden wir, dass ac || de ist, und daher die Tangente de keinen Berührungspunkt, oder, wenn wir so sagen wollen, ihren Berührungspunkt in unendlicher Ferne hat. Sie wird demnach die Hyperbel nicht wirklich berühren, sondern diese wird ihr immer näher kommen, ohne sie je zu erreichen. Man nennt, wie wir schon früher gesagt haben, eine solche Tangente, deren Berührungspunkt in unendlicher Ferne liegt, eine Asymptote der Curve, und die Curve, die eine Asymptote hat, eine asymptotische Curve. Betrachten wir noch das rechtwinkelige Dreieck bde, so ist $\overline{bd}$ die halbe Exzentrizität, $\overline{ed}$ die reele Halbaxe; die Seite $\overline{be}$ nennt man die immaginäre Halbaxe. Ferner ist der Winkel, den de (die reele Halbaxe) mit der Hypotenuse db einschliesst, gleich dem Winkel, den die reele Axe mit der Asymptote bildet, und der Winkel der Seite $\overline{eb}$ (der immaginären Halbaxe) mit db gleich dem Winkel, den die immaginäre Axe mit der Asymptote macht. Nachdem man endlich noch leicht einsehen wird, dass es noch eine zweite Asymptote D giebt, so ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Hyperbel hat zwei Asymptoten, die beide durch ihren Mittelpunkt gehen;
2) Bildet man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der halben Exentrizität, und dessen eine Kathete gleich der reelen Halbaxe ist (die andere Kathete dieses Dreieks nennt man immaginäre Axe), so ist der Winkel, den die der reelen Halbaxe gleiche Seite mit der Hypotenuse bildet, gleich dem Winkel der reelen Axe und der Asymptote. Hieraus ergiebt sich
3) dass die Gestalt der Hyperbel, sobald von den Stücken: Exentrizität, reele Halbaxe, immaginäre Halbaxe, Winkel der Asymptote mit der reelen oder immaginären Axe zwei von einander unabhängige bekannt sind, bestimmt ist. Denn man

kann mit Hilfe der beiden Stücke das rechtwinkelige Dreieck konstruiren, und erhält dadurch die Exentrizität (also die gegenseitige Lage der Brennpunkte) und die reele Axe. Wie man aber damit die Hyperbel konstruiren kann, haben wir oben gezeigt.

199. Setzt man die reele Halbaxe $= \alpha$, die immaginäre $= \beta$, die halbe Exzentrizität $= \gamma$, so ist nach den vorigen Sätzen

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Betrachtet man wieder die beiden Axen der Hyperbel als X und Y, und zwar wieder die Hauptaxe als X, und bezeichnet für einen beliebigen Punkt die Brennstralen mit ρ_1 und ρ_2 (und zwar hier den grösseren mit ρ_1) so wird man da $\rho_1 - \rho_2 = 2\alpha$ ist, durch ganz ähnliche Betrachtungen wie oben bei der Ellipse, zu den Gleichungen gelangen:

$$\rho_1 = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} \text{ und}$$

$\alpha^2 + 2\gamma x + \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2} = \gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + y^2$; da aber $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, so erhält man: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ oder $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}$, als Gleichung der Hyperbel, wenn ihre Axen mit den Coordinatenaxen (und zwar die Hauptaxe mit X) zusammenfallen.

Hat man eine andere Hyperbel (mit anderem α und β), ist aber für beide das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ dasselbe, so sind (147.) die beiden Hyperbeln ähnlich. Da aber in diesem Falle das in voriger Nummer (Satz 2) genannte Dreieck für die beiden Hyperbeln ähnlich gestaltet ist, so sieht man, dass Hyperbeln ähnlich sind, sobald die Winkel ihrer Asymptoten für beide gleich sind. Lässt man das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ unverändert, aber α sich ändern, so bleibt also der Asymptotenwinkel unverändert, und demnach auch die Asymptoten selbst, wenn man die Axen der Hyperbeln unverändert beibehält. Wird $\alpha = o$, so erhält man $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2} = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$, d. h. zwei Gerade, die mit den Asymptoten zusammenfallen. Wir haben also die Sätze:

1) Haben Hyperbeln gleiches Axenverhältniss oder gleiche Asymptotenwinkel, so sind sie ähnlich;
2) haben ähnliche Hyperbeln dieselben Haupt- und dieselben Nebenaxen, so haben sie auch dieselben Asymptoten;

3) ist die reele Halbaxe α einer Hyperbel $= 0$, so ist diese in zwei Gerade übergegangen, die zugleich ihre Asymptoten vorstellen.

Anm. 1. Mittelst der obigen Gleichung der Hyperbel kann man in ähnlicher Weise, wie bei der Ellipse, manche Aufgaben lösen, insbesondere die Aufgabe:

Aus den Axen- und Asymptotenrichtungen nebst einem Punkte p der Hyperbel das α zu finden. Denn durch die Asymptoten ist das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ und durch den Punkt p, dessen Coordinaten x und y bekannt; es lässt sich daher aus der Gleichung $y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$ das α finden. Am Zweckmässigsten verfährt man dabei so, dass man in einer Asymptote einen Punkt q annimmt, dessen Ordinate $= y$ (der Ordinate von p) ist und dessen Abcisse wir mit x_1 bezeichnen wollen; dann ist $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{x_1}$ und demnach $y = \frac{y}{x_1} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$, woraus sich ergiebt $\alpha = \sqrt{x^2 - x_1^2}$, und daher α mittelst eines rechtwinkeligen Dreiecks leicht konstruirt werden kann.

Anm. 2. Man sieht, dass die Gleichung der Hyperbel aus der der Ellipse gefunden wird, wenn man in diese $-\beta^2$ statt $+\beta^2$, oder $\beta\sqrt{-1}$ statt β setzt. Demnach geht die in Nr. 193 für die Ellipse gefundene Formel $x = \alpha - \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{2\alpha\delta}$ bei der Hyperbel über in die $x = \alpha + \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{2\alpha\delta}$, wenn nemlich gleichzeitig $-\delta$ statt δ setzt. Somit hat man auch für die Hyperbel einen Anhaltspunkt, für den Fall man sie aus Kreisbögen zusammensetzen will.

Fig. 90. 200. Aufg. **Es sind gegeben eine Gerade A und ein Punkt a; gesucht eine Curve, deren Punkte von A und a gleichweit entfernt sind.**

Aufl. Zieht man ab $\perp$ A und nimmt auf ab den Punkt c in der Mitte von $\overline{ab}$, so ist c ein Punkt der Curve. Zeichnet

man eine beliebige Gerade B || A und eine Kreislinie C mit einem Halbmesser, gleich der Entfernung von A und B, so sind die Schnitte (d, e) von B und C, die gegen ab symmetrisch liegen, Punkte der Curve. Es ist also ab eine Axe und c ein Scheitel der Curve. Nimmt man die Gerade B links vom Scheitel c an, so wird sie von C nicht erreicht, und liegen daher alle Curvenpunkte **rechts** von c und zwar bis in's Unendliche fort.

Die verlangte Curve, welche man **Parabel** nennt, ist also eine einfache, offene, mit einer Axe (ab) und einem Scheitel (c) versehene Curve. Von den beiden Leitenden nennt man A die **Direktrix** und a den **Brennpunkt**. Die beiden von einem Curvenpunkt d gegen A und a gezogenen Geraden nennt man **Brennstralen**.

Will man sich überzeugen, dass diese Curve zweiter Ordnung ist, so suche man ihre Gleichung in Bezug auf zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen, die man am Besten so wählt, dass X mit der Axe ab zusammenfällt und der Scheitel c der Anfangspunkt ist. Dann ist für den beliebigen Punkt d der Curve $\overline{cf} = x$ und $\overline{df} = y$ und daher, wenn $\overline{ac} = \overline{cb} = p$ gesetzt wird: $y^2 = \overline{ad}^2 - \overline{af}^2 = \overline{bf}^2 - \overline{af}^2 = (p + x)^2 - (p - x)^2 = 4px$. Die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 4px$$

ist also vom zweiten Grade und daher die Curve zweiter Ordnung.

Anm. Wie wir früher gesehen haben, lässt sich eine Ellipse (und eine Hyperbel) als eine Curve ansehen, deren Punkte gleichweit entfernt sind von einem Punkte (Brennpunkt) und einer Kreislinie (Leitlinie). Demnach lassen sich die drei Curven zweiter Ordnung (Ellipse, Hyperbel, Parabel) auf gleiche Art erzeugen, nemlich durch eine Leitlinie und einen Leitpunkt, in Bezug auf welche Leitenden jeder Curvenpunkt gleiche Entfernung hat. Es unterscheiden sich diese Curven aber dadurch, dass der Brennpunkt bei der Ellipse innerhalb, bei der Hyperbel ausserhalb des Leitkreises liegt, während bei der Parabel der leitende Kreis einen unendlich grossen Halbmesser hat, d. h. in eine Gerade übergegangen ist.

201. Durch eine ähnliche Betrachtung, wie bei der Ellipse, Fig. 90.
kann man sich überzeugen, dass **die Tangente einer Pa-**

rabel den Winkel der Brennstralen halbirt, die Normale aber mit beiden Brennstralen gleiche Winkel bildet, dass daher wieder der Brennpunkt a und der dem Berührungspunkt entsprechende Punkt g in der Direktrix gegen die Tangente symmetrisch liegen. Hat man daher eine Tangente an eine Parabel zu konstruiren, die

1) durch den Punkt h geht, und beschreibt man aus h mit dem Halbmesser $\overline{ha}$ einen Kreis F, so ist dessen Schnitt g mit A der entsprechende Direktrix-Punkt;

2) parallel zu einer Geraden E ist, so zieht man durch a die Gerade G ⊥ E, so ist der Punkt g, in welcher A von G geschnitten wird, der Direktrix-Punkt.

In beiden Fällen ist die senkrechte Halbirungslinie von $\overline{ag}$ die Tangente D und der Punkt d, in welchen D von der durch g senkrecht zu A gezogenen Geraden geschnitten wird, der Berührungspunkt.

Anm. F und A haben, je nach Umständen, zwei, einen oder keinen Punkt gemein, wie früher bei Ellipse und Hyperbel. Dagegen haben A und G nie mehr als einen Punkt gemein, der aber in's Unendliche fällt, wenn G || A wird, d. i. wenn E ⊥ A oder parallel zur Axe der Parabel ist. Es folgt daher der Satz:

3) **Parallel einer Geraden giebt es an eine Parabel in der Regel eine einzige, parallel zur Axe keine Tangente.**

Fig. 90. 202. Da $\overline{ak} = \overline{gk}$ und $\overline{ac} = \overline{bc}$, so muss ck || A sein; die Gerade ck berührt aber offenbar die Parabel im Scheitel c und mag daher die Scheiteltangente heissen. Es ist ferner:

$$\overline{gb} : \overline{kc} = \overline{ba} : \overline{ca} = 2 : 1;$$ da auch

$\overline{df} = \overline{bg}$, so ist $\overline{kc} = \frac{\overline{df}}{2}$. Es ergiebt sich daher der Satz:

1) **Trägt man auf die Scheiteltangente vom Scheitel c aus $\overline{ck}$ gleich der halben Ordinat $\overline{df}$ eines Punktes d der Parabel, so ist die Gerade dk die Tangente im Punkte d.**

Da noch $\overline{lc} : \overline{lf} = \overline{kc} : \overline{df} = 1 : 2$, so ist $\overline{lc} = \overline{cf}$. Man findet demnach

2) **die Tangente der Parabel für einen Punkt d, wenn man $\overline{cl} = \overline{fl}$ macht und dl zieht.**

Da endlich ka $\perp$ dk, so folgt:

3) sind von einer Parabel der Scheitel c, die Axe H und ein beliebiger Punkt d gegeben, so findet man zunächst (nach obigem Satze 1) den Punkt k und die Tangente D; zieht man noch G $\perp$ D, so ist der Schnitt von G und H der Brennpunkt a. Durch diesen lässt sich aber leicht A und damit irgend ein weiterer Punkt der Parabel finden.

Anm. Zieht man noch die Normale dm des Punktes d, so ist $\overline{fm} : \overline{fd} = \overline{kc} : \overline{lc}$ oder $\overline{fm} : y = \frac{y}{2} : x$, (wenn der Scheitel c wieder als Anfangspunkt und die Axe als X betrachtet wird). Es ist also, weil (nach 200) $y^2 = 4px$, $\overline{fm} = 2p$. Demnach ist $\overline{cm} = x + 2p$ und $\overline{dm} = \sqrt{y^2 + 4p^2} = \sqrt{4px + 4p^2}$. Setzt man nun wieder (wie 193) $cm - \delta = dm$, so findet man $x = \delta + \sqrt{\delta^2 + 4\delta p}$ oder, wenn δ wieder sehr klein, $x = \sqrt{4\delta p}$. Hiedurch hat man wieder Anhaltspunkte zur Zusammensetzung der Parabel aus Kreisbögen.

203. Die oben (199) entwickelte Coordinatengleichung der Parabel giebt uns ein Mittel zu einer anderen Konstruktion dieser Curve, wenn wieder die Axe X der Scheitel o und ein Punkt p gegeben sind. Fig. 90.

Zieht man nemlich die Scheiteltangente Y und die Coordinaten pa, pb des Punktes p, theilt $\overline{pa}$ und $\overline{pb}$ in n (hier in 4) gleiche Theile, bezeichnet die Theilpunkte von a und b aus mit 1, 2, 3 . . . resp. 1′ 2′ 3′ . . . und zieht von den Punkten auf pa Theillinien parallel zu X, von denen auf pb Theillinien nach dem Scheitel, so sind die Schnittpunkte von je zwei gleich bezifferten Theillinien Punkte der Parabel, z. B. der Punkt d.

Denn es ist $\overline{oc} = \frac{3}{4}\,\overline{ob}$ und $\overline{dc} : \overline{b3'} = \overline{oc} : \overline{ob}, = 3 : 4$ oder, wenn man $\overline{pb} = \alpha$ und $\overline{ob} = \overline{pa} = \beta$ setzt, und bedenkt, dass ausserdem $\overline{dc} = x$ und $\overline{oe} = y$ ist,

$$y = \tfrac{3}{4}\,\beta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; A)$$
$$x : \tfrac{3}{4}\,\alpha = 3 : 4$$
$$x = (\tfrac{3}{4})^2\,\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; B)$$

Es ist demnach [aus A)] $(\frac{3}{4})^2 = \frac{y^2}{\beta^2}$ und [aus B)] $(\frac{3}{4})^2 = \frac{x}{\alpha}$, daher $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha} x$ oder, wenn man $\frac{\beta^2}{\alpha} = p$ setzt: $y^2 = px$, welches Resultat man für jeden gefundenen Punkt unserer Konstruktion erhält. Es sind demnach die konstruirten Punkte Parabelpunkte.

204. Die drei Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) haben noch Eigenschaften gemein, die von Interesse sind, (die in der analytischen Geometrie und in der neueren Geometrie nachgewiesen werden), die wir daher hier ohne Beweis aufführen. Zum Verständniss dieser Eigenschaften müssen wir folgende Bemerkungen vorausschicken.

Hat man auf einer Geraden zwei feste Punkte a und b, und nehmen wir zwischen a und b einen beliebigen Punkt c an, so giebt es immer (ausserhalb des Zwischenraumes von a und b) noch einen Punkt d von der Art, dass $\overline{ac} : \overline{bc} = \overline{ad} : \overline{bd}$ ist; solche vier Punkte einer Geraden, welche die eben ausgesprochene Proportion geben, nennt man *harmonische Punkte*, oder eine *harmonische Punktreihe* und sagt *a und b sind durch c und d harmonisch getrennt*. Liegt c in der Mitte von $\overline{ab}$, so muss, damit unsere Proportion wahr ist, d in unendlicher Ferne liegen; liegt c näher an b, als an a, so muss dies auch für d der Fall sein; fällt c auf b, so muss auch d auf b fallen.

205. Zieht man eine beliebige Gerade A, welche eine Curve B zweiter Ordnung in zwei Punkten a, b schneidet, und nimmt auf A zwei Punkte c und d an, die durch a und b *harmonisch getrennt* sind, so nennt man c und d *konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt* B, und denjenigen dieser Punkte den *inneren* (oder sagt, er liegt *innerhalb* der Curve) von dem aus man *keine*, und denjenigen den *äusseren*, von dem aus man *zwei* Tangenten ziehen kann, (liegt der Punkt *auf* der Curve, so entspricht ihm *eine* Tangente, und liegt er dann an der Grenze von innen und aussen). Hält man nun den einen der beiden Punkte, z. B. den äusseren d, fest, zieht von ihm aus alle möglichen Geraden A, die mit der Curve B zwei Punkte gemein haben (darunter auch die beiden Tangenten, für deren jede a und b zusammenfallen in den Be-

rührungspunkt) und sucht auf jeder solchen Geraden den konjugirten Punkt c von d, so zeigt die neuere und analytische Geometrie, dass alle die dem Punkte d konjugirten Punkte c, (zu welchen letzteren Punkten auch die Berührungspunkte der beiden Tangenten gehören) in einer geraden D liegen; man nennt nun d den Pol von D, und D (und zwar die ganze D, nicht blos, das von der Curve eingeschlossene Stück) die Polare von d in Bezug auf die Curve B. Hält man ebenso den Punkt c fest und sucht alle seine konjugirten Punkte d, so bilden diese Punkte ebenfalls eine Gerade C, die wieder die Polare des Punktes c, welcher der Pol von C genannt wird, bilden. Man sieht also

1) In Bezug auf eine Curve B zweiter Ordnung entspricht jedem äusseren Punkt, als Pol, eine Polare, welche die Curve in zwei Punkten schneidet, jedem inneren Punkt, eine Polare, welche die Curve nicht schneidet, und daher jedem Punkt auf B eine Polare, welche die Curve in diesem Punkt berührt.

2) Man kann die Polare eines äusseren Punktes d finden, wenn man von d aus Tangenten an die Curve zieht, und deren Berührungspunkte verbindet; ferner kann man den Pol einer, die Curve in zwei Punkten schneidenden Polare erhalten, indem man in diesen Punkten Tangenten an die Curve legt und deren Schnitt sucht; soll die Polare eines inneren Punktes gesucht werden, so kann man durch denselben zwei Gerade legen, deren Pole suchen und sie verbinden; endlich kann man den Pol einer, die Curve nicht schneidenden Geraden finden, indem man von zwei Punkten dieser Geraden die Polaren und dann deren Schnitt sucht.

206. Lässt man den äusseren Punkt d in unendlicher Ferne liegen, so dass die von ihm aus an die Curve gezogenen Geraden parallel laufen, und legt man nun durch d eine Gerade A welche die Curve nach den Punkten a, b schneidet, und sucht

auf A den konjugirten Punkt c von d, so liegt c in der Mitte der Sehne $\overline{ab}$ (s. 204). Es geht hieraus hervor:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kegelschnitts liegen in einer Geraden, (die offenbar durch den in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden Mittelpunkt der Curve geht, und Durchmesser heisst), welche die Polare des durch die Sehnenrichtung bestimmten, unendlich fernen Punktes ist.

Nun nennt man zwei Punkte konjugirt, wenn der eine in der Polaren des anderen liegt und zwei Gerade konjugirt, wenn die eine die Polare der anderen enthält; demnach nennt man jede der obigen parallelen Sehnen dem durch ihre Mittelpunkte gehenden Durchmesser konjugirt.

Anm. Hat die Curve einen Mittelpunkt (Ellipse oder Hyperbel), so geht eine der genannten parallelen Sehnen durch den Mittelpunkt, und man erhält einen Durchmesser, der dem (als Ort der Sehnenmittelpunkte) vorhandenen Durchmesser konjugirt ist. Hat man aber eine Parabel, deren Mittelpunkt in unendlicher Ferne liegt, so werden alle Durchmesser (Orte der Mittelpunkte paralleler Sehnen) parallel. Man sieht zugleich, dass der Mittelpunkt der Pol der unendlich fernen Geraden ist.

207. Hat man auf einem Kegelschnitt sechs beliebige Punkte a, b, c, d, e, f, zieht die Geraden ab, bc, cd, de, ef, fa (welche also ein Sechseck bilden), und nennt von diesen Geraden die 1te und 4te, die 2te und 5te, die 3te und 6te Gegenseiten des Sechsecks, so liegen die drei Schnittpunkte zweier Gegenseiten des Sechsecks in einer Geraden. Man nennt diesen Satz den von Pascal. — Legt man aber in den sechs Punkten Tangenten A, B, C, D, E, F an den Kegelschnitt, die also ein tangirendes Sechseck bilden, dessen Ecken die Schnittpunkte von A und B, B und C, C und D, D und E, E und F, F und A sein sollen, und nennt man wieder das 1te und 4te, das 2te und 5te, das 3te und 6te Eck Gegenecken, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte. Dieser Satz, (der mit Hilfe des Satzes von Pol und Polare aus den von Pascal abgeleitet werden kann), wird der Satz von Brianchon genannt.

Fallen von den sechs gegebenen Punkten zwei zusammen, so geht deren Verbindungslinie in eine Tangente über und das Sechseck in ein Fünfeck. Bei zwei Tangenten kommt man auf ein Viereck, bei dreien auf ein Dreieck, und es wird nicht schwer sein, den Pascal'schen Satz für diese besonderen Fälle auszusprechen. So z. B. wird sich ergeben:

Wenn die Ecken eines Dreiecks auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen die drei Punkte, in denen sich je eine Seite mit der Tangente im Gegeneck schneiden, in einer Geraden.

208. Aus dem Pascal'schen Satze folgt, dass aus fünf Punkten eines Kegelschnitts (von denen keine drei in einer Geraden liegen) sich beliebig viele sechste Punkte finden lassen. Hat man z. B. die Punkte a, b, c, d, e und betrachtet man ab, bc, cd, de als vier aufeinander folgende Seiten eines Sechsecks (dessen Ecken die fünf gegebenen Punkte und ein noch zu suchender Punkt f sind), so ziehe man durch e eine beliebige Gerade A, die man als die fünfte Seite des Sechsecks ansieht, und sucht den Schnitt von ab und de (den Punkt m), dann von bc und A (den Punkt n) und zieht die Gerade mn, so muss hierauf auch der Schnitt von cd mit der sechsten Seite liegen. Sucht man daher den Punkt p, wo die Geraden cd und mn sich schneiden, so ist ap die sechste Seite, und der Schnitt von ap und A, der Punkt f. Hieraus folgt:

Durch fünf Punkte (von denen keine drei in einer Geraden liegen) ist nur ein einziger Kegelschnitt möglich, und es können sich daher zwei Kegelschnitte nach höchstens vier Punkten schneiden.

209. Wir haben schon früher angeführt, dass der Riss (Loth- und Stralenriss) einer Curve zweiter Ordnung auch eine solche Curve giebt. Diesen Umstand kann man sehr häufig mit Vortheil benützen, namentlich dadurch, dass man einen gegebenen Kegelschnitt A′ als Parallelriss eines anderen A_1 ansieht. In diesem Falle haben diese beiden Kegelschnitte, da der Parallelriss eines unendlich fernen Punktes wieder in unendlicher Ferne liegt, gleichviele unendlich ferne Punkte, d. h. wenn A′ eine Ellipse, Parabel, Hyperbel ist, so ist A_1 beziehungsweise wieder eine Ellipse, Parabel, Hyperbel. Wir sehen dann die beiden Fig. 92.

Ebenen der Curven A_1, A' als Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}'$) an und klappen diese beiden um ihre Schnittlinie ($\mathfrak{K}'$) in unser Zeichnungsblatt.

Denkt man sich dann in der Curve A_1 parallele Sehnen gezogen, so sind die Parallelrisse ($\mathfrak{R}'$) dieser Sehnen, d. h. die entsprechenden Sehnen von A', wieder parallel. Halbirt man die Sehnen von A_1, so sind dem entsprechend auch die Sehnen von A' halbirt, und liegen die Halbirungspunkte der Sehnen von A' ebensogut in einer Geraden, als die der Curve A_1 (s. 206), d. h. den konjugirten Durchmessern von A_1 entsprechen konjugirte Durchmesser von A'.

Ist nun ein Kegelschnitt A' durch zwei der Richtung und Grösse nach gegebene konjugirte Halbmesser (halbe Durchmesser) $\overline{ca}$, $\overline{cb'}$ gegeben*), so kann man ihn als $\mathfrak{R}'$ eines in der $\mathfrak{T}'$ liegenden gleichnamigen Kegelschnittes A_1 ansehen, der mit A' den einen gegebenen Durchmesser, hier $\overline{ac}$, (wenn nur ein solcher gegeben ist, diesen Durchmesser) gemein hat, und von welchem ein zweiter mit $\overline{ac}$ konjugirter Durchmesser (oder Halbmesser), hier $\overline{cb}$, in beliebiger Länge und unter beliebigem Winkel zu ac gegeben ist. Wegen der Willkührlichkeit dieses Winkels wird man einen rechten Winkel wählen, so dass für A_1 die Halbmesser $\overline{ac}$ und $\overline{cb_1}$ zu Halbaxen werden. Was aber die Länge der Halbaxe cb_1 betrifft, so kann man die am Zweckmässigsten entweder

a) gleich cb' nehmen, oder

b) (bei Hyperbel und Ellipse) gleich $\overline{ac}$ machen, wodurch bei der Ellipse die Curve A_1 ein Kreis wird, wie in unserer Figur**).

Ist nun, wie in unserer Figur, b_1c nicht gleich $b'c$, und bezeichnen wir die Ordinate irgend eines Punktes d_1 der A_1 mit y_1 die des entsprechenden Punktes d' der A' mit y', so ist für alle zusammengehörige Curvenpunkte das Verhältniss $y' : y_1$ konstant. Dadurch ist man im Stande, verschiedene Aufgaben

---

*) Statt des einen Durchmesser kann auch eine damit parallele Sehne gegeben sein.

**) Im Falle a) wird, wenn man c als Anfangspunkt und Gerade ac als X-Axe für A_1 und A', $\overline{cb_1}$ für A_1 und cb' für A' als Y ansieht, für jeden Punkt von A_1, das x und y dieselbe Grösse haben, wie für den entsprechenden Punkt von A', und werden daher die Gleichungen für A und A' gleiche Gestalt haben.

für die Kegelschnitte zu lösen, von denen wir zunächst ein paar in Bezug auf die Ellipse lösen wollen, in welchem Falle wir in der Curve A_1 die Halbaxe $\overline{b_1 c} = \overline{ac}$ machen, so dass A_1 eine Kreislinie wird. Soll nun

1) von der Ellipse A' gegeben sein ein Durchmesser $\overline{ac}$ und eine halbe damit konjugirte Sehne md', und will man daraus den mit $\overline{ac}$ konjugirten Durchmesser finden, so zieht man diejenige Ordinate (md_1) des Kreises A_1, welche der md' von A' entspricht, zieht $cb' \parallel md'$, $cb_1 \perp ac$ und macht $\overline{cb'}$ so lange, dass sich verhält $\overline{cb'} : \overline{cb_1} = \overline{md'} : md_1$, so ist cb' der gesuchte halbe Durchmesser *). — Will man in d' die Tangente C' an A' finden, so zeichne man die Tangente C_1 für den Kreis A_1 im Punkte d_1 und verbinde f mit d'. Denn C' ist der $\mathfrak{R}'$ von C_1.

2) Soll der Schnittpunkt der durch die beiden konjugirten Halbmesser $\overline{ca}$, $\overline{cb'}$ gegebenen Ellipse A' mit der Geraden B' gefunden werden (ohne dass man die Ellipse zeichnet), so sucht man die der B' entsprechende Gerade B_1, indem man von irgend einem Punkte von B', am Besten von e' (auf cb') den entsprechenden Punkt e_1 sucht (wobei wieder $\overline{ce_1} : \overline{ce'} = \overline{cb_1} : \overline{cb'}$) und ge_1 zieht; dadurch erhält man den Schnitt d_1 von B_1 mit A_1 und aus d_1 den entsprechenden Punkt d'.

210. Aus zwei konjugirten Durch- oder Halbmessern einer Ellipse die Axen derselben zu finden. Fig. 93.

Aufl. Es seien $\overline{ac'}$ und $\overline{b'c'}$ die konjugirten Halbmesser, c' der Mittelpunkt der Ellipse A', die wir wieder als $\mathfrak{R}'$ eines Kreises A_1 betrachten, dessen Halbmesser gleich $\overline{b'c'}$ ist. Nur wollen wir hier die Kante $(\mathfrak{K}')$ nicht durch $b'c'$, sondern durch $a \parallel b'c'$ legen, so dass die (hier nicht gezeichnete) Ellipse A' und A_1 sich in a berühren.

Zieht man nun in A_1 zwei aufeinander senkrechte Radien B_1, C_1 und sucht die entsprechenden Geraden von A', nemlich

*) Um diese Proportion durch Konstruktion auszuführen, darf man nur durch b_1 eine Gerade $b_1 b' \parallel d_1 d'$ machen, wodurch man b' erhält. Man kann aber auch auf irgend einem Blatt Papier, auf die bekannte Art, zu $\overline{cb_1}$, $\overline{md'}$, $\overline{md_1}$ die vierte Proportionale durch Konstruktion suchen.

B', C' (indem man d, e mit c' verbindet), so sind diese Geraden konjugirte Durchmesser von A'. Denn zieht man in A_1 parallele Sehnen zu B_1, so werden sie offenbar von C_1 halbirt; demnach werden in A' parallele Sehnen zu B' von C' halbirt. Man erhält so den Satz:

Betrachtet man eine Ellipse A' als $\mathfrak{N}'$ eines Kreises A_1, so sind die $\mathfrak{N}'$ von zwei aufeinander senkrechten Durchmessern des Kreises konjugirte Durchmesser der Ellipse.

Sollen nun aber B' und C' nicht blos konjugirt sein, sondern die Axen vorstellen, also auch aufeinander senkrecht stehen, so liegen die Punkte c_1, c', d, e (d, e sind aber noch nicht gefunden) in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt auf $\mathfrak{K}'$ liegt; dieser Mittelpunkt liegt aber auch von c und c' gleichweit entfernt.

Halbirt man demnach cc' durch eine Senkrechte, sucht den Punkt f, wo diese $\mathfrak{K}'$ schneidet, und macht $\overline{fd} = \overline{fe} = \overline{fc}$, so erhält man durch $c'd$ und $c'e$ die verlangten Axen B', C' der Richtung nach.

Sucht man noch auf B', C' die Punkte g', h', welche den Endpunkten g_1, h_1 von B_1, C_1 entsprechen, so hat man auch zwei Scheitel von A'.

Anm. Man kann aus dieser Konstruktion mittelst weiterer Betrachtung, die wir der Kürze wegen übergeben wollen, folgende Konstruktion unserer Aufgabe ableiten.

Man zieht von dem Endpunkt a eines konjugirten Halbmessers eine Senkrechte auf den anderen Halbmesser und trägt darauf den anderen Halbmesser, (also hier $b'c'$) von a nach ac und ak. Verbindet man nun c und g mit dem Mittelpunkt c', so werden die Winkel dieser beiden Geraden von den Axen B' und C' halbirt. Ferner ist $\overline{c'h} = \alpha = \frac{\overline{c'c} + \overline{c'k}}{2}$ und $c'g' = \beta = \frac{\overline{ac'} - \overline{c'k}}{2}$.

Fig. 94. 211. Sind von einer Hyperbel A' zwei konjugirte Durchmesser $\overline{ca}$, $\overline{cb'}$ (Fig. a), (von denen einer, hier cb', immaginär ist) gegeben, und sollen von derselben die Axen gefunden werden, so betrachten wir wieder die A' als $\mathfrak{N}'$ einer Hyperbel A_1, deren Axen $\overline{ca}$ und $\overline{cb_1}$ ($\perp ca$) sind. Dann erhält man aus dem Rechteck acb_1d_1 die Asymptote cd_1 (oder B_1), welcher B' als $\mathfrak{N}'$

entspricht. Da aber bei Parallelrissen der 𝔑′ des unendlichen fernen Punktes wieder ein unendlich ferner Punkt ist, so ist B′ die Asymptote der gegebenen Hyperbel.

Sind daher von einer Hyperbel A′ zwei konjugirte Halbmesser $\overline{ca}$, $\overline{cb'}$ (Fig. b) gegeben, so findet man durch das Viereck cad′b′ die Asymptoten B′ und C′ und durch Halbirung der Winkel von B′ und C′ die Axen X, Y (X ist die Hauptaxe, wenn wie hier vorausgesetzt wird $\overline{ca}$ reel ist), und da noch a ein Punkt der Hyperbel ist, so kann man (s. 199. Anm. 1) auch α und daraus mit Hilfe der Asymptote auch γ, also die Brennpunkte finden, und demnach die Curve konstruiren.

212. Hat man von einer Parabel eine zu ihrer Axe parallele Gerade A und darauf einen Punkt a der Parabel, (so dass A ein Durchmesser der Curve ist), und eine zu A konjugirte Sehne $\overline{bc}$ (die also von A halbirt wird), so ist die durch a zu bc gezogene Parallele B Tangente der Curve im Punkt a, so dass in a zwei Punkte a, d der Parabel zusammenfallen; da nun ausserdem noch der unendlich ferne Punkt (in A) gegeben ist, so kann man mit Hilfe des Pascal'schen Satzes den Punkt d in der zu A senkrechten Geraden bd finden. Halbirt man nun $\overline{bd}$ durch die dazu Senkrechte C, so ist C die Axe der Curve. Da nun ausserdem noch die Tangente B nebst deren Berührungspunkt bekannt sind, so kann man (nach 202) den Scheitel h, den Brennpunkt k und dadurch die Direktrix erhalten.

213. Es sei eine feste Linie A in einer Fläche gegeben, und eine Linie B in derselben Fläche bewege sich so, dass sie stets in der Fläche bleibt, die Linie A immer berührt, und sich an dieser abwickelt, d. h. sich so bewegt, dass, wenn die Punkte a, b der Linie A bei ihrer Bewegung mit den Punkten c, d der Linie B zusammenkommen, der Bogen $\widehat{ab}$ gleich dem Bogen $\widehat{cd}$ ist. In diesem Falle nennt man jede Curve, die von einem, mit der Linie B fest verbundenen Punkte beschrieben wird, eine Cycloide oder cyclische Curve, die Linie A ihre Leitlinie, B ihre Erzeugende. Ist die Fläche, in welcher die Curven A und B liegen, eine Kugel, so nennt man die Cycloide sphärisch. Für die Anwendung sind nur die ebenen Cycloiden wichtig und noch dazu blos diejenigen, für welche die Linien A, B entweder gerad- oder kreislinig sind.

Es können daher folgende Fälle vorkommen, (in welchen die Curven die beigefügten Namen haben):

1) Die Leitende ist ein Kreis und die Erzeugende eine Gerade: Kreisevolvente;
2) die Leitende gerade, die Erzeugende ein Kreis: gemeine Cycloide;

oder es sind beide Linien (die Leitende, so wie die Erzeugende) Kreise, welche entweder sich aussen berühren, so dass die Centrale (Entfernung ihrer Mittelpunkte) die Summe der Halbmesser ist, oder innen, so dass die Centrale die Differenz der Halbmesser ist, und die eine Kreisfläche in der anderen liegt; in diesem Falle ist noch zu unterscheiden, ob der innere (kleinere) Kreis oder der äussere die Erzeugende ist. Demnach sind noch folgende Fälle zu unterscheiden:

3) Die beiden Linien sind Kreise und berühren sich aussen: Epicycloide;
4) die beiden Linien sind Kreise, berühren sich innen und der innere (kleinere) Kreis ist die Erzeugende: Hypocycloide;
5) die beiden Linien sind Kreise, berühren sich innen und der äussere (grössere) Kreis ist Erzeugende: Pericycloide.

Wenn in einem dieser vier Fälle oder überhaupt an einer ebenen Cycloide der erzeugende Punkt nicht in der erzeugenden Linie liegt, so fügt man dem Namen der Curve noch das Eigenschaftswort „verkürzt" oder „verlängert" bei, je nachdem der erzeugende Punkt in dem von der Erzeugenden beschriebenen Flächenraume bleibt oder nicht. Ist es unentschieden, ob die Cycloide oder Evolvente verlängert oder verkürzt ist, so wollen wir sie verändert nennen, und demnach unter einer unveränderten Cycloide eine solche verstehen, die weder verlängert noch verkürzt ist, bei welcher also der erzeugende Punkt in der Erzeugenden liegt.

Ehe wir uns näher mit den eben angeführten fünf, in der Anwendung vorkommenden cycloidischen, Curven beschäftigen, wollen wir zunächst einige allgemeine Betrachtungen der cycloidischen Curven vornehmen.

Fig. 96. 214. Es sei A die Leitende, B die im Punkte o sie berührende Erzeugende einer beliebigen ebenen Cycloide und p

ihr erzeugender Punkt, welcher in oder ausser B liegen kann. Ferner seien die gleichlangen Bögen $\widehat{ac}$ und $\widehat{bc}$ unendlich klein, so dass sie als gerade betrachtet werden können. Dreht man nun die Linie B um c, bis b auf a fällt, so beschreibt während dieser Zeit p den Bogen pe der Cycloide. Dieser Bogen ist aber zugleich ein aus dem Mittelpunkte c beschriebener Kreisbogen, folglich ist die Normale der Cycloide in dem Punkte p die Gerade pc. Hieraus geht der Satz hervor:

Die Normale einer Cycloide in einem Punkte p ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Punkte c, in welchem die Leitlinie von der dem Punkte p entsprechenden Erzeugenden berührt wird.

215. Ist die Leitende einer Cycloide C eine beliebige Curve A, die Erzeugende aber eine Gerade B, so nennt man die cyclische Curve C eine Evolvente der Curve A. Liegt hierbei der erzeugende Punkt p auf der Erzeugenden B, welche A in a berührt, so findet man einen besonderen Punkt q der Evolvente, wenn man $\widehat{aq} = \overline{ap}$ macht. Will man einen beliebig anderen Punkt r der gesuchten Curve, so zieht man in einem beliebigen Punkte b von A eine Tangente br an A und macht $\overline{br} = \widehat{bq}$; die Normale von C in r ist die Gerade br (s. vorige Nr.), welche zugleich Tangente an A ist. Die Linien A und C liegen daher gegen einander so, dass (wie schon in Nr. 172 gesagt wurde), C die Evolvente von A, aber auch A die Evolute von C genannt wird*). — Wie wir früher (172) gesehen, wird der Krümmungshalbmesser in einem Punkte r von C gefunden, wenn man von r an A eine Tangente zieht, die A in b berührt, und $\overline{rb}$ misst. Demnach ist in q der Krümmungshalbmesser von C = o, also die Krümmung in diesem Punkte unendlich gross. Ist aber die einem Punkte der C entsprechende Fig. 97.

---

*) Denkt man sich eine dünne ebene Scheibe, die von A begrenzt wird, und um A einen sehr feinen Faden gespannt, der in a fest mit A verbunden ist, so beschreibt der Punkt q des Fadens, wenn dieser von A abgewickelt und stets gespannt erhalten bleibt, die Evolvente. Daher die Namen Evolute, Evolvente (von *evolvere*, abwickeln).

Tangente an A eine Asymptote, so ist der Krümmungshalbmesser von C in diesem Punkte = ∞ oder die Krümmung ist = o. In diesem Falle nennt man den Punkt einen Flachpunkt, Inflexionspunkt. Man sieht also, dass die Krümmungen einer Curve von o bis ∞ wachsen können.

Nimmt man auf B einen anderen Punkt, z. B. p′ an, so entspricht dem eine andere Evolvente (C′), q′ dem q, r′ dem r u. s. w. Da aber offenbar $\overline{rr'} = \overline{pp'} = \widehat{q'q}$ ist, so haben die Curven C, C′ überall gleichen Abstand, sie sind also parallel.

Nimmt man a als erzeugenden Punkt, so wird man leicht erkennen, dass die entsprechende Evolvente C″ in a einen Grat (s. 162) hat, wenn man B einmal nach rechts und einmal nach links wälzt; ebenso ist aber auch q ein Grat von C und q′ einer von C′. Man sieht also

1) Einer Curve A entsprechen (als Evolute) unendlich viele Evolventen, die alle parallel zu einander sind.

2) Zieht man zu einer Curve C eine parallele C″, so hat diese in dem Punkte, wo sie auf die Evolute von C trifft, einen Grat.

Fig. 98. 216. Aus den letzten Betrachtungen können wir uns über die Existenz verschiedener besonderer Punkte und die Arten derselben klar werden, wir meinen zunächst die Punkte, in welchen die Krümmung = o ist und die man Inflexionspunkte (Flachpunkte) nennt; die, in welchen der Krümmungshalbmesser = o ist, und die wir Nullpunkte nennen wollen; die, welche wir (s. 162) Wellenpunkt (oder Wendepunkt) und Grat (Rückkehrpunkt) erster zweiter und dritter Art genannt haben.

In vorhergehender Nr. haben wir uns von der Existenz von Inflexionspunkten und Nullpunkten überzeugt, aber zunächst nur einen Nullpunkt kennen gelernt, der zugleich ein Grat erster Art ist. Wollen wir nun durch Abwickeln von Curven die weiteren vorkommenden Fälle von besonderen Punkten untersuchen.

Die Inflexionspunkte können (s. 215) entstehen, wenn wir auf einer asymptotischen Curve die Asymptote aufwickeln, und einen Punkt von dieser als erzeugenden Punkt ansehen. Liegt nun die Asymptote so, wie bei der Hyperbel, so wird man

sich leicht überzeugen, dass hier der erhaltene Inflexionspunkt zugleich ein Wendepunkt (s. 162) ist. Hat man aber die Curven A, deren Gleichung in Bezug auf rechtwinkelige Axen X, Y (Fig. a) ist: $y^2 = \frac{1}{x}$, so wird man finden, dass sie zwei Asymptoten anderer Art hat, nemlich die X-Axe und die Y-Axe. Nimmt man hier auf X einen Punkt a an, und wickelt X rechts und links auf die Curve A, so sieht man, dass die entstehende Evolvente in a einen Inflexionspunkt hat, der kein Wendepunkt ist und überhaupt nichts Besonderes weiter an sich trägt (wir wollen ihn einen Plattpunkt nennen). Wickelt man aber Y auf die Curve, so wird man sich leicht überzeugen, dass hier ein Punkt b von Y einen Flachpunkt giebt, der zugleich ein Grat erster Art ist. Es giebt aber auch eine Curve, deren Asymptote X [Fig b)] so liegt, dass ein Punkt a der Letzteren eine Evolvente giebt, die in a einen Inflexionspunkt hat, der zugleich ein Grat zweiter Art ist. Endlich kann die Curve A, z. B. mit der Gleichung $y = \log x$, (Fig. c) eine Asymptote Y haben, der sich blos ein Zweig der Curve nähert; dann giebt ein Punkt a der Asymptote ein Evolvente, die in a einen Flachpunkt hat, an welchem die Curve aufhört, (einen Grat dritter Art).

Hat eine Curve A (Fig. d) einen Wendepunkt a und wickelt man die Tangente B (in a) auf A, so beschreibt der Punkt a eine Curve C, die wieder in a einen Wendepunkt hat, aber es ist der Krümmungshalbmesser in a = o. Beschreibt aber ein anderer Punkt der Tangente B, z. B. der Punkt b die Evolvente, so hat dieselbe in b einen Grat zweiter Art, in welchem der Krümmungshalbmesser die endliche Länge ba hat.

Hat man einen Grat a erster Art und eine Tangente B der Curve im Punkte a, die man auf A (nach rechts und links) aufwickelt, so beschreibt der Punkt b (von B) eine Evolvente ecdf, die in c und d einen Grat hat (während die Bögen ce und df, möglicher Weise sich scheiden (s. 166 Anm.) oder berühren, also einen Doppelpunkt erster oder zweiter Art (s. 161) geben); dagegen erzeugt der Punkt a selbst eine Evolvente C, die in a einen Nullpunkt (Punkt mit Krümmungshalbmesser = o) hat, der weder ein Grat noch ein Wellenpunkt ist. Hat die

Curve A (Fig. f) einen Grat a zweiter (oder dritter) Ordnung und man wickelt die Tangente (B) der Curve im Punkt a auf die Curve auf, so beschreibt augenscheinlich irgend ein Punkt b der Tangente B eine Curve die in dem Punkte einen Grat zweiter (oder dritter) Ordnung hat, in welchem der Krümmungshalbmesser eine endliche Länge $\overline{ab}$ hat, während der Punkt a selbst eine Curve mit Grat a zweiter (oder dritter) Ordnung beschreibt, dessen Krümmungshalbmesser = o ist.

Fassen wir das eben Gesagte zusammen, so sehen wir:

1) Es giebt folgende verschiedene Inflexions- oder Flachpunkte (Punkte, in welchen die Krümmung = o ist):

a) Plattpunkt, b) Wende- oder Wellenpunkt, c), d), e) Grat (Rückkehrpunkt) erster, zweiter, dritter Ordnung;

2) folgende verschiedene Nullpunkte (Punkte mit Krümmungshalbmesser = o):

a), b), c), Grat erster, zweiter, dritter, d) allgemeiner Nullpunkt (Punkt a von C in Fig. g);

3) folgende Wendepunkte (Wellenpunkte):

a) mit Krümmung = o, b) mit Krümmungshalbmesser = o;

4) folgende Rückkehrpunkte (Grat): a), b), c) erster, zweiter, dritter Art mit Krümmungshalbmesser = o, d), e), f), desgleichen mit Krümmung = o, g), h) Grat zweiter und dritter Art mit endlichem Krümmungshalbmesser.

Anm. Ausser den ebengenannten Punkten besonderer Art giebt es noch folgende:

1) den isolirten Punkt; wenn sämmtliche Punkte, die dem Bildungsgesetz einer Curve entsprechen, einer Curve A und einem einzelnen Punkt a, der nicht in a liegt, entsprechen, [so führt die Coordinatengleichung $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - r^2x^2 - r^2y^2 = o$ oder was dasselbe ist $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - r^2) = o$, welche Gleichung zerfällt in die zwei: a) $x^2 + x^2 = o$ und b) $x + y = r^2$, in a) auf einen Punkt (den Anfangspunkt) und b) einen Kreis mit dem Halbmesser r];

2) den asymptotischen Punkt, dem eine Curve sich immer mehr nähert, ohne ihn je zu erreichen; z. B. in der Polarcoordinaten-Gleichung [146. 3)] $u = \frac{1}{\varphi}$, wird, wenn φ zunimmt

u kleiner und erst für $\varphi = \infty$ wird $u = o$. Es ist also der Pol ein asymptotischer Punkt.

217. Aufg. Eine gemeine Cycloide zu zeichnen, deren Leitlinie A, deren Erzeugende B und deren erzeugender Punkt der Punkt sei, in welchem sich A und B berühren. Fig. 99.

Aufl. Hat man die Erzeugende B so weit fortbewegt, dass ihr Punkt a wieder in einen Punkt b der Linie A fällt, so muss $\overline{ab}$ gleich dem Umfange von B sein. Macht man daher $\overline{ab}$ gleich $3\frac{1}{7}$ mal dem Durchmesser von B, so ist b ein Punkt der Cycloide. Macht man $\overline{ac}$ gleich einem bestimmten Theile von $\overline{ab}$, z. B. $\frac{\overline{ab}}{6}$, und $\widehat{ad}$ dem ebensovielten Theile des Umfanges von B, so ist $\widehat{ad}$ gleich $\overline{ac}$, und es kommt daher beim Fortbewegen der Erzeugenden d mit c zusammen. Macht man nun $ce \perp A$ und $\overline{ce}$ gleich dem Halbmesser von B, und beschreibt aus e mit $\overline{ec}$ eine Kreislinie C, so ist diese die Stellung der Erzeugenden, in welcher d auf A fällt. Sucht man nun die entsprechende Lage des erzeugenden Punktes, so wird man finden, dass dieser Punkt g mit dem Punkt d gegen die in der Mitte von $\overline{ac}$ zu A gedachte Senkrechte symmetrisch liegt. Es liegt daher in unserm Falle g links von ce und ist $\widehat{ge} = \widehat{ad}$.

Zieht man die Gerade gc, so ist diese (nach 214) die Normale der Cycloide für den Punkt g.

Anm. Aus der Konstruktion der gemeinen Cycloide gehen noch folgende Eigenschaften dieser Curve hervor: Nimmt man h in der Mitte von $\overline{ab}$ an und macht $\overline{hk}$ gleich dem Durchmesser von B und senkrecht zu A, so ist k ein Punkt der Cycloide, der zwischen a und b am weitesten von A entfernt ist, und theilt hk das zwischen a und b enthaltene Stück der Cycloide symmetrisch. Bewegt man B von b aus vorwärts oder von a aus rückwärts so weit fort, dass der ganze Umfang von B sich auf A abgewickelt hat, so erhält man ein dem Cycloidenstücke ab kongruentes Curvenstück; dieses wiederholt sich also von b vorwärts und von a aus rückwärts unendliche Male, und die gemeine Cycloide ist daher eine offene Curve. Da im $\mathfrak{P}$ (a) die Normale der Cycloide mit A zusammenfällt, so sieht man,

dass der 𝔓 (a) (so wie jeder Curvenpunkt, der in A liegt), ein Grat der Cycloide ist.

218. Alles, was in den beiden vorhergehenden Nummern über die gemeinen Cycloiden gesagt wurde, gilt auch für die Epi-, Hypo- und Pericycloide, wenn man nicht vergisst, dass in diesem Falle, wo die Linie A eine Kreislinie ist, eine Senkrechte zu A nichts anderes ist, als ein Radius von A. Nur eines ist abzuändern, nemlich die Art, wie man $\overline{ab}$ dem Umfange von B gleich gemacht hat. Wenn nemlich A kreislinig ist, und es soll der Bogen $\widehat{ab}$ der Kreislinie A gleich dem Umfange der Kreislinie B gemacht, oder es soll überhaupt ein Bogen des Kreises B gleich einem des Kreises A gemacht werden, so ist bekanntlich, wenn α und β die Halbmesser der Kreise A und B, und m^0, n^0 die Anzahl Grade ihrer gleichen Bögen sind, $\alpha : \beta = n^0 : m^0$, wodurch man im Stande ist, n aus m zu finden, wenn das Verhältniss der Halbmesser α und β bekannt ist. Wir wollen deshalb die Konstruktionen der Epi-, Hypo- und Pericycloide dem Schüler überlassen, und nur noch folgende Bemerkung machen.

Ist R der Halbmesser des leitenden und r des erzeugenden Kreises einer Epicycloide, so wird man leicht einsehen, dass diese Curve übergeht

1) in eine gemeine Cycloide für $R = \infty$;
2) in eine Evolvente für $r = \infty$;
3) in eine Hypocycloide, wenn r negativ genommen wird und zugleich $r < R$ ist;
4) in eine Pericycloide, wenn wieder r negativ und zugleich $r > R$ ist.

Fig. 100. 219. Ist bei der Hypocycloide der Halbmesser des Erzeugungskreises B halb so gross, als der des Leitkreises A, so ist die Hypocycloide ein Durchmesser des Leitkreises. Denn ist a der Berührungspunkt von A und B, und betrachtet man ihn als erzeugenden Punkt, so findet man eine folgende Lage d des erzeugenden Punktes, wenn man auf den Kreislinien A, B die Punkte c, b so annimmt, dass $\widehat{ac} = \widehat{ba}$ ist, eine Kreislinie C = B zeichnet, die A in c berührt, und auf C den Punkt d so annimmt, dass d und b gegen die senkrechte Halbirungslinie von $\widehat{ac}$ symmetrisch sind. Liegen daher

c und b in dem Radius cg, so müssen auch a und d in dem Radius ag liegen. Dass aber b in der Geraden cg liegt, lässt sich auf folgendem Wege leicht sehen. Es ist nemlich nur unter der Voraussetzung, dass b in der Geraden cg sich befindet, $\wedge$ cga = $\wedge$ bga. Dann hat aber $\overset{\frown}{ba}$ (als Bogen des Peripheriewinkels bga) halb so viel Grade als $\overset{\frown}{ca}$ (der dem Centriwinkel cga angehört). Da aber noch der Halbmesser des $\overset{\frown}{ba}$ gleich dem halben Halbmesser des $\overset{\frown}{ac}$ ist, so sieht man, dass, unserem Verlangen nach, $\overset{\frown}{ac} = \overset{\frown}{ab}$ wird.

Anm. Hätte die Kreislinie B einen Halbmesser, der kleiner ist, als der halbe Halbmesser von A, so würde der erzeugende Punkt a die A nicht in f treffen, sondern, wenn B bei seiner Bewegung rechts von af bleibt, in einem Punkte h, der rechts von af liegt, und die Hypocycloide $\overset{\frown}{ah}$ läge auch rechts von af, während unter denselben Umständen die Curve ak links von af sich befände, wenn der Halbmesser von B grösser wäre, als $\overline{ag}$. Wir wollen noch bemerken, ohne hier den Beweis darüber zu geben, dass, wenn der Durchmesser des Kreises B mit d oder d' und der Halbmesser von A mit r bezeichnet wird, dieselbe Hypocycloide erhalten wird, ob $d = r + a$ oder $d' = r - a$ ist, wo a irgend eine Länge bedeutet (s. 222 Anm.) Es gilt dies also auch, wenn $a > r$ oder $a = r + b$ (wo b wieder jede Länge bedeuten kann) ist, wobei der Kreis mit dem Durchmesser $d = r + a = 2r + b$ eine Pericycloide, der mit $d' = r - a = b$ ausserhalb A liegt und eine Epicycloide beschreibt. Man kann daher statt jeder Pericycloide mit dem Durchmesser $2r + b$ eine Epicycloide mit dem Durchmesser b beschreiben.

220. Die Konstruktion einer Kreisevolvente stimmt dem Fig. 97.
Wesen nach mit der einer Evolvente überhaupt (s. 215) überein. Nur auf etwas haben wir hier aufmerksam zu machen.

Um einen Punkt r der Evolvente C zu finden, müssen wir $\overline{br} = \overset{\frown}{bq}$ machen, d. h. den Bogen $\overset{\frown}{bq}$ gerade machen (rektifiziren). Dies lässt sich im Allgemeinen nur dadurch ausführen, dass man $\overset{\frown}{bq}$ in kleine, als gerade betrachteto Theile theilt, und diese an einander gereiht, von b anfangend, auf $\overline{br}$ aufträgt. Soll dies Verfahren richtig werden, so müssen die Theile sehr

klein (also ihre Anzahl sehr gross) genommen werden, damit sie ohne Bedenken als gerade angesehen werden können; dann wiederholt sich der kleine Fehler, den man bei jedem Theilchen macht, so oft, dass doch ein grosser Gesammtfehler erscheint. Es wird also ein genaues Resultat im Allgemeinen nicht erzielt werden können.

Ist aber die Leitlinie der Evolvente im Kreis, so kann und wird man den Punkt b so wählen, dass $\widehat{bq}$ ein einfacher Theil ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ etc. etc.) des Kreisumfangs ist, und dann mit Hilfe der Ludolphine (für welche man wieder $3\frac{1}{7}$ nehmen darf) die Länge des Bogens $\widehat{bq}$, ähnlich wie oben bei der gemeinen Cycloide finden.

221. Will man eine Epicycloide aus Kreisbögen zusammensetzen, die hinreichend genau mit der Curve selbst zusammenfallen, so muss man die beiden gegebenen Kreise (den erzeugenden mit dem Halbmesser r_1 und den leitenden mit dem Halbmesser r_2) in gleiche Theile theilen, die hinreichend klein sind, nemlich so klein, dass die der Eintheilung entsprechenden Punkte der Epicycloide so nahe liegen, dass die beiden Normalen dieser Curve, welche zwei aufeinanderfolgenden konstruirten Punkten a, b derselben entsprechen, sich in einem Punkte c schneiden, für welchen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ fast gleich sind, oder für welche $\overline{ac} - \overline{bc} = \delta$ ist, wo δ eine sehr kleine Länge (für feine Zeichnungen etwa gleich $\frac{1}{10}$ Millimeter, wie oben bei den Curven zweiter Ordnung) bedeutet. Ohne hier den Beweis dafür zu liefern, wollen wir nur bemerken, dass man diese Bedingung erreicht, wenn man die Anzahl Theile (n_1) des erzeugenden Kreises und die n_2 des Leitkreises folgendermassen wählt:

$$n_1^3 = \frac{8\pi^3}{24\delta} \cdot \frac{(r_2 + r_1)(r_2 + 2r_1)\,r_1}{r_2^2}$$

$$n_2^3 = \frac{8\pi^3}{24\delta} \cdot \frac{(r_2 + r_1)(r_2 + 2r_1)\,r_2}{r_1^2};$$

in diesen Ausdrücken bedeutet π die ludolph'sche Zahl, und ist demnach π^3 ziemlich nahe gleich 30, folglich kann, wenn man die Längen in Millimetern ausdrückt und $\delta = \frac{1}{10}$ setzt, für $\frac{8\pi^3}{24\,\delta}$ die Zahl 100 genommen werden. Setzt man noch $r_2 = U r_1$, so hat man

$n_2^3 = 100\,(U + 1)\,(U + 2)\,r_2$ für die Epicycloide, also

$n_2^3 = 100\,(U - 1)\,(U - 2)\,r_2$ für die Hypo- und Pericycloide [für welche r_1 in $- r_1$ übergeht] *),

$n_1^3 = 100\,r_1$ für die gemeine Cycloide (für welche $r_2 = \infty$ ist) und

$n_2^3 = 100 \,.\, 2 r_2$ für die Kreisevolvente (für welche $r_1 = \infty$ ist).

Anm. Ohne Beweis wollen wir noch hier die Thatsachen für die Cycloiden anreihen, dass die Evolute einer Epicycloide A eine Epicycloide A' ist, die man leicht konstruiren kann, wenn man die Halbmesser ihres erzeugenden und leitenden Kreises kennt. Nennt man ersteren r_1', letzteren r_2', so ist:

$$r_1' = \frac{r_2\, r_1}{r_2 + 2 r_1} \text{ und } r_2' : r_1' = r_2 : r_1 = U : 1.$$

Hiedurch lässt sich leicht für eine Epicycloide A der Krümmungshalbmesser in irgend einem Punkte derselben konstruiren, sowie die Länge eines Bogens einer Epicycloide zwischen zwei konstruirten Punkten derselben angeben — Aufgaben, die wir dem Schüler überlassen wollen. Diese Aufgaben lassen sich aber auch auf die 1) Hypo- und 2) Pericycloide, so wie auf die 3) gemeine Cycloide und 4) Kreisevolvente ausdehnen, wenn man wie oben:

ad 1) und 2) $- r_1$ statt $+ r_1$.
ad 3) $r_2 = \infty$ und
ad 4) $r_1 = \infty$ setzt.

Nur die Länge eines Kreisevolventenbogens lässt sich daraus nicht ableiten. Darum wollen wir noch bemerken, dass die Länge einer Evolvente vom Grat (Rückkehrpunkt) bis zu einem Punkte a derselben $= \frac{s^2}{2r}$ ist, in welchem Ausdrucke s die Länge der von a aus an den Evolventenkreis (mit dem Halbmesser r) gezogenen Tangente zwischen a und dem Berührungspunkte derselben bedeutet.

222. Aufg. Eine verlängerte (oder verkürzte) Epicycloide zu konstruiren. Fig. 101.

*) Wird hiebei n_2^3 negativ, so ändert man das Zeichen in ein positives um.

Aufl. I. Es sei A der leitende, B der erzeugende Kreis, der erzeugende Punkt liege aber nicht auf A (in a), sondern in der Verlängerung des Halbmessers ca, nemlich in b. Man kann nun die Konstruktion einfach in der Art ausführen, dass man die vom Punkt a beschriebene (unveränderte) Epicycloide nach den früher angegebenen Anleitungen) konstruirt, jeden so konstruirten Punkt mit dem Centrum des entsprechenden Erzeugungskreises verbindet, und diesen Halbmesser um $\overline{ab}$ verlängert. Ist z. B. B′ eine Lage des Erzeugungskreises, a′ der entsprechende Punkt der unveränderten Epicycloide, und zieht man $\overline{c'a'}$ und macht $\overline{a'b'} = \overline{ab}$, so ist b′ ein Punkt der gesuchten verlängerten Epicycloide. Dabei ist die Gerade b′d′ die Normale im Punkte b′.

Aufl. II. Man kann aber auch die verlangte Curve finden, indem man, statt der Kreise A und B, die C und D (C vom Centrum c beschrieben und zu A konzentrisch, D durch den erzeugenden Punkt b zu B konzentrisch) beschreibt. Bei einer ganzen Umdrehung von B macht auch D eine solche, und beschreibt c auf C einen Bogen $s = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot 2\pi r_1$. Theilt man nun diesen Bogen von c aus und die Kreislinie D von b aus in gleichviele gleiche Theile, so ist es leicht, die Punkte der verlangten Curve zu finden. Ist z. B. $\widehat{cc'} = \frac{s}{6}$, D′ der aus c′ mit dem Halbmesser $\overline{cb} = \beta$ beschriebene Kreis, so darf man nur $eb = \frac{2\pi\beta}{6}$ machen und augenscheinlich von e aus links auftragen, um einen Punkt b′ der verlangten Curve zu erhalten, während die Normale für diesen Punkt durch d′ geht. In derselben Weise kann man natürlich für die übrigen Theilpunkte die entsprechenden Curvenpunkte und Normale suchen.

Man sieht aus der eben angegebenen Konstruktion, dass man zur Aufsuchung der Punkte der Curve, die Kreise A, B mit den Halbmessern r_2, r_1 nicht braucht; es genügt die Halbmesser $\overline{ga} = \alpha$ und $\overline{bc} = \beta$ der Kreise C und D zu haben, und ausserdem den Weg s des Punktes c auf C während einer Umdrehung von D. Dieser Weg lässt sich auch dadurch bestimmen, dass man die Anzahl Grade (m^0) angiebt, die er auf

der Kreislinie C umfasst, also die Anzahl Grade, die c auf C beschreibt, während D sich ganz umdreht, oder jeder Punkt von D einen Bogen von 360° durchläuft. Nennt man, wie dies praktisch üblich, das Verhältniss $\frac{360}{m}$ die Uebersetzungszahl ($\mathfrak{U}$), so braucht man nur $\mathfrak{U}$ zu geben, um daraus m und s zu finden. Man wird aber noch bemerken, dass bei der Epicycloide der Punkt b auf D dieselbe Drehrichtung hat, wie c auf C, wogegen bei der Hypo- und Pericycloide diese Drehrichtungen entgegengesetzt sind.

Demnach braucht man zur Bestimmung einer Cycloide:

1) Den Halbmesser α des Kreises C, den das Centrum des erzeugenden Kreises D beschreibt;
2) den Halbmesser β des erzeugenden Kreises D;
3) die Uebersetzungszahl $\mathfrak{U}$;
4) das Verhältniss der beiden Drehrichtungen (von c auf C und b auf D), nemlich ob beide gleich oder entgegengesetzt sind.

Will man aber für jeden Curvenpunkt die Normale ziehen, so braucht man noch den Kreis A mit dem Halbmesser r_2. Da aber bei einer Umdrehung des Wälzungskreises B der auf A aufgewickelte Bogen $= 2\pi\, r_1$ ist und m^0 hat, also $= \frac{2\pi\, r_2}{360} \cdot m$ ist, so hat man $\frac{360}{m} = \frac{r_2}{r_1} = \mathfrak{U}$. Es ist aber auch $\alpha = r_2 + r_1$ bei der Epicycloide, d. i. bei gleichen Drehrichtungen (von c auf C und b auf D) $\alpha = r_2 - r_1$ bei der Hypocycloide (wo entgegengesetzte Drehrichtungen und $\mathfrak{U} > 1$) und $\alpha = r_1 - r_2$ bei der Pericycloide (wo ebenfalls entgegengesetzte Drehrichtungen und $\mathfrak{U} < 1$). Es ergiebt sich daher

$$r_2 = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}+1} \cdot \alpha$$ bei gleichen Drehrichtungen;

$$r_2 = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}-1} \cdot \alpha$$ bei entgegengesetzten Drehrichtungen und $\mathfrak{U} > 1$;

$$r_2 = \frac{1-\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}} \cdot \alpha$$ bei entgegengesetzten Drehrichtungen und $\mathfrak{U} < 1$.

Anm. Man kann sich leicht mit Hilfe der entsprechenden Figur überzeugen, dass, wenn man den Mittelpunkt des Kreises C als Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems und die Verbindungslinie dieses Mittelpunktes mit einem Punkt der Epicycloide, der von dem genannten Mittelpunkt am Weitesten entfernt ist, als X-Axe (und zwar so, dass das x dieses Punkts positiv ist) ansieht, für irgend einen Punkt der Curve

$$\text{A)} \ldots\ldots \begin{cases} x = \alpha \cos \varphi + \beta \cos (1 \pm \mathfrak{U})\varphi \text{ und} \\ y = \alpha \sin \varphi + \beta \sin (1 \pm \mathfrak{U})\varphi \text{ ist,} \end{cases}$$

worin φ die dem Curvenpunkte entsprechende Anzahl Grade des Bogens bedeutet, den der Mittelpunkt c beschrieben hat, und $1 + \mathfrak{U}$ oder $1 - \mathfrak{U}$ genommen wird, je nachdem gleiche oder entgegengesetzte Drehrichtungen vorhanden sind.

Ist nun für dasselbe Coordinatensystem eine andere Cycloide gegeben, für welche x_1, y_1, α_1, β_1, $\mathfrak{U}_1$ dieselben Bedeutungen haben, wie oben x, y, α, β, U, so hat man

$$x_1 = \alpha_1 \cos \varphi_1 + \beta_1 \cos (1 \pm \mathfrak{U}_1)\varphi_1 \text{ und}$$
$$y_1 = \alpha_1 \sin \varphi_1 + \beta_1 \sin (1 \pm \mathfrak{U}_1)\varphi_1.$$

Setzt man nun $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \alpha$, $\varphi_1 = (1 \pm \mathfrak{U})\varphi$ und $(1 \pm \mathfrak{U}_1)\varphi_1 = \varphi$, so wird offenbar $x_1 = x$ und $y_1 = y$, und ist daher die zweite Curve identisch mit der ersten. Dann ist aber $1 \pm \mathfrak{U}_1 = \frac{1}{1 \pm \mathfrak{U}}$ und ist daher, weil $\mathfrak{U}_1$ (wie $\mathfrak{U}$) nur als positive Zahl einen Sinn hat, für $1 + \mathfrak{U}$ zu nehmen $1 - \mathfrak{U}_1$ und daher $\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{U}}{1 + \mathfrak{U}}$ also $\mathfrak{U}_1 < 1$ und für $1 - \mathfrak{U}$ zu setzen:

1) $1 + \mathfrak{U}_1$ und demnach $\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{U}}{1 - \mathfrak{U}_1}$, wenn $\mathfrak{U} < 1$; dagegen

2) $1 - \mathfrak{U}_1$ und daher $\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U} - 1}$ wenn $\mathfrak{U} > 1$.

Man sieht daher, dass jede Epicycloide mit den Elementen α, β, $\mathfrak{U}_1$ identisch ist mit einer Pericycloide mit den Elementen α_1, β_1, $\mathfrak{U}_1$ und umgekehrt, wenn man $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \alpha$ und $\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{U}}{1 + \mathfrak{U}}$ setzt; ferner jede Hypocycloide mit den Elementen

α, β, $\mathfrak{U}$ einer Hypocycloide mit den Elementen α_1, β_1, $\mathfrak{U}_1$, wenn $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \alpha$ und $\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U} - 1}$.

Aus den obigen Gleichungen A) geht aber auch hervor, dass für die Hypocycloide bei $\mathfrak{U} = 2$ erhalten wird:

$$x = \alpha \cos \varphi + \beta \cos \varphi,$$
$$y = \alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi \text{ oder}$$
$$\frac{x}{\alpha + \beta} = \cos \varphi, \ \frac{y}{\alpha - \beta} = \sin \varphi, \text{ also}$$
$$\frac{x^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{y^2}{(\alpha - \beta)^2} = 1.$$

Eine solche Hypocycloide, für welche $\mathfrak{U} = 2$ (oder da, wie oben gezeigt, $\frac{r_2}{r_1} = \mathfrak{U}$ ist, $r_2 = 2r_1$) ist demnach eine **Ellipse** mit der grossen Halbaxe $\alpha + \beta$ und der kleinen Halbaxe $\alpha - \beta$.

Ist aber für die Hypocycloide $\mathfrak{U} = 1$, so erhält man

$x = \alpha \cos \varphi + \beta$ und $y = \alpha \sin \varphi$, und daraus

$(x - \beta)^2 + y^2 = \alpha^2$, also einen Kreis mit dem Halbmesser α, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $x = \beta$ und $y = o$ hat.

223. Soll eine verlängerte oder verkürzte gemeine Cycloide konstruirt werden, so kann man ähnlich wie bei der Epicycloide auf zwei Arten verfahren. Die erste Art ist der oben angegebenen ersten Art der Konstruktion von veränderten Epicycloiden so ähnlich, dass wir nichts weiter darüber sagen brauchen. Wenden wir aber die zweite Konstruktionsart an, indem wir wieder die aufeinander wälzenden Linien A, B (A ist in unserem Falle eine Gerade) weglassen, und dafür die Linien C und D benützen (C ist hier eine Gerade), so müssen wir geben die Gerade C, auf welcher das Centrum c des erzeugenden Kreises D mit dem Halbmesser β sich bewegt, und den Weg s (die Ganglänge) den c auf C beschreibt, während der erzeugende Punkt b auf D einen Umlauf, also den Weg $2\pi\beta$, macht; ferner noch die Drehrichtung des Punktes b auf D*). Will man aber wieder

*) Es ist aber leicht einzusehen, dass die für beide Drehrichtungen erhaltenen Curven kongruent sind.

für die einzelnen Curvenpunkte die Normalen zeichnen, so braucht man noch die Linie A, welche von C um r_1 (nach der Bezeichnung der vorigen Nr.) entfernt ist. Man kann sich aber leicht überzeugen, dass $2\pi r_1 = h$, also $r_1 = \frac{h}{2\pi}$ ist.

Nimmt man wieder ein rechtwinkeliges Coordinatensystem in ähnlicher Weise, wie bei der Epicycloide an, so erhält man

$$x = \beta \cos \varphi$$

$$y = \frac{h\varphi}{2\pi} \pm \beta \sin \varphi \quad (+ \text{ oder } - \text{ je nach der Drehrichtung}).$$

Fig. 102. 224. Ist A [Fig. 102. a)] der Leitkreis einer Evolvente (wir wollen ihn Evolventenkreis nennen), B deren Erzeugende, und a der erzeugende Punkt, so erhält man bekanntlich einen Punkt a' der Evolvente, wenn man an A in einem Punkte d' eine Tangente B' zieht und $\overline{d'a'} = \widehat{d'a}$ macht. Man erhält offenbar auch die Punkte der Evolvente, wenn man den Kreis A in Verbindung mit B rechtsum (linksum) dreht, und zugleich den Punkt a auf B gleichförmig mit der Drehung nach links (rechts) so bewegen lässt, dass bei dem n^{ten} Theil der Umdrehung von A der Punkt eine Strecke gleich dem n^{ten} Theil des Umfangs von A zurücklegt; es beschreibt dann der bewegliche Punkt die (unveränderte) Evolvente.

Liegt der erzeugende Punkt nicht auf B, sondern in b, so dass wir eine veränderte (hier eine verlängerte) Evolvente erhalten, so erhält man einen Punkt b' der Evolvente, wenn man den Punkt a' der unveränderten Evolvente benützen, und $a'b' \perp B'$ und $\overline{a'b'} = \overline{ab}$ macht. Wir können aber auch b' und jeden Punkt unserer verlängerten Evolvente erhalten, wenn wir die beiden aufeinander rollenden Linien A, B weglassen, und dafür die damit parallelen Linien C, D (welche beide durch den erzeugenden Punkt b gehen) benützen.

In diesem Falle werden wir wieder, wie vorhin, C in Verbindung mit D nach rechts (oder links) drehen, und zugleich b auf D nach links (oder rechts) bewegen lassen, so dass beide Bewegungen unter sich gleichförmig sind. Der Weg aber, den b auf D bei einer Tour von C zu beschreiben hat, ist gleich dem Umfang von A, also hier grösser, als der Umfang von C.

Hat man denselben erzeugenden Punkt b und denselben Evolventenkreis A, auf welchem aber die (dem B parallele) Gerade B′ sich abwickelt, so erhält man die so erzeugte Evolvente, wenn man wieder C in Verbindung mit D um g dreht, und zugleich b auf D, aber nun in gleicher Richtung mit Drehung von C, so bewegt; wie vorhin angegeben worden ist. Man sieht hieraus:

1) Wenn man eine Kreislinie C in Verbindung mit einer Tangente D derselben in ihrer Ebene um ihr Centrum g (nach rechts oder links) dreht, und zugleich einen Punkt b von D auf D (nach rechts oder links) gleichförmig mit der Drehung von C bewegen lässt, so beschreibt b eine (je nach Umständen unveränderte oder veränderte) Evolvente.
2) Die Evolvente ist nur dann eine unveränderte, wenn die beiden Bewegungen (die Drehung des Kreises und die Bewegung des Punktes auf der Geraden) ungleiche Richtungen haben, und zugleich der Weg des erzeugenden Punktes auf der Geraden bei einer Umdrehung des Kreises gleich dem Umfang dieses Kreises ist.

Ist daher C der Kreis, D die Gerade, auf welcher sich b während Drehung von C so bewegen soll, dass er bei einer halben Rechtsdrehung von C, den Weg $\overline{bm}$ beschreibt, so findet man die Punkte der erzeugten Curve auf folgende Art.

Man theilt (Fig. 102. b) $\overline{bm}$ und die Hälfte von C von b aus in gleichviele gleiche Theile, die auf C und D von b aus in den gegebenen (durch die Pfeile angedeuteten) Bewegungsrichtungen gezählt werden. Sind nun p und q entsprechende Theilpunkte, so zieht man in p eine Tangente an C in der entsprechenden Richtung und trägt darauf $\overline{pq'} = \widehat{bq}$, und ist q′ ein Punkt der verlangten Evolvente. Will man aber die Normale der Curve für q′ finden, so muss man den Evolventenkreis ziehen, dessen Umfang gleich $2\,\overline{bm}$ ist, dessen Radius $\overline{go}$ also gleich $\frac{\overline{bm}}{\pi}$ (π die Ludolphine) ist; dann ist o oder o′ der dem Punkte q′ entsprechende Punkt des Evolventenkreises, je nachdem die beiden Bewegungsrichtungen (von b

auf D und der Drehung von C) **ungleich oder gleich sind.** In unserer Figur ist also, weil die Bewegungsrichtungen ungleich sind, o der entsprechende Punkt, und die Gerade oq′ die Normale für q′.

Anm. Ist der Halbmesser von C = o, geht also D durch g und dreht sich um g in der Ebene des Zeichnungsblattes gleichförmig in einer Richtung, während der erzeugende Punkt sich auf D gleichförmig fortbewegt, in welchem Falle man die erzeugte Curve eine Archimedische Spirale nennt, so fallen natürlich alle Theilpunkte von C in g zusammen, im Uebrigen läuft die Konstruktion der Curve und ihrer Normalen auf die vorhin beschriebene hinaus. Der Schüler wird gut thun, eine solche Spirale, nebst ihren Normalen, zu konstruiren.

Fig. 108. 225. Aufg. Eine Kreislinie A bewegt sich so, dass ihr Mittelpunkt a eine Gerade in angegebener Richtung beschreibt und ihre Ebene auf dieser Geraden senkrecht bleibt. Zu gleicher Zeit bewegt sich ein Punkt b auf A in einer gegebenen Richtung so, dass er den Umfang des Kreises A durchlaufen hat, wenn der Mittelpunkt a eine gegebene Länge α zurückgelegt hat, und dass die gleichzeitig von a und b durchlaufenen Längen immer in demselben Verhältnisse stehen. Man soll die von a beschriebene Curve zeichnen.

Aufl. Man nehme die $\mathfrak{T}_1$ parallel zur Ebene der Kreislinie A und die $\mathfrak{T}_2$ parallel zur Geraden ab an, so ist $\mathfrak{G}$ (a_1) die vom Mittelpunkt a durchlaufene Gerade. Ist noch $\overline{ac}$ die Länge α, und sind die Richtungen, in welchen sich a und b bewegen sollen, die durch die Pfeile angedeuteten, so wird, wenn man $\overline{bd} = \overline{ac}$ macht, d der Punkt der gesuchten Curve sein, auf welchen b fällt, wenn a nach c gelangt, und daher b die Peripherie von A durchlaufen hat. Hat a einen gewissen Theil von $\overline{ac}$, z. B. $\frac{1}{12}$ $\overline{ac}$ durchlaufen und ist daher der Kreis A in die Stellung B gekommen, so hat b den ebensovielten Theil des Umfanges von A (also hier ebenfalls $\frac{1}{12}$ dieses Umfangs) zurückgelegt und ist daher nach e gekommen ($\overline{b_1 e_1} = \frac{1}{12}$ Umfang von A vorausgesetzt); e ist daher ein Punkt der Curve. Nimmt man eben so andere Theile, z. B. $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ etc. von $\overline{ac}$ und dem Umfange A, so erhält man noch andere Punkte der Curve.

Man nennt diese Curve eine *Schraubenlinie*, die $\mathfrak{S}$ (a_1) ihre *Axe*, die Länge α ihre *Ganghöhe*, und den Bogen $\widehat{bd}$ der Curve, dessen Endpunkte um die Ganghöhe von einander entfernt sind, einen *Schraubengang*. Ferner nennt man die Schraubenlinie eine *rechte oder linke*, je nachdem einem Beobachter, der sich im ersten Riss eines im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punktes e der Curve senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ in ihrem + Raume aufstellt, und gegen die Axe hinsieht, derjenige Nachbarpunkt von e, welcher einen *grösseren ersten Abstand* hat als e, zur Rechten oder Linken erscheint.

226. *Aus der Konstruktion der Schraubenlinie* ist Fig. 108.
leicht zu ersehen, *dass der erste Abstand ihres erzeugenden Punktes in demselben Verhältnisse zunimmt, wie der Bogen, den sein erster Riss beschreibt, und dass, wenn dieser Bogen um 360° zugenommen, der erste Abstand um eine Ganghöhe sich vergrössert hat.* Dieses Gesetz giebt uns ein Mittel an die Hand, die Tangente der Schraubenlinie A für irgend einen $\mathfrak{P}$ (e) derselben zu finden.

Lassen wir zu dem Ende die $\mathfrak{K}_2$ durch e_2 gehen, so dass der $\mathfrak{P}$ (e) in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und denken uns den im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Nachbarpunkt von e mit f bezeichnet (wir haben diesen Punkt f in unserer Fig. nicht gezeichnet, weil er zu nahe an e kommt, wir setzen aber natürlich voraus, dass sein erster Riss mit f_1, sein zweiter Riss mit f_2 bezeichnet gedacht ist), so ist die $\mathfrak{S}$ (ef) unsere gesuchte Tangente, deren erster Riss die Kreislinie A_1 in e_1 berühren muss. Denken wir uns noch auf der Tangente (ef) einen im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkt g angenommen, so verhält sich $\widehat{e_1f_1}$ zu $\overline{f_1f}$, d. h. zum ersten Abstand des $\mathfrak{P}$ (f), wie der Umfang der Kreislinie A zur Ganghöhe. Da aber auch die Dreiecke e_1f_1f und e_1g_1g ähnlich sind, so verhält sich auch $\widehat{e_1f_1} : \overline{f_1f} = \overline{e_1g_1} : \overline{g_1g}$ und demnach $\overline{e_1g_1} : \overline{g_2g_2}$ wie der Umfang des Kreises A zur Ganghöhe. Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Tangente C für den Punkt e, wenn die $\mathfrak{K}_2$ so angenommen vorausgesetzt wird, dass e in der $\mathfrak{T}_1$ liegt:

Man legt die $\mathfrak{K}_2$ durch e_2 und zeichnet den ersten Riss der Tangente, nemlich C_1 (an A_1 in e_1 tangirend) und nimmt darauf g_1 beliebig an und zwar (wenn der Beobachter sich so, wie oben

(225) angegeben ist, aufgestellt hat) rechts oder links von e_1, je nachdem die Schraubenlinie eine rechte oder linke ist; dann liegt der Punkt g_2 oberhalb $\mathfrak{K}_2$ und findet sich die zweite Ordinate von g, nemlich g_2g_1 als ebensovielter Theil der Ganghöhe, wie e_1g_1 von dem Kreisumfang.

Aus dieser Konstruktion ergeben sich noch folgende Eigenschaften der Schraubenlinie: Sucht man den Winkel, den die Tangente C mit der $\mathfrak{T}_1$ bildet, so liegt er in einem rechtwinkeligen Dreiecke e_1g_1g, dessen Katheten g_1g und e_1g_1 sich verhalten, wie die Ganghöhe zum Umfange von A. Da nun aber für alle Punkte derselben Schraubenlinie dieses Verhältniss dasselbe wird, und der Winkel der Tangente C mit der Axe der Schraubenlinie den Winkel von C und $\mathfrak{T}_1$ zu 90° ergänzt, so folgt der Satz:

Alle Tangenten einer Schraubenlinie machen mit deren Axe gleiche Winkel.

Fig. 103. 227. Hat man wieder eine Schraubenlinie, deren Axe auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, und nimmt Parallelstralen von irgend einer Richtung, z. B. der Richtung D an, so wird ein beliebiger Erzeugungskreis B der Schraubenlinie, wenn man die $\mathfrak{T}_1$ als $\mathfrak{T}'$ annimmt, zum Parallelriss ($\mathfrak{R}'$) einen Kreis (vom Halbmesser gleich dem des Kreises B) haben, dessen Mittelpunkt m' der $\mathfrak{R}'$ des Mittelpunktes m von B ist, und auf D_1 liegt. Es werden daher offenbar die Mittelpunkte der $\mathfrak{R}'$ unserer Erzeugungskreise gleichweit von einander abstehen, wenn die Kreise selbst gleichweit von einander liegen. Sucht man noch den $\mathfrak{R}'$ (e') des auf dem Erzeugungskreise B liegenden Punktes (e) der Schraubenlinie und verbindet ihn mit m', so wird man sich von folgendem Satze überzeugen können:

Der Parallelriss einer Schraubenlinie auf einer zu deren Axe senkrechten Tafel ist eine (je nach Umständen verlängerte, verkürzte oder unveränderte) gemeine Cycloide, deren Erzeugungskreis mit dem der Schraublinie übereinstimmt, und deren Ganglänge (s. 223), gleich dem $\mathfrak{R}'$ der Ganghöhe der Schraubenlinie ist.

Vierter Abschnitt.

Von den krummen Flächen.

§. 13.

Allgemeine Regeln für die Bestimmung krummer Flächen.

228. Zur Bestimmung krummer Flächen nehmen wir, wie bisher, zwei aufeinander senkrechte Tafeln an und bestimmen so viele Linien der Fläche, als zu ihrer Bestimmung nothwendig sind. Um jedoch hiebei mit möglichst wenig Linien auszukommen, betrachten wir jede Fläche als entstanden durch Bewegung einer Linie von bekanntem Namen. Dabei ist es nicht nothwendig, ja in der Regel auch nicht der Fall, dass diese Linie während ihrer Bewegung ihre Gestalt behält, sondern sie kann ihre Dimensionen ändern, wenn sie nur in allen ihren Stellungen den Namen verdient, den sie ursprünglich gehabt hat. Ist die Linie eine Gerade, so kann natürlich von einer Gestaltsänderung keine Rede sein; ist sie aber eine Kreislinie, so kann sie während ihrer Bewegung ihren Halbmesser ändern, nur darf sie nicht aufhören, eine Kreislinie zu sein; ist sie eine Ellipse, so können sich ihre Axen ändern u. s. w. Fig. 104.

Um nun die Bewegung dieser Linie, die wir die Erzeugende der zu bildenden Fläche nennen, graphisch zu bestimmen, giebt man die Beziehungen an, in denen die Erzeugende zu gegebenen festen Punkten, Linien, Flächen während ihrer Bewegung bleiben soll. Diese gegebenen Dinge nennen wir die Leitenden (Leitpunkt, Leitlinie, Leitebene etc.) der zu bildenden Fläche, die gegebenen Beziehungen der Erzeugenden zu den Leitenden das Bewegungsgesetz der Erzeugenden.

Damit der Schüler sich gleich eine Vorstellung von der eben angegebenen Art der Flächenbestimmung machen kann,

wollen wir ein Beispiel darüber geben. Es sei (Fig. 104) eine in der $\mathfrak{T}_1$ liegende Ellipse A*) und ihr zur $\mathfrak{K}$ konjugirter Durchmesser B gegeben (so dass also jede zu $\mathfrak{K}$ parallele C_1 von der Ellipse und deren Durchmesser B_1 in Punkten a_1, b_1, c_1 so geschnitten wird, dass $\overline{a_1 c_1} = \overline{c_1 b_1}$), und verlangt, dass sich eine Kreislinie so bewegt, dass

1) ihre Ebene parallel $\mathfrak{T}_2$ bleibt;
2) ihr Mittelpunkt auf B sich bewegt;
3) sie stets die Ellipse A schneidet.

In diesem Falle wird man sich leicht überzeugen, dass der Halbmesser des Kreises sich während seiner Bewegung ändert. Denn befindet sich der Mittelpunkt des Kreises in c (der zweite Riss dieses Punktes, so wie aller anderen Punkte und Linien in der $\mathfrak{T}_1$, liegt selbstverständlich in $\mathfrak{K}$, wir haben daher diesen zweiten Riss weggelassen), also sein erster Riss in c_1, so müssen a und b die Punkte sein, in welchen seine Peripherie die Ellipse A schneidet, also ist $\overline{ab}$ sein Durchmesser und $\overline{ac} = \overline{cb}$ sein Halbmesser. Ist der Mittelpunkt des Kreises in g, so ist eg sein Halbmesser.

Man sieht also, dass in unserem Beispiele die Erzeugende eine veränderliche Kreislinie ist, und dass das Bewegungsgesetz die Beziehung der Erzeugenden zu drei Leitenden angiebt, nemlich

1) zur Leitebene $\mathfrak{T}_2$, mit welcher die Kreisebene parallel bleibt;
2) zur Leitlinie B, auf welcher sich das Centrum des Kreises bewegt;
3) zur Leitlinie A, welche von der Kreislinie geschnitten wird.

229. Man sieht schon aus dem Beispiele in der vorigen Nummer, dass die Beziehungen, in denen die Erzeugende zu den verschiedenen Leitenden steht, sehr verschieden sein können, dass es daher mit dem Namen Leitende noch nicht ausgesprochen ist, wie dieselbe leitet, d. i. in welcher Beziehung zu ihr die Erzeugende steht, sondern diese Beziehung erst in

*) Wir machen dem Schüler wiederholt darauf aufmerksam, dass er die Zeichnungen nach der im Texte gegebenen Aufeinanderfolge selbst ausführen soll.

Worten ausgesprochen werden muss. Aber so wie in diesem Beispiele, so kommt es uns sehr oft vor, dass eine Leitlinie gegeben ist, die von allen Erzeugenden geschnitten werden soll, wobei auch zulässig ist, dass der Schnitt in unendlicher Ferne erfolgt. Eine solche Leitende, von der also jeder Punkt auch einer Erzeugenden und folglich auch der erzeugten Fläche angehört, liegt selbst auf dieser Fläche. Wir wollen nun von jetzt an eine Leitlinie dieser Art eine Schneidlinie nennen, so dass von jeder Linie, die wir als Schneidlinie bezeichnen, nicht blos ausgesprochen ist, dass sie leitet, sondern auch wie sie leitet.

Wir verstehen also unter Schneidlinie einer Fläche eine Linie der Fläche, die alle Erzeugenden schneidet (in endlicher oder unendlicher Ferne).

230. So wie sich früher bei Curven gezeigt hat, dass der erzeugende Punkt möglicher Weise zweimal (oder öfter) durch denselben Punkt der Curve geht und dadurch ein Doppelpunkt (oder vielfacher Punkt) entsteht, so kann auch eine Erzeugende A einer Fläche zweimal (oder öfter) durch einen Punkt einer Fläche gehen, d. h. es können sich zwei (oder mehrere) Erzeugende einer Fläche in einem Punkte schneiden, und so ein Doppelpunkt (oder vielfacher Punkt) einer Fläche sich bilden. Ja es kann sein, dass in einem Punkt einer Fläche sich unendlich viele Erzeugende schneiden (wie dies z. B. bei einem Kegel (Konus) für dessen Spitze der Fall ist, wenn man, die auf ihm möglichen Geraden als Erzeugende ansieht). Man nennt einen solchen Punkt einen Kegelpunkt oder konischen Punkt (auch Hornpunkt). Es kann aber auch kommen, dass auf einer Fläche eine Linie sich befindet, deren Punkte alle Doppelpunkte (oder vielfache Punkte) sind; dann nennt man diese Linie eine Doppellinie (oder vielfache Linie), und, wenn sie krumm ist, eine Doppelcurve. Solche Doppelcurven können auf einer Fläche mehrere vorkommen. Ebenso können auf einer Fläche mehrere konische Punkte, ja sogar unendlich viele solche Punkte vorhanden sein, wie dies aus folgendem Beispiele hervorgeht. Hat man nemlich eine Curve von der Gestalt eines zweiten Risses einer Schraubenlinie (Fig. 103) und eine sie schneidende Gerade, welche in dieser Figur den zweiten Riss

der Axe der Schraubenlinie vorstellt, und dreht man die Curve um diese Gerade um, so beschreibt die Curve eine Fläche und jeder Schnittpunkt der Curve mit der Geraden ist ein konischer Punkt der Fläche. Es kann aber nicht sein, dass jeder Punkt einer Linie auf einer Fläche ein konischer Punkt ist, weil sonst die sämmtlichen, durch diese Punkte gehenden Erzeugenden einen Raum ausfüllen, und also keine Fläche geben würden.

231. Soll eine Fläche ihrer Gestalt nach graphisch bestimmt werden, so muss es durch jeden Punkt der Fläche in der Regel (nemlich mit Ausnahme der vielfachen Punkte) eine einzige Erzeugende geben. Da wir aber die Fläche selbst nicht zeichnen, sondern nur ihre Leitenden, so werden wir meistens nur dann erkennen, ob die Fläche bestimmt ist, wenn wir mindestens eine Schneidlinie der Fläche haben. Durch jeden Punkt dieser Linie muss es dann in der Regel eine einzige Erzeugende geben (eine Ausnahme hievon findet statt, wenn die gegebene Schneidlinie eine Doppellinie (oder vielfache Linie) ist; denn dann giebt es durch jeden Punkt dieser Linie zwei Erzeugende, oder so viele, als die Vielfachheit der Linie beträgt).

Mit Ausnahme von besonderen Fällen, die wir an den betreffenden Stellen hervorheben werden, setzen wir daher fest:

Unter den zur Bestimmung einer Fläche gegebenen Leitenden muss sich wenigstens eine Schneidlinie befinden.

Will man nun eine Fläche bestimmen, so wird man zunächst untersuchen, welche Linien auf derselben als Erzeugende angesehen werden können. Dabei kann es sich treffen, dass man verschiedene Systeme von Linien der Fläche als Erzeugende betrachten kann, und man daher sagen muss, welches von diesen Systemen genommen werden soll. (So z. B. kann man durch jeden Punkt eines Cylinders, wie er dem Schüler aus der Stereometrie bekannt ist, eine Gerade und eine Kreislinie legen, und daher ebensowohl sämmtliche Gerade, als auch sämmtliche Kreislinien als Erzeugende ansehen). Hat man die Erzeugende festgestellt, so nimmt man eine Schneidlinie auf der Fläche an, also eine Linie auf der Fläche, die alle Erzeugenden schneidet. Welche Linien der Fläche sicher als Schneidlinien angesehen werden können, muss aus den Eigenschaften der Fläche abge-

leitet werden; wir werden später an den betreffenden Stellen darüber Aufschluss geben. Ausserdem geben wir noch so viele weitere Leitende, als zur Bestimmung der Fläche nothwendig sind, d. h. so viele, dass es in der Regel durch jeden Punkt der gegebenen Schneidlinie nur eine einzige Erzeugende giebt. Wenn man aber fragt, welcher Art diese ferneren Leitenden sein sollen, so müssen wir zunächst bemerken, dass es uns vor Allem darum zu thun ist, möglichst wenig Curven konstruiren zu müssen, also womöglich lauter Gerade und Kreislinien zu zeichnen. Wir werden daher aus dem Bewegungsgesetz der Erzeugenden möglichst einfache Leitende uns zu verschaffen suchen. (Wenn z. B. wie oben (228) die Erzeugende zu einer Ebene parallel bleibt, so werden wir diese Ebene geben; wenn wie dort der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises auf einer Geraden bleibt, so geben wir diese Gerade etc.) Kommt aber der Fall vor, dass das Bewegungsgesetz auf keine oder zu wenige solche Leitende führt, dann wählen wir für die fehlenden Leitenden lauter Schneidlinien, natürlich so viele, als zur Bestimmung der Fläche nothwendig sind (es wird sich zeigen, dass für die gewöhnlich vorkommenden Flächen höchstens drei Leitende anzugeben sind).

Haben wir uns klar gemacht, welche Leitende wir zu zeichnen haben, so wählen wir noch unser Tafelsystem so, dass die Zeichnung möglichst einfach ausfällt, und dass auch die Risse der Erzeugenden (die wir zwar zunächst blos dem Namen nach geben, ohne sie zeichnen zu müssen, die aber bei der Lösung von Aufgaben über die Fläche häufig gebraucht werden) möglichst einfach gefunden werden können, d. h., dass dieselben womöglich kreisförmig oder geradlinig werden.

232. Wir begnügen uns gewöhnlich nicht damit, die Fläche durch eine hinreichende Anzahl von Leitenden bestimmen gelernt zu haben, sondern wir fragen noch nach der Gestalt der Risse der Fläche.

Denkt man sich nun die ersten Risse sämmtlicher Punkte einer Fläche gesucht, so nennt man ihren Inbegriff den ersten Riss der Fläche. Da aber sämmtliche Erzeugende der Fläche sämmtliche Flächenpunkte enthalten, so erhält man auch den ersten Riss einer Fläche, wenn man die ersten Risse aller ihrer

Erzeugenden zeichnet. Hierbei sind dreierlei Fälle möglich: Es ist der erste Riss der Fläche

1) eine Linie,
2) ein (also von Linien begrenzter) Theil $\mathfrak{T}_1$,
3) die unbegrenzte $\mathfrak{T}_1$ (in welchem Falle also ein Riss der Fläche nicht gezeichnet werden kann).

Im Falle 1) muss jeder Punkt des ersten Risses der Fläche der erste Riss einer Linie der Fläche sein. Da aber nur ein Loth eins einen Punkt zum ersten Riss hat, so müssen in diesem Falle die Erzeugenden der Fläche gerade Linien sein, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehen. Wir erhalten also den Satz:

1) Nur diejenige Fläche, deren Erzeugende Gerade sind, die auf der $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) senkrecht stehen, hat eine Linie zum ersten Riss (oder zweiten Riss). Eine solche Fläche nennen wir einen Lothcylinder.

Anm. Wendet man zur Bestimmung einer Fläche schiefe oder Central-Risse an und soll der Stralenriss ($\mathfrak{R}'$) der Fläche eine Linie sein, so muss jeder Punkt dieser Linie der $\mathfrak{R}'$ eines Strales, und müssen demnach die Erzeugenden der Fläche Stralen sein. Da aber diese entweder parallel sind oder alle durch einen Punkt (Centrum) gehen, so folgen im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden folgende Sätze:

2) Es giebt nur zweierlei Flächen, deren Risse Linien sein können, nemlich solche, deren Erzeugende Gerade sind, die entweder parallel laufen (Cylinder) oder die durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen (Kegel).
3) Die Risse dieser Flächen sind dann Linien, wenn die Erzeugenden derselben Lothe oder Stralen sind. Im letzteren Falle nennen wir die Fläche einen Stralencylinder oder Stralenkegel, je nachdem die Stralen, welche die Fläche bilden, parallel laufen, oder durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen.

Fig. 105. 233. Ist der erste Riss einer Fläche ein Theil der $\mathfrak{T}_1$, so ist er von Linien begrenzt, die man zusammen den ersten Umriss der Fläche nennt. Dieser Umriss ist mitunter sehr leicht zu erhalten, wie dies in dem Beispiele der Nr. 228 der Fall

ist. Denkt man sich hier die ersten Risse aller Erzeugungskreise gezeichnet, so wird man erkennen, dass A_1 den ersten Umriss bildet. Nicht immer erhält man aber ein so einfaches Resultat. — Man denke sich die gegebene Fläche durch eine Ebene A_1 parallel zur $\mathfrak{T}_2$ geschnitten, und es sei die Schnittlinie von der Gestalt A (Fig. 105, so dass Gerade in der Richtung eines ersten Lothes dieselbe in mehreren Punkten (a, b, c, d) berührt) und nenne solche Punkte, in denen eine zur $\mathfrak{T}_2$ parallele Linie der Fläche von einem Lothe eins berührt wird, Profilpunkte in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ oder kürzer erste Profilpunkte. Nimmt man nun eine zu A_1 parallele und benachbarte Ebene an, so werden auch auf deren Schnitt mit der Fläche solche Profilpunkte liegen, die beziehungsweise zu a, b, c, d benachbart sind. Es werden daher, wenn wir uns sämmtliche parallele Ebenen zu A_1 denken, die aufeinanderfolgenden Punkte a, b, c, d Linien bilden, die lauter erste Profilpunkte enthalten, und die wir daher zusammen das erste Profil (das Profil in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$) der Fläche nennen. Der erste Riss eines solchen ersten Profils bildet entweder wirklich den ersten Umriss, oder er würde ihn bilden, wenn gewisse Voraussetzungen stattfänden. Wir wollen daher den ersten Riss eines ersten Profils stets den ersten Umriss (und zwar den reelen oder virtuellen, je nachdem er es wirklich ist, oder es unter gewissen Voraussetzungen wäre) nennen. Betrachtet man den Punkt a, so sieht man, dass links desselben in der $\mathfrak{E}$ (A_1) keine Punkte unseres Körpers liegen, ebensowenig rechts von d; es gehören also a_1 und d_1 dem ersten Umriss an, und zwar ohne alle weiteren Bedingungen, also dem reelen Umriss. Betrachten wir aber c_1, so liegen auf A_1 sowohl links als rechts von ihm Risse von Punkten der Linie A unseres Körpers; c_1 gehört also dem reelen Umriss nicht an. Wenn wir aber den unterhalb bd liegenden Theil von A wegnehmen, dann wird c_1 dem Umriss eins angehören; ebenso b_1, wenn wir den oberhalb cd liegenden Theil von A weglassen. Daher bestimmen wir

1) Will man den ersten Riss einer Fläche erhalten, so zeichnet man die ersten Risse aller ersten Profile, d. i. alle ersten Umrisse, sowohl die reelen, als die virtuellen;

2) der erste Umriss einer Fläche ist der erste Riss aller ersten Profile der Fläche.

Anm. Legt man durch einen ersten Profilpunkt einer Fläche ein Loth eins, so können in ihm noch andere Punkte der Fläche liegen oder nicht. Betrachtet man nun wieder (wie früher bei Körpern mit ebenen Grenzflächen) den ersten Riss der Fläche als eine Ansicht von oben herab, so dass der von der $\mathfrak{T}_1$ entfernteste Punkt (die $\mathfrak{T}_1$ wieder so angenommen, dass alle betrachteten Punkte positive Abstände eins haben) eines ersten Lothes *sichtbar*, die anderen in ihm liegenden Punkte *unsichtbar* in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sind; zeichnet man ferner wieder alle ersten Risse von Linien einer Fläche, soweit sie in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ *sichtbare* Punkte enthalten, mit *zusammengehängten*, soweit sie unsichtbare Punkte enthalten, mit unterbrochenen (gestrichelten) Strichen, so werden die ersten Umrisse theils zusammenhängend, theils gestrichelt auszuziehen sein, und wird man durch die eben gemachten Bemerkungen in der Lage sein, zu erkennen, welche Profilpunkte eins sichtbar und welche unsichtbar sind. So werden in unserer Figur die Punkte a, c, d sichtbar, der Punkt b aber unsichtbar sein in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$.

Fig. 106. 234. Ist eine Curve A das erste Profil, also A_1 der erste Umriss einer Fläche, ferner a ein Punkt von A, also a_1 ein Punkt in A_1 und geht durch a eine Erzeugende B, deren erster Riss natürlich im ersten Riss der Fläche liegt, so kann B_1 die Grenze A_1 offenbar nicht überschreiten, und muss also entweder in a_1 einen Endpunkt haben, wenn nemlich B_1 begrenzt ist (wenn z. B. B eine Kreislinie wäre, deren Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so dass der erste Riss von B eine begrenzte Gerade wäre von der Grösse des Durchmessers); oder es könnte ausnahmsweise a_1 ein Grat (Rückkehrpunkt) von B_1 sein; im *Allgemeinen aber werden* B_1 *und* A_1 *sich in* a_1 *berühren*. In gleicher Art wird in einem benachbarten Punkt von a_1 der erste Riss der benachbarten Erzeugenden die Linie A_1 berühren etc. *Es erscheint demnach auch der erste Umriss als eine Linie, welche die ersten Risse aller Erzeugenden berührt*, und kann, wie wir später sehen werden, dadurch der erste Umriss mitunter gefunden werden.

Anm. Ist A_1 der erste Riss eines in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren ersten Profils A einer Fläche, so theilt A die Fläche so, dass die zunächst A liegenden Punkte der Fläche oberhalb A *sichtbar* und unterhalb A unsichtbar sind in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$. Liegt nun, wie das gewöhnlich der Fall ist, die Erzeugende B (deren ersten Riss, nemlich B_1, wir in unserer Figur gezeichnet haben) so, dass sie von oberhalb A nach unterhalb A geht, und A im Punkt a *schneidet*), so wird *von* a_1 *aus* ein Theil von B_1 *gestrichelt* und ein Theil *ausgezogen* werden müssen. Dies der Grund, warum wir B_1 in dieser Weise gezeichnet haben.

235. Liegt ein Punkt a auf einer Fläche, so müssen die Risse des Punktes auf den entsprechenden Rissen der Fläche liegen. Liegen nun die Risse des $\mathfrak{P}$ (a) auf den Rissen der Fläche, *so folgt daraus in der Regel noch nicht, dass auch der* $\mathfrak{P}$ (a) *der Fläche angehört.* Denn es folgt daraus blos, dass der $\mathfrak{P}$ (a) in der $\mathfrak{G}$ (a_1) und der $\mathfrak{G}$ (a_2) liegt, und wir können nur dann behaupten, dass der $\mathfrak{P}$ (a) der Fläche angehört, wenn entweder die $\mathfrak{G}$ (a_1) oder die $\mathfrak{G}$ (a_2) in dieser Fläche liegt. Da aber dies der Fall ist, wenn der erste Riss oder zweite Riss der Fläche eine Linie ist (s. 232), so folgt der Satz:

> *Damit ein Punkt auf einer Fläche liegt, deren erster Riss eine Linie ist, ist es nothwendig aber auch gerade hinreichend, dass der erste Riss des Punktes in dem ersten Riss der Fläche liegt.*

Ebenso lässt sich erweisen, dass, wenn der Stralenriss ($\mathfrak{R}'$) einer Fläche eine Linie ist (s. 232) und der $\mathfrak{R}'$ eines Punktes in dem $\mathfrak{R}'$ der Fläche liegt, auch der Punkt selbst der Fläche angehören muss.

Ist aber kein Riss der Fläche eine Linie, so können wir nur dann behaupten, dass der Punkt der Fläche angehört, wenn seine Risse in denen einer Linie der Fläche (einer Erzeugenden z. B.) liegen.

Anm. Liegt ein Punkt, der einer Linie einer Fläche angehört, zugleich in der $\mathfrak{T}_1$, so nennen wir ihn die *erste Spur* der Linie. In diesem Falle gehört der Punkt auch der Fläche und der $\mathfrak{T}_1$, also auch der Linie an, die die Fläche mit der

$\mathfrak{T}_1$ gemein hat, und die erste Spur der Fläche heisst. Wir haben daher den Satz:

Die erste Spur einer Linie einer Fläche liegt in der ersten Spur der Fläche.

236. Soll man auf einer gegebenen Fläche einen Punkt annehmen, so zeichnet man eine Erzeugende derselben und nimmt auf ihr einen Punkt an. — Will man auf einer Fläche eine beliebige Linie A zeichnen, so kann man den ersten Riss dieser Linie beliebig annehmen. Hat man diesen und will man nun einen beliebigen Punkt von A finden, so zeichnet man eine beliebige Erzeugende B der Fläche, deren erster Riss, nemlich B_1, den ersten Riss von A in einem Punkte a_1 schneidet; der Punkt a der Erzeugenden B, der a_1 zum ersten Riss hat, ist dann offenbar ein Punkt der gesuchten Curve. Denn dieser Punkt liegt auf der Fläche (weil in einer Erzeugenden derselben) und sein erster Riss liegt, wie verlangt, im ersten Riss von A.

§. 14.

Allgemeines über Berührung von Flächen mit Geraden und Ebenen.

237. Wenn eine Linie A eine Linie B einer Fläche in einem Punkte a berührt, so sagt man, die Linie A berührt die Fläche in dem Punkte a. Da wir aber dann sagen können, die Linie A hat mit B zwei unendlich nahe Punkte gemein, und weil ferner diese Punkte auch unserer Fläche angehören, so hat auch A mit der Fläche zwei unendlich nahe Punkte gemein. Hieraus folgt:

Wenn eine Linie A mit einer Fläche einen Punkt a gemein hat, so berührt A die Fläche im Punkt a, sobald eine durch a gehende Linie der Fläche, die A im Punkte a berührt, oder sobald A mit der Fläche ausser dem Punkte a noch einen seiner Nachbarpunkte gemein hat.

Ist A eine Gerade, so nennt man sie eine Tangente der Fläche im Punkte a.

238. Soll man daher in einem Punkte einer Fläche eine Tangente an diese legen, so zieht man durch a auf der Fläche eine beliebige Linie (s. 236) und legt in a an diese Linie eine Tangente, so ist diese zugleich eine Tangente der Fläche.

Hieraus geht aber hervor, dass es in der Regel unzählige Tangenten einer Fläche für einen Punkt a derselben giebt, die zusammen eine Fläche bilden, welche wir die Tangentenfläche der gegebenen Fläche im Punkte a nennen. Da aber diese Tangenten alle durch einen Punkt gehen, so ist vor allem die Frage, ob sie eine einzige Ebene oder eine krumme Fläche oder mehrere Ebenen bilden. Nehmen wir an, die von den Tangenten gebildete Fläche wäre so beschaffen, dass sie die $\mathfrak{T}_1$ nach einer krummen Linie A oder nach zwei Geraden schneidet. Nimmt man nun eine Ebene B_1 so an, dass sie durch a geht (also B_1 durch a_1) und A in zwei Punkten b, c schneidet (also B_1 die A_1 in b_1, c_1), demnach mit der Tangentenfläche die Tangenten ab, ac gemein hat, so wird diese Ebene B_1 die gegebene Fläche nach einer durch a gehenden Linien B schneiden, mit welcher die Gerade ab (da sie die gegebene Fläche in a berührt, also den Punkt a und seinen Nachbarpunkt mit ihr gemein hat) den Punkt a und einen Nachbarpunkt gemein hat. Demnach berührt die Gerade ab die B im Punkte a. Dasselbe gilt aber auch ebenso von den Geraden ac. Soll daher die von den Tangenten gebildete Fläche eine krumme (oder zwei Ebenen) sein, so muss eine durch a gelegte Ebene die Fläche nach einer Linie schneiden, die in a zwei Tangenten zulässt, also in a einen Doppelpunkt hat; der Punkt a muss demnach ein besonderer Punkt der Fläche sein. Ist also der Punkt ein gewöhnlicher Flächenpunkt, so können seine Tangenten keine krumme Fläche bilden, sondern sie müssen alle einer Ebene angehören; diese Ebene nennt man eine Tangential- oder Berührungsebene der Fläche im Punkte a. In der That legt man nun durch den Punkt a eine Ebene, welche die Fläche nach einer Linie A und die Tangentialebene nach einer Geraden B schneidet, die A in a berührt, so kommt man nur auf eine Tangente. Nun könnte aber noch der Fall vorkommen, dass alle durch den Punkt a möglichen Linien der gegebenen Fläche sich in a berühren und also ihre Tangenten für a zusammenfallen, demnach in a nur eine Tangente zur Fläche möglich wäre. Aus dem eben Entwickelten ergiebt sich folgender Satz:

In einem Punkte a giebt es in der Regel unzählige Tangenten an eine Fläche, die alle eine Ebene

bilden. Diese Ebene nennt man die Tangentialebene, den Punkt a ihren Berührungspunkt. Liegt der Berührungspunkt in unendlicher Ferne, so nennt man die Tangentialebene eine asymptotische Ebene. Eine Ausnahme von dieser Regel findet nur für besondere Flächenpunkte statt, in denen entweder die Tangenten mehrere Ebenen oder eine krumme Fläche (Kegelfläche) bilden oder zusammenfallen.

239. Geht durch einen Punkt a einer Fläche eine Gerade A, welche auf der diesem Punkte entsprechenden Tangentialebene senkrecht steht, so sagt man, die 𝔊 (A) steht auf der Fläche senkrecht. Man nennt dann die 𝔊 (A) eine Normale der Fläche im Punkte a, den Punkt a den Fusspunkt der Normalen und jede durch die Normale gelegte Ebene eine Normalebene der Fläche.

Man sieht demnach, dass es in der Regel für einen Punkt a einer Fläche unendlich viele Tangenten, eine einzige Tangentialebene, unendlich viele Normalebenen und eine einzige Normale giebt. — Dagegen haben wir früher gesehen, dass es in der Regel für eine Curve in einem Punkte derselben eine Tangente, unendlich viele Tangentialebenen, unendlich viele Normalen und eine Normalebene giebt.

240. Haben zwei Flächen einen Punkt a gemein, und haben sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangentialebene oder Normale, so sagt man, die Flächen berühren sich in diesem Punkte. Haben zwei Flächen eine Linie A gemein, und zugleich in jedem Punkte dieser Linie eine gemeinschaftliche Tangentialebene, so sagt man, die Flächen berühren sich nach der Linie A.

241. Haben zwei Flächen eine Linie A gemein und ausserdem noch eine Linie B, die der Linie A unendlich nahe ist (und also in der Zeichnung mit A zusammenfällt), und nimmt man auf A einen Punkt a an, ferner auf derselben Linie einen dem Punkte a unendlich nahen Punkt b, endlich auf der Linie B einen Punkt c, der dem Punkte a gleichfalls unendlich nahe ist, und denkt man sich die Tangentialebene der einen der beiden Flächen für den Punkt a, so enthält sie die Geraden ab und ac, weil diese Tangenten der Fläche im Punkte a sind. Demnach

ist diese Tangentialebene die Ebene (abc). Ebenso ist aber auch die Ebene (abc) die Tangentialebene der anderen Fläche für den Punkt a. Also haben die beiden Flächen in jedem Punkte von A eine gemeinschaftliche Tangentialebene. Es folgt demnach der Satz:

Wenn zwei Flächen eine Linie A und ausserdem eine unendlich nahe daran liegende Linie gemein haben, so berühren sich die Flächen nach der Linie A.

Anm. Von zwei solchen Linien einer Fläche, die unendlich nahe aneinander liegen, sagt man, sie sind benachbart. Der von diesen Linien eingeschlossene unendlich schmale Flächenstreifen wird ein Flächenelement genannt.

242. Es giebt demnach folgende Mittel, eine Tangentialebene an einer Fläche (𝔉) zu finden, wenn ihr Berührungspunkt a gegeben ist:

1) Da die Tangentialebene alle Tangenten der Fläche für den Punkt a enthält, aber schon durch zwei Gerade bestimmt ist, so legt man im Punkte a an 𝔉 zwei Tangenten A, B, und die Ebene (A B) ist die gesuchte Tangentialebene.

2) Man zeichnet die Normale (A) der Fläche, die a zum Fusspunkte hat, und legt durch a eine Ebene, die $\perp$ A ist.

3) Man zieht durch den Punkt a auf (𝔉) eine Linie A (etwa eine Erzeugende), nimmt eine Fläche (𝔉') an, die (𝔉) nach A berührt, und sucht die dem Punkte a entsprechende Tangentialebene der Fläche 𝔉'.

Ist für die Fläche (𝔉) eine Tangente zu suchen, deren Berührungspunkt a gegeben ist, so ergeben sich zur Auffindung derselben folgende Mittel:

1) Man zieht auf 𝔉 eine Linie A (am besten eine Erzeugende), die durch a geht, und legt an diese eine Tangente, die a zum Berührungspunkt hat.

2) Man legt in a eine Tangentialebene an 𝔉 und zieht durch a eine Gerade, die in der Tangentialebene liegt.

3) Man zeichnet eine Normale der Fläche, die a zum Fusspunkt hat und errichtet in a zu dieser Normale eine Senkrechte.

4) Man nimmt eine Normalebene der Fläche für den Punkt a an und errichtet dazu eine Senkrechte in a.

Anm. In ähnlicher Weise kann man die Mittel finden, um eine Normale oder Normalebene einer Fläche für einen Punkt a zu erhalten.

§. 15.

Umhüllungsflächen.

243. Lässt man eine Fläche von bekanntem Namen nach einem gegebenen Gesetze bewegen, (wobei es wieder zulässig ist, dass sie sich während ihrer Bewegung ändert, ohne jedoch aufzuhören, den Namen zu verdienen, den sie ursprünglich gehabt hat), so werden je zwei Nachbarstellungen dieser bewegten Fläche sich nach einer Linie schneiden, und wird so eine stetige Reihe von Linien erhalten, die eine neue Fläche bilden. Diese neue Fläche nennt man eine Umhüllungsfläche (Umhüllung) der sich bewegenden Fläche, jede Stellung der bewegten Fläche eine umhüllte Fläche (Umhüllte) der neuen Fläche, und jede Linie, nach welcher sich zwei benachbarte Umhüllte schneiden, eine Charakteristik der Umhüllungsfläche. — Diese Charakteristiken können als Erzeugende der Fläche betrachtet werden, da durch ihre Bewegung nach einem aus der Bewegung der Umhüllten abgeleiteten Gesetze die Umhüllungsfläche ebenfalls beschrieben werden kann.

244. Da jede Umhüllte zwei Nachbarinnen hat (eine vorhergehende und eine folgende), so enthält sie zwei (unendlich nahe liegende) Charakteristiken oder ein Element (s. 241. Anm.) der Umhüllungsfläche; sie berührt also die Umhüllungsfläche nach einer Charakteristik (s. 241). Wir erhalten also die Sätze:

1) Wenn eine Fläche sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, so giebt es immer eine Fläche (Umhüllung) welche von jeder Lage der bewegten Fläche (Umhüllten) nach einer Linie (Charakteristik) berührt wird.
2) Jede Charakteristik ist der Durchschnitt zweier Nachbar-Umhüllten.

Ist die Umhüllte eine Ebene, so sind die Charakteristiken gerade und liegt jedes Element der Umhüllung in einer umhüllten Ebene; demnach hat dann die Umhüllungsfläche ebene Elemente. Wir haben also den Satz:

3) **Jede Umhüllung einer Ebene hat ebene Flächenelemente.**

Anm. Damit man schon jetzt begreift, in welcher Weise man das Gesetz, nach dem sich eine Ebene bewegen soll, geben kann, wollen wir einige Beispiele hier anführen. — Man kann eine Ebene so bewegen lassen, dass sie auf einer gegebenen Curve stets normal steht; dass sie an einer gegebenen gewundenen Curve, z. B. einer Schraubenlinie, stets Krümmungsebene ist; dass sie zwei gegebene Flächen, z. B. zwei Kugeln stets berührt etc.

245. Es sei die Umhüllte eine Kugel mit gegebenem unveränderlichen Halbmesser α, deren Mittelpunkt eine gegebene Linie A durchläuft. Nimmt man auf A einen Punkt a an, den man als Mittelpunkt einer umhüllten Kugel betrachtet, und sucht die Linie, nach welcher diese Kugel von einer zweiten geschnitten wird, deren Mittelpunkt b auf A liegt, und so angenommen ist, dass die beiden Kugeln sich schneiden, so erhält man bekanntlich als Durchschnitt eine Kreislinie B, deren Ebene die Strecke $(\overline{ab})$ senkrecht halbirt. Ist nun b ein Nachbarpunkt von a, so ist die Kugel (b, α) die Nachbar-Umhüllte der Kugel (a, α) und die Kreislinie B ist eine Charakteristik unserer Umhüllung. In diesem Falle ist aber auch die Gerade (ab) eine Tangente der Linie A für den Punkt a, und der Halbirungspunkt von $(\overline{ab})$ fällt für die Zeichnung mit a zusammen; es liegt daher die Kreislinie B in der Ebene, welche durch a geht und auf der in a zur Linie A gezogenen Tangente senkrecht steht, d. h. in einer Normalebene der Linie A für den Punkt a. Wir haben also den Satz:

Die Charakteristiken einer Umhüllungsfläche, deren Umhüllte Kugeln von gegebenem unveränderlichen Halbmesser sind, und deren Mittelpunkte in einer gegebenen Linie A liegen, sind grösste Kreise dieser Kugeln, deren Ebenen Normalebene der Linie A sind.

Anm. Soll die Kugel ihren Halbmesser ändern und ihr Mittelpunkt eine ebene Curve durchlaufen, die in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so schneidet sie die $\mathfrak{T}_1$ stets nach einem grössten Kreise, und die Umhüllungscurve aller dieser Kreise ist die erste Spur

der Umhüllungsfläche, d. h. der Schnitt der Umhüllungsfläche mit der $\mathfrak{T}_1$. Ist daher die Leitlinie eine Gerade A (Fig. 77. a), und giebt die Fig. 77. b) das Gesetz der Aenderung des Kugelhalbmessers ebenso an, wie früher (167) das Gesetz der Aenderung des umhüllten Kreises, so findet man in ganz gleicher Art (wie 167) den Punkt c (Fig. 77. a) der Umhüllungscurve, (welche hier die erste Spur der verlangten Umhüllungsfläche vorstellt). Zieht man dann von c eine Senkrechte zu A, welche diese Gerade (A) in einem Punkte b schneidet, so ist b der Mittelpunkt und bc der Halbmesser des Kreises, der die Charakteristik vorstellt, In ähnlicher Art findet man die Charakteristiken einer umhüllten veränderlichen Kugel, wenn die Leitende eine in $\mathfrak{T}_1$ liegende Curve A (Fig. 78) ist (s. 168).

246. Nimmt man auf einer Charakteristik A einer Umhüllungsfläche einen Punkt a an, und legt dadurch eine Ebene (abc), die die Umhüllungsfläche nach einer Linie B, die der Charakteristik A entsprechende Umhüllte aber nach einer Linie C schneidet, so haben B und C den Punkt a gemein. Legt man nun in a eine Tangente an B, so liegt diese in der Ebene (abc) und in der dem Punkte a entsprechenden Tangentialebene der Umhüllungsfläche. Legt man in a eine Tangente an C, so liegt diese ebenfalls in der Ebene (abc) und in der dem Punkte a entsprechenden Tangentialebenen der Umhüllten für A. Da aber diese Tangentialebene mit der vorhin erwähnten zusammenfällt (indem sich die Umhüllung und Umhüllte in jedem Punkte der A berühren), so fallen die beiden genannten Tangenten zusammen, und B und C berühren sich daher in a. Nimmt man statt der schneidenden Ebene (abc) eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_1$ an, so sind die Linien B, C beziehungsweise die Spuren der Umhüllung und Umhüllten. Es folgt daher der Satz:

> Die Spur einer Umhüllung wird in jedem Punkte von der durch diesen Punkt gehenden Spur der Umhüllten berührt.

Ist die Umhüllte eine Ebene, ihre Spur C daher eine Gerade, so berührt diese die Spur B der Umhüllung in dem Punkte a, in welchem die gerade Spur C der Umhüllten von der in dieser liegenden Charakteristik A geschnitten wird. Da

aber A und C sich entweder schneiden oder parallel sind (d. h. sich in unendlicher Entfernung schneiden), so folgt:

1) Die Spur einer jeden umhüllten Ebene tangirt die gleichnamige Spur der Umhüllung in endlicher oder unendlicher Entfernung (in letzterem Falle ist die Spur der Umhüllten die Asymptote für die Spur der Umhüllung) und daraus folgt
2) Die Spur der Umhüllung ist die Umhüllungscurve von sämmtlichen Spuren der umhüllten Ebenen.

§. 16.

Eintheilung der Flächen.

247. Wir bringen die unzählig verschiedenen Flächen dadurch in Hauptabtheilungen, indem wir sie nach der Gestalt ihrer Erzeugenden zusammenstellen, und nennen daher eine Fläche eine geradlinige oder Regelfläche, eine kreislinige, eine elliptische Fläche u. s. w., je nachdem ihre Erzeugende eine Gerade, Kreislinie, Ellipse u. s. w. ist.

Die Unterabtheilungen dieser Hauptgruppen stellen wir dadurch her, dass wir das Bewegungsgesetz der Erzeugenden mit in Rücksicht ziehen. Für die geradlinigen Flächen werden wir die Unterabtheilungen so bilden können, dass diese zusammengenommen alle geradlinigen Flächen umfassen. Bei den krummlinigen Flächen hingegen werden wir nur diejenigen Gruppen besonders betrachten und benennen, die für die Anwendung ein besonderes Interesse haben.

248. Bewegt man eine Gerade nach einem bestimmten Gesetze fort, so werden im Allgemeinen zwei Nachbarerzeugende (ein Flächenelement) nicht in einer Ebene liegen. Sind wir hievon überzeugt, so nennen wir die Fläche windschief.

Wir verstehen also unter einer windschiefen Fläche (abgek. WF) eine solche geradlinige Fläche, deren Elemente uneben sind.

Anm. Wenn auch die Flächenelemente einer windschiefen Fläche im Allgemeinen uneben sind, so kann es doch vorkommen, dass hie und da ein einzelnes Element der Fläche eben ist. Ein solches ebenes Element (das also aus zwei sehr nahen

Geraden besteht, die für die Zeichnung als eine einzige Gerade gelten) nennt man die Kante, und den Schnittpunkt der beiden Erzeugenden dieses Elementes den Scheitel der 𝔚𝔉.

249. Sind alle Erzeugenden einer 𝔚𝔉 parallel einer Ebene, so nennen wir diese eine Leitebene und die 𝔚𝔉 ein Planoid, wo nicht, so können wir durch einen beliebigen Punkt zu allen Erzeugenden Parallele legen, die, weil sie keine Ebene bilden, eine krumme Fläche geben, die man einen Kegel nennt (s. 250). Wir heissen dann diesen Kegel den Leitkegel der 𝔚𝔉 und diese Fläche selbst ein Konoid *).

250. Bewegt sich eine Gerade so, dass je zwei Nachbarerzeugende in einer Ebene liegen, so nennt man die erzeugte Fläche eine entwickelbare. Bei einer solchen Fläche werden zwei Nachbarerzeugende sich in der Regel schneiden, und so im Allgemeinen eine Curve entstehen, von der jeder Punkt ein Schnitt zweier Nachbarerzeugenden ist. Wir nennen diese Curve den Grat (auch Wendecurve, Rückkehrcurve) der entwickelbaren Fläche. Da jede Erzeugende zwei Nachbarinnen hat (eine vorhergehende und eine folgende), so wird sie mit dieser Curve zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, d. h. sie berühren. Diese Curve (Grat), an welcher alle Erzeugenden berühren, ist offenbar uneben, denn sonst würden ja alle Erzeugenden in einer Ebene liegen. Die entwickelbare Fläche, welche einen solchen Grat hat, nennen wir Gratfläche.

Es kann aber auch sein, dass die Schnittpunkte der Nachbarerzeugenden alle in einen Punkt zusammenfallen, so dass alle Erzeugenden durch diesen Punkt gehen. In diesem Falle nennt man die Fläche eine Kegelfläche (konische Fläche), den Punkt, durch welchem alle Erzeugenden gehen, das Centrum (Spitze) und die beiden Theile der Fläche, die im Centrum zusammenstossen, die Mäntel des Kegels.

Endlich kann es auch kommen, dass das Centrum des Kegels in's Unendliche fällt, d. h. dass alle Erzeugenden zu einander parallel laufen. In diesem Falle nennt man die Fläche einen Cylinder (Cylinderfläche), jeden Schnitt der-

---

*) In anderen Lehrbüchern versteht man unter Konoid eine andere Art 𝔚𝔉.

selben mit einer zu den Erzeugenden senkrechten Ebene sein Profil, und jede mit seinen Erzeugenden parallele Gerade seine Richtung. Hieraus folgt:

1) Wir verstehen unter einer entwickelbaren Fläche eine solche, deren Elemente eben sind.

   Der Grat einer entwickelbaren Fläche ist diejenige Curve auf ihr, die von allen Erzeugenden berührt wird.

2) Wir verstehen unter einer Kegelfläche (abgek. 𝔎𝔉) jede geradlinige Fläche, deren Erzeugende alle durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen.

3) Wir verstehen unter einem Cylinder (abgek. ℭ𝔉) jede geradlinige Fläche, deren Erzeugende parallel sind.

Anm. 1. Wie wir oben (244) gesehen haben, ist die Umhüllungsfläche einer Ebene mit ebenen Elementen versehen. Demnach ist die Umhüllungsfläche einer Ebene eine entwickelbare Fläche. Geht die umhüllte Ebene durch einen festen Punkt, so erhält man eine Kegelfläche; ist sie parallel einer Geraden, so beschreibt sie einen Cylinder. Ausserdem eine Gratfläche.

Macht die umhüllte Ebene mit einer gegebenen festen Ebene (z. B. der $\mathfrak{T}_1$) in allen ihren Lagen gleiche Winkel, so erhalten wir eine entwickelbare Fläche, wie sie beim Abböschen (Abschrägen) von Erdmassen verwendet wird; wir wollen sie daher Böschungsfläche nennen.

Wir verstehen also unter Böschungsfläche eine entwickelbare Fläche, welche durch Bewegung einer Ebene erzeugt werden kann, die mit einer festen Ebene immer denselben Winkel bildet.

Anm. 2. Legt man durch einen Punkt zu allen Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche Parallele, so erhalten wir (wenn die Fläche kein Cylinder ist) einen Kegel, den wir den Leitkegel der entwickelbaren Fläche nennen.

251. Bewegt sich eine veränderliche Kreislinie so, dass ihr Mittelpunkt eine Gerade durchläuft, und ihre Ebene auf dieser Geraden senkrecht bleibt, so nennt man die von ihr erzeugte Fläche eine Drehungsfläche, Drehfläche, (Rotations-

fläche), jede kreislinige Erzeugende einen Parallelkreis und die durch die Mittelpunkte dieser Parallelkreise gehende Gerade die Drehungsaxe (Axe) der Fläche. Es ist ferner leicht einzusehen, dass alle Schnitte von die Axe enthaltenen Ebenen mit der Drehungsfläche unter sich kongruent sind, und dass jeder solche Schnitt von der Drehungsaxe symmetrisch getheilt wird, also die Drehungsaxe zur Axe hat (s. 150). Man nennt jeden solchen Schnitt einen Meridian, der also aus zwei symmetrischen Hälften (Halbmeridianen) besteht, und seine Ebene eine Meridianebene.

Wir verstehen also unter Drehungsfläche jede kreislinige Fläche, deren Erzeugende ihre Mittelpunkte in einer auf ihren Ebenen senkrechten Geraden haben, oder eine Fläche, die sich von Ebenen, die durch eine gemeinschaftliche Gerade gehen, nach kongruenten symmetrischen Linien schneiden lässt.

252. Bewegt sich eine unveränderliche Kreislinie von bestimmtem Halbmesser so, dass ihr Mittelpunkt eine gegebene Curve A durchläuft, und ihre Ebene stets im Mittelpunkte der Kreislinie zu der Curve A normal ist, so nennt man eine solche Fläche eine Röhrenfläche und die Curve A ihre Mittellinie.

Nach dem, was wir oben (245) gesehen, erhalten wir dieselbe Fläche als Umhüllungsfläche einer Kugel (von gleichem Halbmesser mit dem gegebenen Kreise) deren Centrum auf der Curve A fortgeht.

253. Bewegt sich eine Ellipse so, dass ihr Mittelpunkt eine gegebene Gerade (Axe) durchläuft, ihre Ebene auf dieser Axe senkrecht bleibt, jede der Ellipsenaxen eine Ebene (Hauptebene) beschreibt, und ihre Halbaxen sich nach einem gegebenen Gesetze ändern, jedoch so, dass ihr Verhältniss unverändert bleibt, so nennen wir diese elliptische Fläche eine Ovalfläche, die erzeugenden Ellipsen Parallelellipsen, jeden Schnitt der Fläche mit einer die Axe enthaltenden Ebene einen Meridian und ihren Schnitt mit einer Hauptebene einen Hauptmeridian.

Wir verstehen also unter einer Ovalfläche (𝔒𝔉), jede Fläche, welche durch parallele Ebenen nach Ellipsen geschnitten werden kann, deren Mittelpunkte

in einer zu ihren Ebenen senkrechten Geraden, deren gleichnamige Axen in einer Ebene liegen, und deren Axenverhältniss konstant ist.

254. Bewegt sich eine Schraubenlinie nach einem bestimmten Gesetze so, dass sie ihre Axe, ihre Ganghöhe und ihre Windungsrichtung (rechts oder links gewunden) unverändert während ihrer Bewegung beibehält, so nennt man die erzeugte Fläche eine Schraubenfläche, die den Schraubenlinien gemeinsame Axe die Axe der Schraubenfäche, jede durch die Axe gelegte Ebene eine Meridianebene und den Schnitt einer solchen Ebene mit der Fläche einen Meridian.

Wir nennen also eine von einer Schraubenlinie erzeugte Fläche eine Schraubenfläche, wenn alle erzeugenden Schraubenlinien dieselbe Axe, gleiche Ganghöhe und gleiche Windungsrichtung haben.

255. Liegen in einer Ebene eine Gerade A und eine Curve B, und lässt man die Ebene so bewegen, dass

1) ein bestimmter Punkt a der Geraden A eine ebene Curve C durchläuft,
2) die Gerade A in der Ebene dieser Curve bleibt,
3) die Ebene der Curve B stets auf C normal steht,

so beschreibt die Curve B (Erzeugende) eine Fläche, die man eine Gesimsfläche oder Simsfläche nennt. Die ebene Curve C mag die Direktrix der Fläche genannt werden, oder wenn sie durch den Mittelpunkt von B geht, die Mittellinie.

256. Unter den bisher aufgezählten Flächengruppen giebt es unter Umständen solche, welche zugleich die Eigenschaft haben, dass sie von jeder Ebene nach einem Kegelschnitt und daher von jeder Geraden nach höchstens zwei Punkten geschnitten werden. Eine solche Fläche nennt man eine Fläche zweiter Ordnung.

Anm. So wie die Curven können auch die Flächen durch Gleichungen bestimmt werden, wenn man für diese drei, gewöhnlich aufeinander senkrechte, Ebenen XY, XZ, YZ (X, Y, Z, die sogenannten Coordinatenaxen sind die Schnitte dieser drei, den Namen Coordinatenebenen führenden Ebenen) annimmt, oder zwei aufeinander senkrechte Ebenen, die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, (welche resp. mit den Ebenen XY, XZ zusammenfallen) und auf deren

Schnitt (Ꞩ, die mit X zusammenfällt) einen Punkt als Ursprung (Anfangspunkt) wählt. Für jeden Punkt ist dann wie schon Anfangs bestimmt wurde, die Abscisse das x, die erste Ordinate das y und die zweite Ordinate das z. — Die Gleichung einer Fläche, welche x, y, z als Veränderliche enthält, ist dann so zu verstehen, dass die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Fläche, in die Gleichung derselben eingesetzt, diese in eine identische Gleichung umwandeln müssen. Man nennt dann die Fläche von der n^{ten} Ordnung, wenn ihre Gleichung vom bezüglich x y z n^{ten} Grade ist.

Demnach ist eine Fläche zweiter Ordnung jede Fläche, deren Gleichung vom zweiten Grade ist.

Sucht man den Schnitt zweier Flächen (d. h. die Gleichung der Linie, welche in zwei, durch ihre Gleichungen gegebene Flächen liegt), so entsprechen jedem Punkte dieser Linie beide gegebenen Gleichungen; es wird demnach eine Linie durch zwei Gleichungen gegeben. Sucht man die erste Spur einer Fläche, so ist für alle Punkte derselben $z = o$, und wird die Gleichung derselben daher gefunden, wenn man in der Gleichung der Fläche $z = o$ setzt. Ist demnach die Fläche eben und daher ihre erste (und zweite) Spur eine Gerade, deren Gleichung bekanntlich vom ersten Grade ist, so muss die Gleichung der Fläche vom ersten Grade sein.

Eine Fläche erster Ordnung ist demnach eine Ebene. Hieraus folgt weiter, dass eine Gerade durch zwei Gleichungen vom ersten Grade bestimmt wird.

Sucht man den Schnittpunkt einer Fläche mit einer Linie (welche, wie oben gezeigt, durch zwei Gleichungen gegeben wird), so gelten für diesen Punkt drei Gleichungen (die der Fläche und die beiden der Linie).

Sucht man daher den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Fläche n^{ter} Ordnung, so kann man mittelst der beiden Gleichung der Geraden, welche erster Ordnungen sind, y durch x ausgedrückt und z durch x ausgedrückt finden, und in die Gleichung der Fläche einsetzen. Man erhält dann eine Gleichung von höchstens n^{ter} Ordnung, die blos x enthält. Sucht man hieraus das x, so findet man n (theils reele, theils immaginäre) Werthe desselben, und mittelst der Gleichungen der Geraden

für jedes x ein entsprechendes y und ein entsprechendes z. Man sieht hieraus:

Jede Fläche n^{ter} Ordnung wird von einer Geraden nach höchstens n (reelen und immaginären) Punkten geschnitten.

Hieraus geht hervor:

Jede Fläche n^{ter} Ordnung wird von einer Ebene nach einer Linie von höchstens n^{ter} Ordnung geschnitten.

Denn hätte die Linie eine höhere Ordnung, so würde sie, und mit ihr auch die Fläche, nach mehr als n Punkten geschnitten.

§. 17.

Graphische Bestimmung der Flächen.

257. In diesem § wollen wir angeben, wie wir die krummen Flächen durch Zeichnung bestimmen, wenn sie unbegrenzt sind, d. h. so weit fortgesetzt gedacht werden, als es ihrer Natur nach möglich ist. Wie wir früher schon erwähnten, werden wir in der Regel zur Bestimmung einer Fläche von bestimmtem Namen (durch diesen ist auch der Name der Erzeugenden, und häufig ein Theil des Bewegungsgesetzes von dieser, bekannt) wenigstens eine Schneidlinie zeichnen. Welche Linie der Fläche aber sicher als Schneidlinie, d. h. als Linie, die alle Erzeugenden schneidet, betrachtet werden kann, das haben wir bei den einzelnen Flächengruppen einzeln anzugeben. Wir haben aber auch bei den einzelnen Flächen anzugeben, wie man ihre Umrisse findet, da diese zu deutlichen Bestimmungen der Flächen mitunter nothwendig, meistens wenigstens erwünscht sind, und dies um so mehr, als auch bei Körpern mit krummen Oberflächen die von uns zur Bezeichnung der Punkte und Linien verwendeten Buchstaben in der Anwendung weggelassen werden. Ist die Fläche begrenzt (in der Regel durch Linien, selten, wie dies bei der Spitze eines Kegels der Fall ist, durch einen Punkt) so muss man die Grenzen zeichnen, und erhält dadurch so viele (meistens zwei) Schneidlinien, die man als Bestimmungsmittel der Fläche benützen kann, dass man ausser diesen Schneidlinien nur wenig mehr zur Bestimmung der Fläche anzugeben

hat. Wir werden bei den einzelnen Flächengruppen die entsprechenden Regeln darüber angeben. Aber so viel wollen wir hier allgemein aussprechen, dass wir zur Bestimmung einer Fläche entweder solche Linien zeichnen, die nicht auf ihr liegen (z. B. die Axe einer Drehfläche, oder die Mittellinie einer Röhrenfläche); solche Linien müssen wir in der Zeichnung als Hilfslinien charakterisiren, indem wir sie roth oder blau oder, wenn schwarz, strichpunktirt (wie die Kantenlothe in unseren Zeichnungen) darstellen. Zeichnen wir aber die Risse von Linien, die auf der Fläche liegen, so darf dies nur geschehen, wenn diese Risse als Ansichten des Auges von einem entsprechenden Standpunkt (nemlich senkrecht über der Tafel in unendlicher Ferne) betrachtet, von diesem wirklich gesehen werden, wenn der Körper als durchsichtig angesehen wird. Dies ist aber der Fall

1) für die Umrisse und

2) für die Begrenzungslinien.

Andere Linien sieht man in der Ansicht nicht, und dürfen daher nicht gezeichnet werden, wenn man nicht Gefahr laufen will, Missverständnisse herbeizuführen. Reichen daher die genannten Bestimmungslinien (Mittellinien, Umrisse und Begrenzungslinien) zur Bestimmung der Fläche nicht aus, und muss man noch weitere Linien auf der Fläche haben, so hilft man sich damit, dass man Durchschnittszeichnungen (116) macht, d. h. den Riss des Körpers zeichnet, nachdem man einen Theil desselben durch eine Ebene weggeschnitten. Dadurch kann man sich eine neue Linie der Fläche, nemlich den Schnitt der Ebene mit der Fläche, verschaffen. Natürlich muss man diesen Durchschnitt dann als solchen (durch Schraffiren oder Anlegen mit Farbe, s. 116) charakterisiren.

In diesem § werden wir ausserdem bei jeder Flächengruppe noch angeben, wie wir sie bezeichnen, welche besondere Arten derselben unterschieden werden, und welche Art derselben die Fläche zu einer solchen von der zweiten Ordnung macht.

258. Wenn man eine geradlinige Fläche durch eine Ebene schneidet, so findet man ihre Schnittlinie mit dieser Ebene, wenn man sucht, wo diese von den einzelnen Geraden der Fläche geschnitten wird, und die Schnittpunkte durch eine Curve ver-

bindet. Jeder Schnittpunkt dieser Curve mit einer Geraden der Fläche ist also zugleich ein Schnitt dieser Geraden mit der schneidenden Ebene. Da aber diese von allen Geraden der Fläche (in endlicher oder unendlicher Ferne) geschnitten wird, so ist dies auch für die gefundene Schnittcurve der Fall und diese ist daher eine Schneidlinie. Wir haben also den Satz:

Jede ebene Linie einer **Regelfläche** ist eine **Schneidlinie** dieser Fläche.

259. Soll eine windschiefe Fläche (abg. 𝔚𝔉) durch Zeichnung bestimmt werden, so bietet uns im Allgemeinen das Bildungsgesetz der Fläche keine Mittel, einfache Leitende zu finden, wenn die Fläche ein Konoid (249) ist, so dass wir für diese Fläche in der Regel lauter Schneidlinien zeichnen. Dagegen können wir zur Bestimmung eines Planoid dessen Leitebene benützen, wenn sie uns bekannt ist.

Fragen wir nun, wie viele Schneidlinien wir zur Bestimmung eines Konoides brauchen, so zeigt sich leicht, dass zwei Schneidlinien A, B nicht ausreichen. Denn nimmt man auf A einen Punkt a an und legt durch ihn eine Erzeugende, d. h. eine Gerade die B schneidet, so giebt es unzählige solche, so dass der Punkt a und daher jeder Punkt von A ein konischer Punkt (230) wäre. Wir brauchen daher noch eine dritte Schneidlinie C.

Nehmen wir nun in A einen Punkt a und legen dadurch alle möglichen Geraden, die B schneiden, so erhalten wir einen Kegel (Ba); sucht man den Punkt c, in welchem dieser Kegel von C geschnitten wird, und verbindet c mit a, so ist Gerade (ac) die verlangte Erzeugende. Schneidet daher C den Kegel (Ba) stets nur nach einem Punkte, so ist die 𝔚𝔉 vollkommen bestimmt. Schneidet aber C den Kegel (Ba) nach mehreren (z. B. zwei) Punkten, so giebt es durch jeden Punkt von A zwei Erzeugende und A ist eine Doppellinie der Fläche. Will man aber mit den gegebenen Linien A, B, C eine Fläche bestimmen, für welche weder A noch B noch C Doppellinie ist, so dass jedem Punkte von A, B oder C nur eine Erzeugende entspricht, so darf man dies nur aussprechen und noch irgend eine Erzeugende D der Fläche zeichnen, und die Fläche ist bestimmt. Denn hat man z. B. durch den Punkt a der A

diejenige von den beiden durch a möglichen Erzeugenden angegeben, die der Fläche angehören soll, und welche B im Punkte b und C in c schneidet, so wird offenbar dem Nachbarpunkte von a (auch A) die Erzeugende entsprechen, die B nach dem Nachbarpunkte von b und C nach dem Nachbarpunkte von c schneidet. Geht man so stetig vorwärts, so wird man für jeden Punkt einer Schneidlinie die richtige Erzeugende angeben können. — Haben wir ein Planoid (statt eines Konoides) und kennen wir dessen Leitebene (sie sei die zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechte Ebene C_1), so genügen zwei Schneidlinien A, B zu deren Bestimmung.

Zur Bestimmung einer windschiefen Fläche (𝔚𝔉) geben wir demnach in der Regel für ein Konoid drei Schneidlinien A, B, C und bezeichnen es mit 𝔚𝔉 (A, B, C), für ein Planoid zwei Schneidlinien A, B und eine Leitebene C_1 und bezeichnen es mit 𝔚𝔉 (A, B, C_1). Soll ausserdem keine der Schneidlinien Doppellinie sein, so sprechen wir es aus und zeichnen eine Erzeugende.

Anm. Ist die 𝔚𝔉 begrenzt, was praktisch immer der Fall ist, so kann man die Grenzlinien als Schneidlinien ansehen.

260. Ist eine der Schneidlinien einer 𝔚𝔉 gerade, so nennt man die Fläche Keilfläche. Sind in diesem Falle drei Schneidlinien gegeben, so nehmen wir eine Tafel z. B. die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie auf der geraden Schneidlinie senkrecht steht und demnach der zweite Riss von dieser 𝔓 (a_2) ist. Heissen dann die anderen beiden Schneidlinien A, B, so heisst die Fläche: 𝔚𝔉 (A, B, a_2). Sind alle gegebenen Schneidlinien gerade, so ist die Fläche zweiter Ordnung, und sie heisst windschiefes oder einfaches Hyperboloid, wenn sie keine Leitebene, Paraboloid, wenn sie eine solche hat. Ist die eine Schneidlinie eine Schraubenlinie, die andere ihre Axe und eine zu dieser senkrechte Ebene die Leitebene, so heisst die Fläche flache Schraubenfläche; sind aber dieselben zwei Schneidlinien, und statt der Leitebene die Bedingung gegeben, dass alle Erzeugende mit der Axe der Schraubenlinie gleiche Winkel (α) bilden sollen, so heisst die Fläche eine scharfe Schraubenfläche. In diesem Falle begnügen wir uns mit zwei Schneid-

linien für eine 𝔚𝔉 ohne Leitlebene. Steht hier die Axe der Schraubenlinie (A) senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, und ist ihr erster Riss mit a_1 bezeichnet, so bezeichnen wir die Schraubenfläche mit 𝔚𝔉 (A, a_1, α). Ist wieder eine Schraubenlinie als Schneidlinie gegeben, und soll die Erzeugende die Axe der Schraubenlinie kreuzen, und dabei stets denselben Winkel ($\wedge \alpha$) mit ihr bilden und dieselbe Entfernung von ihr haben, so nennt man die Fläche eine windschiefe Schraubenfläche, und wenn $\wedge \alpha = 90$ eine rechtwinkelige windschiefe Schraubenfläche ist.

Anm. Will man von einer der genannten windschiefen Flächen den ersten Umriss erhalten, so kann man die ersten Risse ziemlich nahe aneinander liegender Erzeugenden suchen und eine Curve (aus freier Hand) zeichnen, die alle jene Risse berührt. Da aber dies eine mühsame Zeichnungsoperation ist, so führt man sie nur dann aus, wenn man den Umriss nothwendig braucht. Ausserdem begnügt man sich mit der Zeichnung der zur Bestimmung der Fläche nothwendigen Dinge (Schneidlinien etc.)

261. Die Cylinderfläche bietet uns ihren Eigenschaften zufolge eine sehr einfache Leitende, nemlich irgend eine Gerade, die mit den Erzeugenden der Fläche parallel ist (die Richtung), ausserdem geben wir eine Schneidlinie, am besten das Profil (und wenn die Fläche begrenzt ist, nur die Grenzen A, E.) Dadurch, nemlich durch Schneidlinie und Richtung, ist die Fläche offenbar bestimmt; denn durch jeden Punkt der Schneidlinie ist nur eine Erzeugende möglich, da diese zur Richtung parallel sein muss. Fig. 107.

Wir betrachten daher einen Cylinder als bestimmt, wenn seine Richtung und eine Schneidlinie gegeben sind. Heisst diese A, die Gerade, welche seine Richtung bestimmt, B, so nennen wir die Fläche: ℭ𝔉 (A, B). (Da die Richtung durch eine Gerade gegeben, die Schneidlinie aber krumm ist, so wird man stets erkennen, welches von den Buchstaben A, B die Schneidlinie bedeutet).

Denkt man sich die ersten Risse aller Erzeugenden gezeichnet, so sieht man leicht ein, dass dieselben von den zu B_1 Parallelen C_1, D_1, welche A_1 berühren, eingeschlossen werden.

Ebenso bilden die zu B_2 Parallelen C_2, D_2, welche durch die Endpunkte von A_2 gehen, den zweiten Umriss. Da hienach die Umrisse eines Cylinders so leicht zu zeichnen sind, so pflegt man dieselben anzugeben, und kann dann die Gerade C als Richtung des Cylinders benützen (also B weglassen, was künftig geschehen wird), und den Cylinder mit 𝔆𝔉 (A, C) bezeichnen. Man hüte sich aber, diese 𝔊 (C) für eine Erzeugende der 𝔆𝔉 zu halten. Man kann sich leicht überzeugen, dass sie es nicht ist; denn die Punkte, welche ihre Risse mit denen der Schneidelinie A gemein haben, sind nicht die Risse eines Punktes.

262. Steht ein 𝔆𝔉 senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so ist sein erster Riss eine Linie. Dieser erste Riss der 𝔆𝔉 genügt aber auch zu seiner Bestimmung. Denn durch jeden Punkt dieses ersten Risses ist eine Erzeugende und nur eine einzige bestimmt, da diese Erzeugende $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ ist.

Wir werden daher eine auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechte 𝔆𝔉 dadurch bestimmen, dass wir ihren ersten Riss zeichnen. Heisst dieser A_1, so nennen wir die Fläche: 𝔆𝔉 (A_1). Es ist demnach unter 𝔆𝔉 (A_1) die 𝔆𝔉 zu verstehen, die A_1 zum ersten Riss hat.

Ist der Stralenriss einer 𝔆𝔉 eine Linie (232), so ist durch diesen Stralenriss die Fläche bestimmt, vorausgesetzt, dass die Richtungen der Stralen bekannt sind. Heisst dieser Stralenriss A', so nennen wir die Fläche: 𝔆𝔉 (A').

263. Die besondere Art eines Cylinders wird durch seine Schneidlinie bestimmt. Ist diese eine Ellipse, Parabel etc., so nennt man den Cylinder einen elliptischen, parabolischen etc. Ist die Schneidlinie ein Kegelschnitt, so ist der Cylinder eine Fläche zweiter Ordnung. Es giebt dreierlei Cylinder zweiter Ordnung, nemlich elliptische, parabolische, hyperbolische Cylinder. Kreiscylinder nennt man einen Cylinder nur dann, wenn sein Profil ein Kreis ist.

264. Die Kegelfläche bietet ebenfalls durch ihre Eigenschaften eine einfache Leitende; da wir nemlich wissen, dass alle ihre Erzeugenden durch einen festen Punkt gehen, so liegt es nahe, diesen Punkt als Bestimmungsmittel anzusehen. Ausser ihm geben wir wieder eine ebene Curve auf dem Kegel als

Schneidlinien, und mit diesen beiden Leitenden, nemlich dem Centrum und einer Schneidlinie, ist der Kegel bestimmt.

Wir bestimmen demnach eine Kegelfläche durch ihr Centrum und eine Schneidlinie. Heisst letztere A und ersteres a, so heisst der Kegel: 𝔎𝔉 (Aa).

Denkt man sich wieder die ersten oder zweiten Risse aller Erzeugenden gezeichnet, so wird man sich wieder überzeugen, dass die Umrisse eines Kegels, ebenso wie beim Cylinder Gerade sind, die den entsprechenden Riss der Schneidlinie berühren, oder durch dessen Endpunkte gehen. Ausserdem gehen diese Umrisse durch die entsprechenden Risse des Centrums.

Anm. I. Auch der Kegel ist zweiter Ordnung, wenn seine Schneidlinie zweiter Ordnung ist. Kreiskegel aber soll der Kegel nur dann genannt werden, wenn seine Schneidlinie ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit dem Centrum des Kegels senkrecht steht.

Anm. II. Wendet man Stralen an, die durch das Centrum eines Kegels gehen, und betrachtet man die Ebene seiner Schneidlinie als 𝔗′, so ist sein Stralenriss eine Linie und zwar die Schneidlinie A.

265. Ist eine entwickelbare Fläche weder ein Kegel noch ein Cylinder, so giebt es, wie wir oben gesehen haben, auf der Fläche eine gewundene (unebene) Curve (Grat) an der alle Erzeugenden berühren. Wollen wir eine solche Fläche bestimmen, so können wir den Grat derselben geben, und die Fläche ist damit vollkommen bestimmt. Denn nimmt man auf dem Grat einen Punkt, so muss die diesem Punkte entsprechende Erzeugende den Grat in diesem Punkte berühren, und ist daher (wenn nicht ausnahmsweise der Punkt ein Doppelpunkt ist, in welchem Falle zwei Tangenten vorhanden sind, die beide als Erzeugende gelten) vollkommen bestimmt.

Eine entwickelbare Fläche ist daher durch ihren Grat vollkommen bestimmt; heisst dieser A, so nennen wir die Fläche: Gratlfläche (A).

Ist der Grat eine Schraubenlinie, so nennt man die Fläche: entwickelbare Schraubenfläche.

Anm. Da der Grat A von allen Erzeugenden berührt wird, so wird A_1 von allen ersten Rissen der Erzeugenden be-

rührt. Weil aber, wie oben nachgewiesen, die Berührungslinie aller ersten Risse einer Fläche den ersten Umriss bildet, so sieht man, dass der erste Riss des Grates den ersten, sein zweiter Riss den zweiten Umriss bildet, und dass der Grat selbst das erste und zweite Profil der Gratfläche ist. Ist die Fläche begrenzt, gewöhnlich von zwei Linien, so muss man diese Grenzen zeichnen.

Fig. 108. 266. Kennt man den Grat der entwickelbaren Fläche nicht, so ergeben sich als Mittel zur Bestimmung der Fläche Schneidlinien derselben und der Leitkegel der entwickelbaren Fläche (250. Anm. 2).

Giebt man zur Bestimmung der Fläche Schneidlinien (und zwar als solche ebene Curven, und wenn die Fläche begrenzt ist, die Grenzlinien), so genügen zwei derselben. Denn nennen wir diese beiden Curven A und B, nehmen auf A einen Punkt a an, und suchen die durch a gehende Erzeugende, welche B in b schneidet; bezeichnen wir ferner den Nachbarpunkt von a auf A mit c und den von b auf B mit d, so müssen die beiden benachbarten Erzeugenden ab und cd (als einer entwickelbaren Fläche angehörig) in einer Ebene liegen. Demnach befinden sich auch die Geraden ac und bd (d. h. die Tangente von A in a und von B in b) in einer Ebene. Sie schneiden sich also, und zwar im Schnitte ihrer beiden Ebenen. Es folgt daraus:

> Sind A und B zwei ebene Curven, welche Schneidlinien einer entwickelbaren Fläche sind, und sucht man für einen Punkt a von A die entsprechende Erzeugende, so zieht man in a eine Tangente an A, sucht den Punkt c, wo sie den Schnitt der beiden Ebenen der Schneidlinien trifft, und zieht von c an B eine Tangente, so ist deren Berührungspunkt b ein zweiter Punkt der verlangten Erzeugenden.

Will man dass die Erzeugende eindeutig bestimmt sein soll, obgleich es mehrere Berührungspunkte b giebt, so darf man diejenige Erzeugende durch a zeichnen, welche man haben will, und weiss dann, dass die Erzeugenden, welche durch die Folgepunkte von a gehen, auch durch die entsprechenden Folge-

punkte von b geführt werden müssen; so ist durch die eine Erzeugende jede andere eindeutig bestimmt.

Demnach können wir, wenn wir eine allgemeine Erzeugende zeichnen, eine entwickelbare Fläche durch zwei Schneidlinien bestimmen. Heissen diese A und B, so nennen wir die Fläche: entwickelbare Fläche (A, B).

Anm. Zeichnen wir viele naheliegende Erzeugende, und eine Curve C_1, welche deren erste Risse, dann eine C_2, die ihre zweiten Risse berührt, so erhalten wir den ersten und zweiten Umriss, und ist (nach der Anm. zu 265) die Curve C der Grat der entwickelbaren Fläche. Da aber die Aufsuchung von C_1 und C_2 umständliche Zeichnungsoperationen veranlassen, so unterlassen wir diese Operationen, so lange sie nicht besonders verlangt werden.

Zur graphischen Bestimmung einer solchen entwickelbaren Fläche (A, B) wählt man das Tafelsystem am besten so, dass eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_1$ die Curve A enthält, und dass die Ebene der B auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, wie in unserer Zeichnung (Fig. 108). Soll dann eine Erzeugende gezeichnet werden, so nimmt man auf der Schnittlinie der beiden Curvenebenen einen Punkt a an, zieht von ihm aus aus Tangenten (C, D) an die Curven, und verbindet ihre Berührungspunkte b, c durch eine Gerade, so ist dies eine Erzeugende.

Ist die $\mathfrak{E}$ $(B_2) \parallel \mathfrak{T}_1$, so laufen die Tangenten B und C parallel.

267. Wenn man durch einen Punkt im Raume zu allen Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche (A, B) Parallele legt, wodurch man den Leitkegel enthält, so kann es unter Umständen vorkommen, dass dieser Kegel ein Kreiskegel (s. 264. Anm.) wird. Weiss man dies voraus und kennt man den $\wedge\alpha$, den die Erzeugenden des Kegels mit seiner Axe bilden, so braucht man ausserdem nur noch eine Schneidlinie. In diesem Falle nehmen wir die Tafeln so an, dass die $\mathfrak{T}_1$ auf der Axe des Kegels und die $\mathfrak{T}_2$ zur Ebene der gegebenen Schneidlinie B (die Linie A denke man sich nicht vorhanden) senkrecht steht (wie in Fig. 108). In diesem Falle steht $b_1c_1 \perp D_1$ und ist b_1c_1 die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete mit der Hypotenuse den $\wedge\alpha$ bildet, und gleich dem ersten Abstand des Fig. 108.

Punktes b ist. Man kann demnach eine beliebige Erzeugende dieser Fläche finden, indem man auf B einen Punkt b annimmt, mittelst der durch ihn gelegten Tangente (C) an B den Punkt a sucht, und, von diesem aus, an einen aus b_1 mit der obengenannten Kathete beschriebenen Kreis eine Tangente (und zwar diejenige von den beiden möglichen Tangenten, die man haben will) zieht, so erhält man den Punkt c, dessen Verbindung mit b die Erzeugende giebt.

Wir wollen eine solche entwickelbare Fläche (deren Leitkegel ein Kreiskegel ist) entwickelbare Fläche (A, α) heissen, wo A die Schneidlinie und α den Winkel einer jeden Erzeugenden mit dem ersten Loth bedeutet.

Anm. Diese entwickelbare Fläche stimmt offenbar mit derjenigen überein, die wir oben (250. Anm. 1) Böschungsfläche genannt haben.

Fig. 109. 268. Zur Bestimmung einer Drehungsfläche (abgekürzt 𝔇𝔉) bietet sich uns eine sehr einfache Leitende an, nemlich die Axe derselben (auf welcher die Mittelpunkte aller Parallelkreise liegen). Ausser dieser benützen wir noch eine Schneidlinie (es wird sich zeigen, dass eine solche ausreicht). Es ist daher zunächst zu untersuchen, welche Linie auf einer 𝔇𝔉 sicher als Schneidlinie angesehen werden kann. Offenbar aber kann jeder Meridian als solche angesehen werden; denn wenn wir eine Ebene annehmen, welche die Axe enthält (eine Meridianebene), so schneidet sie jeden Parallelkreis nach zwei Punkten, und diese sämmtlichen Punkte bilden den Meridian. Es hat also mit jedem Parallelkreis der Meridian zwei, der Halbmeridian einen Punkt gemein, und kann demnach jeder Halbmeridian als Schneidlinie angesehen werden. Dass aber die Axe und ein Halbmeridian zur Bestimmung der Fläche genügen, ist leicht zu erweisen. Denn nimmt auf dem Halbmeridian einen Punkt a und sucht die entsprechende Erzeugende, indem man durch a eine Ebene senkrecht zur Axe legt, welche diese in einem Punkte b schneidet, so ist b der Mittelpunkt des erzeugenden Parallelkreises, $\overline{ba}$ sein Halbmesser, und der Parallelkreis daher bestimmt. — Zur Ausführung der Zeichnung nehmen wir das Tafelsystem so an, dass die Axe auf der $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) senkrecht steht, und die $\mathfrak{T}_2$

(oder $\mathfrak{T}_1$) mit der Ebene des gegebenen Halbmeridians parallel ist; wir nennen dann den in dieser (zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen) Ebene liegenden Meridian den **Hauptmeridian**.

Wir bestimmen also ein $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ dadurch, dass wir den Hauptmeridian oder seine Hälfte und die Flächenaxe zeichnen. Bezeichnen wir dann diesen Meridian (oder den Halbmeridian) mit A, und die Axe mit a_1, so heisst die Fläche: $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1).

Anm. Liegt der Hauptmeridian A in einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene, so sind die ersten Risse aller Parallelkreise Kreise mit dem Mittelpunkt a_1, die zweiten Risse derselben Gerade parallel $\mathfrak{R}_2$. Denkt man sich alle ersten Risse der Parallelkreise gezeichnet, so sieht man, dass dieselben von den ersten Rissen des grössten oder kleinsten oder des grössten **und** kleinsten Kreises eingeschlossen sind. Denken wir uns an den Hauptmeridian eine Tangente parallel zur Axe (a_1) gelegt, so entspricht dem Berührungspunkte derselben ein Parallelkreis, den wir **Aequator** nennen. — In unserer Zeichnung (Fig. 109) giebt es **drei** solche Aequatoren, die den Punkten b, c, d (die ersten Risse dieser Punkte, welche offenbar in A_1 liegen, haben wir in der Zeichnung weggelassen) entsprechen. Man wird leicht einsehen, dass die ersten Risse dieser Aequatoren den (theils reelen, theils virtuellen) ersten Umriss bilden, und demnach die Aquatoren selbst das erste Profil der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ vorstellen (s. 233). Zieht man aber an dem Halbmeridian A Tangenten parallel $\mathfrak{R}$, so entsprechen ihren Berührungspunkten Parallelkreise (zuweilen mit dem Halbmesser = o), die wir **Polarkreise** oder, wenn ihr Halbmesser = o ist, **Pole** nennen. — In unserer Zeichnung entsprechen den Punkten e, f, g **Polarkreise**, und sind die Punkte h, i **Pole**. — Man sieht leicht, dass der zweite Umriss unserer $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ gebildet wird theils von A_2, theils von den zweiten Rissen der Polarkreise, dass also das zweite Profil der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ gebildet wird theils vom Hauptmeridian, theils von den Polarkreisen.

Will man also den ersten Umriss einer $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ zeichnen, so zeichnet man die ersten Risse aller Aequatoren; will man die zweiten Umrisse darstellen, so zeichnet man ausser (dem ohnehin gezeichneten) **A_2 die zweiten Risse aller Polarkreise.**

NB. Wir haben in unserer Zeichnung die rechte Hälfte der zweiten Umrisse (die virtuellen gestrichelt) gezeichnet. Im ersten Riss musste von den ersten Umrissen der dem Punkte c entsprechende gestrichelt, die übrigen mit zusammenhängenden Strichen ausgezogen werden.

269. Ist die Schneidlinie einer 𝔇𝔉 eine Gerade, die senkrecht zur Axe ist, so ist die 𝔇𝔉 eine auf der Axe senkrechte Ebene; ist sie eine Gerade, die parallel ist zur Axe, so ist diese Fläche zugleich ein Cylinder, der den Namen Drehungscylinder oder Kreiscylinder führt; ist sie eine Gerade, die die Axe schneidet, so nennt man die Fläche Drehungskegel oder Kreiskegel; ist sie eine Gerade, welche die Axe kreuzt, so heisst die Fläche einmanteliges oder einfaches Drehungshyperboloid, und diese ist gleichartig mit einer 𝔇𝔉, die zum Meridian eine Hyperbel hat, deren immaginäre Axe die Drehungsaxe ist. Ist der Meridian eine Ellipse, deren (grosse oder kleine) Axe die Drehungsaxe ist, so hat man ein Drehungsellipsoid (ist von diesem die Hauptaxe der Ellipse Drehungsaxe, so hat die Fläche zwei Brennpunkte, ist es die Nebenaxe, so hat die Fläche einen Brennkreis oder Focalkreis); ist er eine Parabel, deren Axe mit der der 𝔇𝔉 zusammenfällt, so nennt man die Fläche Drehungsparaboloid; ist er eine Hyperbel, deren reele Axe die Drehungsaxe ist, so erhält man das zweimantelige oder doppelte Drehungshyperbeloid (diese Fläche besteht nemlich, wie leicht einzusehen ist, aus zwei unter sich nicht zusammenhängenden Theilen (Mänteln), von denen jeder einen Ast derjenigen Hyperbel enthält, die als Meridian gegeben war). Sämmtliche eben aufgezählte Flächen sind zweiter Ordnung. Ist der Halbmeridian eine Kreislinie, so heisst die Fläche eine Wulst (Torus).

Ist der Meridian eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Drehungsaxe liegt, also zugleich Mittelpunkt der Fläche ist, so heisst die Fläche eine Kugelfläche. Diese Fläche, welche auch zweiter Ordnung ist, hat vor allen anderen 𝔇𝔉 die Eigenschaft voraus, dass jede durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade als Drehungsaxe betrachtet werden kann, dass sie also unzählige Axen hat, während jede andere 𝔇𝔉 nur eine solche besitzt. Zur Bestimmung der Kugel ist

es genügend, wenn ihr Mittelpunkt a und die Länge α ihres Halbmessers gegeben sind. Eine so bestimmte Kugel nennen wir dann Kugel (a, α).

NB. Aehnlich wie bei der Kreislinie verstehen wir unter Halbmesser der Kugel die Entfernung ihres Centrums von einem Punkte ihrer Oberfläche, während wir unter ihrem Radius (Strahl) jede Gerade verstehen, die durch ihr Centrum geht, ohne Rücksicht auf ihre Grenzpunkte.

270. Zur Bestimmung einer Röhrenfläche ist es offenbar genügend, wenn wir ihre Mittellinie (so nennen wir hier, wie schon früher angegeben, die Linie, welche von dem Mittelpunkt des erzeugenden Kreises durchlaufen wird) und den Halbmesser α des erzeugenden Kreises geben. Bezeichnet man die Mittellinie mit A, so nennen wir die Fläche Röhrenfläche (A, α).

> Wir vertehen also unter Röhrenfläche (A, α) diejenige Röhrenfläche, deren Mittellinie A ist, und deren erzeugender Kreis (oder erzeugende Kugel) den Halbmesser α hat.

Ist A_1 der erste Riss der Leitlinie, und denken wir uns die ersten Risse aller erzeugenden Kugeln, indem wir aus allen Punkten von A_1 (in der $\mathfrak{T}_1$) Kreise mit dem Halbmesser α zeichnen, so ist die Curve, die alle diese Kreise berührt, der erste Umriss. Dieser ist aber offenbar eine Parallele zu A_1. Wir sehen demnach:

> der erste Umriss einer Röhrenfläche (A, α) ist eine Parallele zu A_1 in der Entfernung α.

Anm. Ist A gerade, so erhalten wir den Kreiscylinder; ist A eine Kreislinie den Wulst; ist aber A eine Schraubenlinie so nennt man die Fläche eine Serpentine.

271. Zur Bestimmung von Ovalflächen werden wir immer die eine Tafel, etwa die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu ihrer Axe und die $\mathfrak{T}_2$ parallel zu einer Hauptebene annehmen. Dann zeichnen wir den Hauptmeridian dieser Hauptebene (dessen erster Riss eine zur $\mathfrak{R}_1$ parallele Gerade, und dessen zweiter Riss mit dem Hauptmeridian selbst gleiche Gestalt hat) und zugleich, wie bei den $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$, diejenige Axe des Hauptmeridians, welche zugleich Axe der Ovalfläche ist. Geben wir ausserdem noch das Axenverhältniss der Parallelellipsen dadurch an, dass wir zwei Längen,

α und β, zeichnen, deren Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich dem anzugebenden Axenverhältniss ist, und zwar so, dass der Zähler (α) der mit der $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ellipsenaxe entspricht, so kann man sich leicht in ähnlicher Weise, wie bei den $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$, überzeugen, dass die Ovalfläche bestimmt ist.

Heisst der gegebene (zur $\mathfrak{T}_2$ parallele) Hauptmeridian A, das Axenverhältniss der Parallelellipsen (in oben angegebenem Sinne) $\frac{\alpha}{\beta}$, so nennen wir die dadurch bestimmte Fläche: $\mathfrak{O}\mathfrak{F}$ $\left(A, a_1, \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Es ist leicht einzusehen, dass es sich mit dem zweiten Umriss und Profil einer so gegebenen $\mathfrak{O}\mathfrak{F}$ wie mit der einer $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ verhält, dass dagegen der erste Umriss aus Ellipsen, statt Kreisen, besteht, im Uebrigen aber mit dem bei den $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ Gesagten übereinstimmt. Zeichnet man den ersten Umriss, so erhält man zugleich das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$.

Anm. Ist der Hauptmeridian einer $\mathfrak{O}\mathfrak{F}$ einer Linie zweiter Ordnung, deren Axe also die Axe der $\mathfrak{O}\mathfrak{F}$ ist, oder besteht er aus zwei parallelen oder sich schneidenden Geraden, so ist die Fläche zweiter Ordnung.

Fig. 110. 272. Hat man eine Schraubenfläche zu bestimmen, deren Erzeugende also (254) eine Schraubenlinie von konstanter Ganghöhe, Windungsrichtung und Axe ist, so nimmt man die Tafeln so an, dass eine derselben, z. B. die $\mathfrak{T}_1$ auf der konstanten Axe senkrecht steht, so dass der erste Riss dieser Axe ein Punkt a_1 wird. Ferner giebt man die Ganghöhe der Länge und dem Vorzeichen nach ($+h$, oder $-h$), indem man festsetzt, dass dieses Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem die Schraubenlinie eine rechte oder linke ist. Da man nun offenbar durch einen beliebigen Punkt im Raume nur eine einzige Schraubenlinie von gegebener Ganghöhe, Richtung und Axe legen kann, so brauchen wir zur Bestimmung der Schraubenfläche nur noch eine Schneidlinie. Es fragt sich also, welche Linie auf einer Schraubenfläche ist sicher Schneidlinie derselben. Nun sind nach

unserer Annahme der Tafeln die ersten Risse aller Schraubenlinien unserer Fläche Kreise, die in a_1 ihren Mittelpunkt haben; demnach wird eine Ebene A_1, deren erster Riss durch a_1 geht (also die ersten Risse aller Schraubenlinien schneidet) jede Schraubenlinie schneiden, (und zwar in unendlich vielen Punkten). Es ist demnach der Schnitt der Schraubenfläche mit einer Meridianebene derselben, d. i. ein Meridian, sicher eine Schneidlinie der Schraubenfläche. Unter allen Meridianen der Schraubenfläche ist aber der bequemste derjenige, welcher in einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene liegt, und den wir den Hauptmeridian nennen wollen.

Wir geben demnach in der Regel zur Bestimmung einer Schraubenfläche den Hauptmeridian A (Fig. 110) die Axe a_1 und die Ganghöhe mit ihrem Vorzeichen (hier $+h$). Ausnahmsweise giebt man eine die Axe kreuzende Gerade A für die entwickelbare oder windschiefe Schraubenfläche (s. 260) oder einen Kreis A der zu einer durch seinen Mittelpunkt gehenden Schraubenlinie (von der gegebenen Ganghöhe und Axe) normal steht.

In allen diesen Fällen nennt man die Fläche: Schraubenfläche (A_1, a_1, $+h$)

Anm. 1. Denkt man sich durch irgend einen Punkt b der Curve A eine erzeugende Schraubenlinie gelegt, so schneidet diese die Meridianebene A_1 nach unzähligen Punkten b, c, d etc., die theils rechts, theils links vom zweiten Riss der Axe liegen. Die Punkte links liegen in einem ersten Lothe (b_1) und je zwei nächstliegende, wie b und c sind um eine Ganghöhe entfernt; dasselbe gilt von den Punkten rechts. Es sind aber noch die Punkte links und rechts gleichweit von der Axe entfernt, und liegt jeder Punkt rechts (z. B. d) um eine halbe Ganghöhe höher als der zunächst unter ihm liegende (b) links. Da diese Bemerkungen für alle erzeugenden Schraubenlinien gelten, so sieht man,

dass die Schraubenfläche und ihre Meridianebene sich nach unendlich vielen Curven A schneiden, die alle erhalten werden, wenn man links die A um je eine Ganghöhe aufwärts oder abwärts verschiebt; ferner rechts eine zu A symmetrische

Curve um eine halbe Ganghöhe aufwärts schiebt, und diese Curve von dieser Stellung aus rechts ebenso wie die A links behandelt.

Da also der ganze Schnitt der Schraubenfläche mit der Hauptmeridianebene, d. i. der Hauptmeridian der Schraubenfläche aus einer Unzahl von kongruenten Curven besteht, deren gegenseitige Stellungen man im Voraus kennt, so genügt es (wie in unserer Figur) nur eine dieser Curven (hier A) zu zeichnen. Wir wollen diese eine Curve die Schablone der Schraubenfläche heissen.

Anm. 2. Besondere Schraubenflächen sind: die scharfe, die flache, die entwickelbare, die windschiefe Schraubenfläche und die Serpentine (s. 260. 265. 270). Dass diese Flächen Schraubenflächen sind, wird sich später klar herausstellen.

Fig. 110. 273. Da die ersten Risse aller Schraubenlinien der Schraubenfläche (A, a_1, $+h$) Kreise mit dem Mittelpunkte a_1 sind, so ist der erste Umriss der Fläche leicht zu zeichnen, da er aus lauter Kreisen besteht (hier aus zwei Kreisen). Die Auffindung dieser Kreise stimmt ganz mit der des ersten Umrisses einer Drehfläche (268) überein. Dagegen ist es sehr mühsam, den zweiten Umriss aufzusuchen; man kann dies demnach unterlassen.

Fig. 111. 274. Soll eine Simsfläche gezeichnet werden (255), so nimmt man die eine Tafel, etwa die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie mit der Ebene der gegebenen Direktrix A parallel ist, die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie mit einer Axe der Curve A parallel ist. Ausser der Curve A zeichnen wir noch eine Erzeugende B und zwar diejenige, deren Ebene parallel $\mathfrak{T}_2$, deren erster Riss (B_1) also eine zur $\mathfrak{K}_1$ parallele und zu A normale Gerade ist. Hat, wie hier, die Erzeugende einen Mittelpunkt, so nehmen wir die Direktrix durch diesen Mittelpunkt gehend an und heissen sie die Mittellinie der Simsfläche. Hat noch die Mittellinie A einen Mittelpunkt a, so nennen wir diesen den Mittelpunkt und die durch ihn gehende zur Ebene der A senkrechte Gerade (a_1) die Axe der Fläche. Es ist leicht nachzuweisen, dass durch die gegebenen Dinge, nemlich die Direktrix A und die erzeugende B, die Simsfläche bestimmt ist. Denn nimmt man auf der Fläche einen Punkt b dadurch an, dass man sich eine beliebige Erzeugende C giebt

[von dieser ist der erste Riss (C_1) eine Normale zu A_1 in einem Punkte c_1; betrachtet man noch die Ebene (C_1) als $\mathfrak{T}_3$ und klappt sie so um, dass C_3 auf B_2 und c auf c_2 fällt, so erhält man b_3 als dritten Riss des Punktes b auf der Fläche] und darauf einen Punkt b (von welchem also der erste und dritte Riss gegeben sind) annimmt, so sieht man, dass durch b in der Regel nur eine Erzeugende geht. Denn von einer zweiten Erzeugenden müsste der erste Riss eine andere Normale (D_1) zu A_1 sein, und müsste noch ausserdem $\overline{b_1 d_1} = \overline{b_1 c_1}$ sein, wenn b_3 auch der Erzeugenden D entsprechen sollte. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall; wohl aber möglicherweise in dem besonderen Falle, wo b_1 auf $\mathfrak{K}_1$ läge, und daher b ein Doppelpunkt wäre.

Man sieht also, dass im Allgemeinen durch einen Punkt einer Simsfläche nur eine Erzeugende möglich ist, und dass dieselbe durch die Risse der Direktrix A und einer Erzeugenden B vollkommen bestimmt ist. Wir nennen dann diese Fläche: Simsfläche (A, B).

NB. Welche von den beiden Linien A, B Direktrix oder Erzeugende ist, geht leicht aus der Zeichnung hervor, besonders auch dadurch, dass die Direktrix A als Hilfslinie charakterisirt werden muss, wie in unserer Zeichnung.

Anm. Man wird sich leicht überzeugen, dass der erste Umriss unserer Fläche aus Parallelen zu A_1 besteht, die durch die Endpunkte des ersten Risses der Erzeugenden B gehen; dass ferner der zweite Umriss gebildet wird, theils von den zweiten Rissen der zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Erzeugenden, theils durch Tangenten an diesen zweiten Rissen, die parallel $\mathfrak{K}_2$ sind.

275. Die sämmtlichen Flächen zweiter Ordnung sind schon, und zwar in den verschiedenen Flächengruppen zerstreut, aufgeführt worden. Hier wollen wir dieselben noch einmal zusammengestellt aufführen, und von einer derselben noch eine neue Darstellungsweise anführen. Die Flächen zweiter Ordnung sind, ausser dem Cylinder und Kegel zweiter Ordnung, über die wir nichts mehr zu sagen haben, folgende: Fig. 112.

1) das Ellipsoid,
2) das einfache (einmantelige) Hyperboloid,
3) das zweifache (zweimantelige) Hyperboloid,

4) das elliptische Paraboloid,

5) das hyperbolische (windschiefe) Paraboloid.

Die ersten vier lassen sich am klarsten als Ovalflächen (in besonderen Fällen als Drehflächen) darstellen, wenn man ausser dem Axenverhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ der erzeugenden Ellipse den Hauptmeridian nebst der in seiner Ebene liegenden Flächenaxe zeichnet, am Besten so, dass letztere senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ steht, und dass ersterer $\parallel \mathfrak{T}_2$ ist. Für das Ellipsoid ist der Hauptmeridian eine Ellipse, deren eine Axe die Flächenaxe vorstellt; für das einfache und doppelte Hyperboloid ist der Hauptmeridian eine Hyperbel; für ersteres ist die Nebenaxe, für letzteres die Hauptaxe der Hyperbel die Flächenaxe; für das elliptische Paraboloid ist der Hauptmeridian eine Parabel, deren Axe die Flächenaxe ist.

Das hyperbolische Paraboloid lässt sich in folgender Art am klarsten bestimmen.

Zeichnet man eine Parabel A (Fig. 112) in einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene (A_1) so, dass ihre Axe parallel zu $\mathfrak{K}$ ist; ferner eine zweite Parabel B in einer zur $\mathfrak{T}_1$ parallelen Ebene (B_2) so, dass ihre Axe $\parallel \mathfrak{K}$, und der Axe von A entgegengesetzt ist, und dass ihr Scheitel a mit dem von A zusammenfällt, so ist durch A, B das Paraboloid bestimmt, wenn man voraussetzt, dass sich B als Erzeugende der Fläche so bewegt, dass ihre Ebene und Axe sich parallel fortschieben, und ihr Scheitel auf A bleibt. Durch diese Erzeugungsart unseres Paraboloids (A, B) wird man eine klare Vorstellung von seiner ganzen Gestalt haben und zugleich einsehen, dass A_2 der zweite und B_1 der erste Umriss ist.

§. 18.

Eigenschaften der verschiedenen Flächengruppen.

276. Legt man durch eine Erzeugende eines Cylinders eine Ebene, so wird diese von keiner Erzeugenden des Cylinders geschnitten; die Ebene kann daher nur Erzeugende mit dem Cylinder gemein haben. Dies gilt auch für den Kegel, für den die Ebene von allen Erzeugenden in einem Punkte geschnitten wird. Legt man aber durch eine Erzeugende A einer entwickelbaren Gratfläche eine Ebene ($\mathfrak{E}$), so wird diese von den der A benach-

barten Erzeugenden B und C nach zwei benachbarten Punkten b, c geschnitten; 𝔈 wird aber auch, einzelne Ausnahmen abgerechnet, von allen übrigen Erzeugenden in endlicher Entfernung geschnitten; denn die Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche, welche nicht parallel laufen, können nicht parallel einer Ebene sein, weil sie sonst entweder sich kreuzten, oder eine Ebene bildeten. Es können aber auch die Schnittpunkte der 𝔈 mit den Erzeugenden der entwickelbaren Fläche nicht alle in A fallen, weil sie sonst, da jede die folgende schneiden muss, eine Ebene bilden müssten. Demnach wird 𝔈 von den Erzeugenden der Fläche nach einer Curve D geschnitten, die mit A zwei Nachbarpunkte gemein hat, d. h. A berührt. In 𝔈 können aber ausser A noch einzelne Erzeugende liegen, die aber D ebenfalls berühren müssen. Es folgen also die Sätze:

1) die Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche können nicht parallel einer Ebene sein, wenn sie nicht selbst zu einander parallel sind. Legt man daher durch einen Punkt zu den Erzeugenden Parallele, so bilden sie, wenn sie nicht zusammenfallen, einen Kegel (Leitkegel).
2) Legt man durch eine Erzeugende A einer entwickelbaren Fläche eine Ebene 𝔈, so kann diese noch andere Erzeugende der Fläche enthalten, ausserdem hat 𝔈 mit einem Cylinder nichts gemein; vom Kegel enthält 𝔈 das Centrum; mit einer Gratfläche hat 𝔈 eine Curve gemein, die von A und jeder in 𝔈 liegenden Erzeugenden berührt wird.

277. Wenn eine Ebene eine entwickelbare Fläche nach einem Punkte a berührt, so hat sie mit ihr auch den Punkt b gemein, der a benachbart ist, und welcher der durch a gehenden Erzeugenden angehört; demnach liegt A in 𝔈. Die Ebene 𝔈 enthält aber auch jeden ausser A liegenden Punkt c der Fläche, der a benachbart ist. Zieht man nun durch c eine Erzeugende B der Fläche, so liegt auch diese in 𝔈, da B bekanntlich A schneiden muss, aber auch durch den Punkt c der 𝔈 geht. Es hat also 𝔈 mit der entwickelbaren Fläche die durch a gehende Erzeugende A und ihre Nachbarin B gemein, d. h. 𝔈 berührt die Fläche nach der Erzeugenden A (s. 240 und 241).

Ist die Fläche ein Cylinder, so ist 𝔈, weil sie A **enthält**, mit allen Erzeugenden des Cylinders parallel; ist sie ein Kegel, so enthält 𝔈 dessen Centrum; ist aber die Fläche eine Gratfläche, so hat 𝔈 mit dem Grat drei Folgepunkte m, n, p gemein, da A mit dem Grat zwei Nachbarpunkte m, n und B mit demselben die Nachbarpunkte n, p gemein hat. Demnach ist 𝔈 eine Krümmungsebene des Grats in dem Punkte, wo er von A berührt wird. Wir haben also die Sätze:

1) Sobald eine Ebene eine entwickelbare Fläche in einem Punkte a berührt, dann berührt sie dieselbe auch nach der ganzen durch a gehenden Erzeugenden.
2) Eine Tangentialebene eines Cylinders ist mit dessen Richtung parallel; eine Tangentialebene eines Kegels enthält sein Centrum; eine Tangentialebene einer Gratfläche ist Krümmungsebene des Grats.

Anm. Errichtet man in allen Punkten einer Erzeugenden A einer entwickelbaren Fläche senkrechte zu der der A entsprechenden Tangentialebene, so **bilden diese Senkrechten eine Ebene**, welche man, da sie Normalen der Fläche enthält, die **Normalebene für A** nennt.

Fig. 113. 278. Sind A und B zwei in parallelen Ebenen (A_2 und B_2) liegende Schneidlinien einer entwickelbaren Gratfläche, und sind ab, cd zwei Erzeugende so gelegen, dass die Bögen $\widehat{ac}$, $\widehat{bd}$ unendlich klein sind, so schneiden sich diese Erzeugenden in einem Punkte m des Grats. Denkt man sich nun die den Bögen $\widehat{ac}$, $\widehat{bd}$ entsprechenden Krümmungskreise C, D der Curven A, B, und betrachtet C als Schneidlinie, m als Centrum eines Kegels (der mit der entwickelbaren Fläche zwei benachbarte Elemente gemein hat, und daher **Schmiegungs-** oder oskulirender **Kegel** genannt wird), so schneidet die Ebene B_2 den Kegel nach dem Kreise D, so dass m auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von C und D, ausserdem aber auf ab liegt. Man sieht hieraus:

Wird eine Gratfläche von zwei parallelen Ebenen (A_2, B_2) nach den Curven A, B geschnitten, und zeichnet man eine Erzeugende (ab) der Fläche, (die mit A, B die Punkte a, b gemein hat), so enthält

die Verbindungslinie der den Punkten a, b entsprechenden Krümmungsmittelpunkte von A, B einen Punkt m des Grats, welcher Punkt ausserdem auf ab liegt.

279. Es sei A der Grat einer entwickelbaren Fläche und die $\mathfrak{T}_1$ so angenommen, dass sie die Krümmungsebene des Grats im Punkte a, also auch die Tangentialebene der Fläche für diesen Punkt ist (s. 277). Nimmt man nun eine Ebene B_1 so an, dass B_1 in a_1 normal zu A_1 steht, und sucht in a die Tangente der Curve B, nach welcher die Ebene B_1 die Gratfläche schneidet, so liegt diese Tangente in der dem Punkte a entsprechenden Tangentialebene der Fläche, also in der $\mathfrak{T}_1$, und in $\mathfrak{E}$ (B_1), sie ist also die Gerade B_1. Demnach ist die in der $\mathfrak{E}$ (B_1) liegende Normale der Curve B für den Punkt a die Gerade a_1. Ist also a kein besonderer Punkt von a, sondern ein allgemeiner Punkt der Curve, und sucht man die dem Punkte a benachbarten Punkte von B, so kann man schon aus ihren ersten Rissen sich überzeugen, dass diese Nachbarpunkte auf einer Seite der Normale a_1 liegen. Es ist also a ein Grat der Curve B. Man sieht daher: Fig. 114.

Schneidet man eine Gratfläche durch eine zum Grat normale Ebene, so erhält man eine Curve, die einen Grat hat, der im Grat der Fläche liegt. Daher der Name Grat der Fläche.

280. Legt man durch eine Erzeugende A einer windschiefen Fläche ($\mathfrak{W}\mathfrak{F}$) eine Ebene $\mathfrak{E}$, so wird diese von den übrigen Erzeugenden nach einer Linie B geschnitten (die, wenn $\mathfrak{W}\mathfrak{F}$ eine Leitebene hat, und $\mathfrak{E}$ damit parallel ist, in's Unendliche fällt, d. h. gar nicht existirt). Die Linien B und A werden sich gewöhnlich in einem Punkte a schneiden. Denn würden sie sich berühren, d. h. zwei unendlich nahe Punkte a, b mit einander gemein haben, so würden sich in diesen Punkten die der A benachbarten Erzeugenden B, C mit A schneiden, was ja bei windschiefen Flächen im Allgemeinen nicht der Fall ist (wohl aber in besonderen Fällen, für die Kante (s. 248) der Fläche). Legt man nun in a (dem Schnittpunkt von A und B) an B eine Tangente, die also ebenfalls in $\mathfrak{E}$ sich befindet, so sieht man, dass $\mathfrak{E}$ mit der dem a entsprechende Tangential-

ebene zusammenfällt. Denn um diese zu erhalten, muss man (s. 242) durch a zwei Tangenten der Fläche (d. h. Tangenten an Linien der Fläche und solche sind A und die Tangente an B im Punkte a) und durch diese Tangenten eine Ebene legen. Hieraus folgt:

1) Jede Ebene, die eine Erzeugende einer windschiefen Fläche enthält, ist in der Regel eine Tangentialebene und enthält ausser der Erzeugenden noch eine Schneidlinie der Fläche (die unter Umständen in's Unendliche fällt);

2) der Berührungspunkt der Tangentialebene einer windschiefen Fläche ist da, wo die in ihr liegende Erzeugende und Schneidlinie einander schneiden. Erfolgt der Schnitt in unendlicher Ferne, was auch stets der Fall ist, wenn die Schneidlinie selbst in's Unendliche fällt, so wird die Ebene **Asymptotenebene.**

Anm. Demnach ist jede Ebene, welche eine Erzeugende eines Planoids (249) enthält und parallel zu dessen Leitebene ist, eine Asymptotenebene dieser Fläche.

Sind für ein windschiefes Hyperboloid die beiden in einer Tangentialebene desselben liegenden Geraden A, B parallel, so ist die Ebene wieder Asymptotenebene. Nimmt man nun einen beliebigen Punkt an, und legt durch denselben zu allen Erzeugenden des Hyperboloids Parallele, wodurch man dessen Leitkegel erhält, so werden die Erzeugenden dieses Kegels, welche mit A und B parallel sind, zusammenfallen, oder unendlich nahe aneinanderliegen und eine durch diese gelegte Ebene den Kegel berühren. Man sieht also:

3) Legt man durch eine Erzeugende eines windschiefen Hyperboloids eine Ebene parallel zur entsprechenden Tangentialebene des Leitkegels, so erhält man eine Asymptotenebene.

Hat man aber irgend ein Konoid (249) und auf ihm eine Erzeugende A, und nimmt man ein Hyperboloid an, welches das Konoid nach A berührt (d. h. ausser A noch die benachbarte Erzeugende B mit dem Konoid gemein hat), und zieht man durch einen Punkt Parallele zu beiden windschiefen Flächen,

so werden die so erhaltenen Leitkegel dieser Flächen zwei benachbarte Erzeugende gemein haben, d. h. sich nach einer zu A parallelen Erzeugenden (C) berühren. Legt man nun durch A eine Ebene, welche mit einer Tangentialebene des Leitkegels des Hyperboloids (also auch des Konoids) nach der Geraden C parallel ist, so ist sie eine Asymptotenebene des Hyperboloids, also auch des Konoids. Man hat daher den Satz:

4) Legt man durch eine Erzeugende eines Konoids eine Ebene parallel zur entsprechenden Tangentialebene des Leitkegels, so erhält man eine Asymptotenebene.

281. Ist eine windschiefe Fläche von der zweiter Ordnung, und legt man wieder durch eine Erzeugende A derselben eine Ebene, welche die Fläche nach einer Schneidlinie B schneidet, so muss B eine Gerade sein. Denn wäre es krumm, so könnte man in 𝔈 eine Gerade zeichnen, die A in einem und B mindestens in zwei Punkten, mithin die Fläche in drei Punkten schnitte, während sie doch, weil zweiter Ordnung, in höchstens zwei Punkten von ihr geschnitten werden kann. — Die Geraden B und A schneiden sich in einem Punkte a. Drehen wir 𝔈 um A um unendlich wenig, so erhalten wir eine der B benachbarte Schneidlinie, die A nach einem dem a benachbarten Punkt schneidet. Man sieht daraus:

1) dass es auf einer windschiefen Fläche zweiter Ordnung durch jeden Punkt eine gerade Schneidlinie giebt.

Je zwei solcher Schneidlinien müssen sich offenbar kreuzen; denn wollten sie sich schneiden, so würden irgend zwei benachbarte Erzeugende (welche ja die beiden Schneidlinien schneiden) in einer Ebene liegen. Daraus ersieht man aber, dass je zwei (nicht blos unendlich nahe) Erzeugende unserer Fläche sich kreuzen, weil sonst auch die Schneidlinien in einer Ebene liegen müssten. Man sieht also:

2) Auf einer windschiefen Fläche zweiter Ordnung giebt es durch jeden Punkt der Fläche zwei Gerade; eine Erzeugende und eine gerade Schneidlinie. Je zwei Erzeugenden, so wie je zwei

S c h n e i d l i n i e n kreuzen sich; dagegen schneidet jede Erzeugende jede Schneidlinie.

Man kann daher die beiden Systeme von Geraden einer windschiefen Fläche zweiter Ordnung, nemlich Erzeugende und Schneidlinien vertauschen, d. h. die Erzeugenden als Schneidlinien und zugleich die Schneidlinien als Erzeugende ansehen.

Anm. Da jede windschiefe Fläche zweiter Ordnung demnach unendlich viele gerade Schneidlinien hat, aber schon durch drei solche bestimmt ist, so können wir zur Bestimmung einer solchen Fläche drei gerade Schneidlinien derselben geben. Dass aber diese drei Geraden ausserdem, dass sie sich kreuzen, keine weitere Bedingung zu erfüllen haben, um sicher eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung zu bestimmen, d. h. dass eine Gerade, die drei sich gegenseitig kreuzende Gerade schneidet, eine Fläche zweiter Ordnung beschreibt, lässt sich analytisch leicht nachweisen. Verlangt man, dass sämmtliche Erzeugende der windschiefen Fläche zweiter Ordnung parallel einer Ebene (Leitebene) sind, so braucht man nur zwei der Schneidlinien zu geben, und dann hat man das windschiefe Paraboloid, während die Fläche ohne Leitebene windschiefes Hyperboloid genannt wird.

282. Hat man auf einer beliebigen windschiefen Fläche drei Punkte a, b, c auf einer Erzeugenden M, und legt man in diesen Punkten die Tangenten A, B, C an die Fläche, so hat A mit der Fläche ausser a noch einen zweiten ihm benachbarten Punkt d gemein, durch den wir ebenfalls eine Erzeugende N legen wollen (die also M benachbart ist) und die B und C in den Punkten e, f schneidet, die zu b, c benachbart sind. Es hat demnach die windschiefe Fläche (A, B, C) mit der gegebenen ausser der Erzeugenden M noch die ihr benachbarte N gemein, d. h. die beiden Flächen berühren sich nach der Erzeugenden M. Da aber durch jeden der drei Punkte unendlich viele Tangenten möglich sind, und auch A, B, C stets so angeordnet werden können, dass die entsprechende Fläche eine Leitebene hat, so folgt:

Es giebt unzählige windschiefe Paraboloide oder Hyperboloide, die eine gegebene windschiefe Fläche nach einer bestimmten Erzeugenden berühren.

283. So wie bei einer entwickelbaren Fläche die sämmtlichen Punkte, nach denen sich je zwei Nachbarerzeugende schneiden, eine besondere Curve (Grat) bilden, so bilden auch bei **windschiefen Flächen** alle die Punkte, in denen eine Erzeugende ihrer Nachbarin am Nächsten ist (wir nennen einen solchen Punkt das **Centrum** der Erzeugenden) eine Curve, die wir den **Hals** der windschiefen Fläche heissen wollen. Um diesen Hals zu finden, müssen wir nur im Stande sein, das Centrum einer beliebigen Erzeugenden A zu finden. Bezeichnen wir zu dem Ende die der A benachbarte Erzeugende mit B, so wird das verlangte Centrum offenbar erhalten, wenn man durch A eine Ebene (𝔄) legt, die senkrecht steht zu einer mit A und B zugleich parallelen Ebene (𝔅). Die Ebene (𝔅) ist aber offenbar parallel zu der der Erzeugenden A entsprechenden Tangentialebene an dem Leitkegel der windschiefen Fläche, also auch parallel zur Asymptotenebene dieser Fläche für die Erzeugende A. Demnach hat man die Ebene (𝔄) so anzunehmen, dass sie durch A geht und auf der Asymptotenebene für A senkrecht steht. Will man nun noch sehen, wo die Ebene (𝔄) von B geschnitten wird, so darf man offenbar nur die Schnitte von **allen** Erzeugenden mit der Ebene (𝔄), also die in (A) liegende Schneidlinie (C) der windschiefen Fläche suchen, und der Punkt von (C), der A unendlich nahe liegt, oder, was auf dasselbe hinausgeht, der Schnittpunkt von A und C ist das verlangte Centrum. Da aber, nach 2) der vorigen Nummer, dieser Punkt der Berührungspunkt der Ebene (𝔄) mit der windschiefen Fläche ist, so sieht man:

> **Das Centrum einer Erzeugenden A einer windschiefen Fläche wird erhalten, indem man durch A eine Ebene (𝔄) legt, die auf der dem A entsprechenden Tangentialebene des Leitkegels senkrecht steht, und den Berührungspunkt a dieser Ebene mit der windschiefen Fläche aufsucht; a ist dann der verlangte Punkt.**

Ist die windschiefe Fläche ein Planoid, und nimmt man das Tafelsystem so an, dass die eine Tafel, z. B. $\mathfrak{T}_1$, Leitebene ist, so ist offenbar der erste Riss des Centrums einer beliebigen Erzeugenden A der Punkt, in welchem A_1 von dem ersten Riss (B_1)

der dem A benachbarten Erzeugenden B geschnitten wird, und fällt daher der erste Riss des Halses mit dem ersten Umriss und demnach der Hals selbst mit dem ersten Profil des Planoids zusammen.

Ob eine windschiefe Fläche eine Kante und also einen Scheitel (s. 248. Anm.) hat, lässt sich aus ihrem Bildungsgesetz ermitteln, wie sich dies aus folgendem Beispiele ergiebt. Sind nemlich (Fig. 117) die beiden Kreislinien A, B und die Gerade (a_2) die Schneidlinien einer windschiefen Fläche, 𝔚𝔉 (A, B, a_2), so wird man leicht erkennen, dass, wenn man durch a_2 ein Kantenloth zieht, und dieses als zweiten Riss einer Erzeugenden M, der 𝔚𝔉 ansieht, diese Gerade M und ihre Nachbarerzeugende N in einer Ebene liegen. Denn verbindet man die Punkte, in denen M und N die Kreislinie A treffen, so erhalten wir eine Tangente an A; thun wir dasselbe in Bezug auf B, so erhalten wir eine Tangente an B, die mit der an A parallel ist, und uns so überzeugt, dass M und N in einer Ebene liegen, d. h. dass M eine Kante, und also dessen Centrum der Scheitel der 𝔚𝔉 ist. Fragt man aber, wie das Centrum auf der Kante einer 𝔚𝔉 gefunden wird, so antworten wir, dass in Bezug darauf die Fläche wie eine entwickelbare zu behandeln ist, und der Scheitel daher nach Anleitung der Nr. 278 zu finden ist.

284. Denkt man sich in allen Punkten einer Erzeugenden A einer windschiefen Fläche Normalen zu dieser errichtet, so sind sie parallel zu einer auf A senkrechten Ebene, und bleiben es auch, wenn man A in fester Verbindung mit allen Normalen um 90° dreht. In dieser Lage aber sind die Normalen in Tangenten der Fläche übergegangen, von denen jede mit der Fläche zwei Nachbarpunkte a, b gemein hat. Alle die Punkte a bilden die Gerade A, alle die Punkte b bilden die der A benachbarte Gerade B der windschiefen Fläche. Es bilden also die Normalen nach der vorgenommenen Drehung (also auch vorher) die Erzeugenden, einer geradlinigen Fläche, deren Schneidlinien (nach der Drehung) die (benacharten) Geraden A, B sind, die sich als Erzeugende einer windschiefen Fläche im Allgemeinen kreuzen, und welche eine zu A senkrechte Ebene zu Leitebene haben; also ein windschiefes Paraboloid. Wir haben also den Satz:

Alle Normalen einer windschiefen Fläche, deren Fusspunkte auf einer Erzeugenden der Fläche liegen, bilden in der Regel ein windschiefes Paraboloid; ausnahmsweise bilden sie eine Ebene, wenn die Erzeugende eine Kante der Fläche (248) ist (s. auch 277. Anm.)

285. Denkt man sich an den Meridian einer Drehungsfläche (𝔇𝔉) in einem 𝔓 (a) desselben eine Tangente (B) gelegt, und betrachtet diese als Meridian einer geradlinigen 𝔇𝔉, so haben diese beiden 𝔇𝔉, weil die Linien A und B zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, zwei unendlich nahe Parallelkreise gemein, d. h. sie berühren sich nach einem Parallelkreis C. Ist nun zufällig die Tangente (B) parallel zur Axe der 𝔇𝔉 (A), so ist die 𝔇𝔉 (B) ein Cylinder und man nennt dann den Parallelkreis C den Aequator; ist die Tangente (B) senkrecht zur Axe, so ist die 𝔇𝔉 (B) eine Ebene, die die 𝔇𝔉 (A) entweder nach einem Punkte oder nach einem Parallelkreis berührt. Findet das erstere statt, so muss der 𝔓 (a) in der Axe liegen und wir nennen dann diesen Punkt einen Pol der 𝔇𝔉. Liegt aber der Punkt nicht in der Axe, so berührt die ebene 𝔇𝔉 (B) die 𝔇𝔉 (A) nach einem Parallelkreis, den wir Polarkreis nennen. Ist aber die Tangente (B) weder senkrecht noch parallel zur Axe, so ist 𝔇𝔉 (B) ein Kegel, dessen Centrum in der Axe liegt. Wir haben daher die Sätze:

1) Jedem Aequator einer 𝔇𝔉 (A) entspricht eine cylinderische 𝔇𝔉 (B), die nach ihm die 𝔇𝔉 (A) berührt, und deren Erzeugenden || zur Axe sind.
2) Jedem Pol oder Polarkreise einer 𝔇𝔉 (A) entspricht eine Ebene, die nach ihm die 𝔇𝔉 (A) berührt und ⊥ Axe ist.
3) Jedem anderen Parallelkreis C entspricht eine konische 𝔇𝔉 (B), die nach ihm die 𝔇𝔉 (A) berührt und ihr Centrum in der Axe hat.
4) Die Axe einer 𝔇𝔉 ist ihre Normale für jeden ihrer Pole.

286. Betrachtet man den Meridian A einer 𝔇𝔉 (A) als Schneidlinie eines Cylinders (𝔈𝔉), dessen Erzeugenden auf der Ebene der A senkrecht stehen, so werden alle diese Erzeugenden

Tangenten an Parallelkreisen der 𝔗𝔉 (A) sein, also jede zwei unendlich nahe Punkte und daher die 𝔈𝔉 zwei unendlich nahe Linien mit der 𝔇𝔉 (A) gemein haben. Hieraus folgt der Satz:

1) **Jedem Meridian einer 𝔇𝔉 entspricht eine 𝔈𝔉, die nach ihm die 𝔇𝔉 berührt, und auf der Ebene des Meridians senkrecht steht.**

Hat man für einen 𝔓 (a) einer 𝔇𝔉 eine Tangentialebene, so berührt diese sowohl den Kegel, welcher die 𝔇𝔉 nach dem durch a gehenden Parallelkreis, als auch den Cylinder, welcher die 𝔇𝔉 nach dem durch a gelegten Meridian A berührt; es steht demnach diese Tangentialebene auf der Ebene der A senkrecht. Hieraus folgen die Sätze:

2) **Jede Meridianebene einer 𝔇𝔉 ist für alle Punkte ihres Meridians Normalebene der 𝔇𝔉.**
3) **Jede Normale einer 𝔇𝔉 schneidet die Axe.**
4) **Alle Normalen einer 𝔇𝔉, deren Fusspunkte auf einem Parallelkreis liegen, bilden in der Regel einen Drehungskegel, dessen Axe mit der der 𝔇𝔉 zusammenfällt; für den Aequator eine Ebene und für den Polarkreis einen Cylinder.**
5) **Alle Normalen einer 𝔗𝔉, deren Fusspunkte auf einem Meridian liegen, bilden eine Ebene, nemlich die Ebene des Meridians.**

Fig. 109. 287. Die Drehungsflächen sind für die Anwendung so wichtig, dass es gut sein wird, hier zu zeigen, wie man ihre Gleichungen in Bezug auf drei zu einander senkrechte Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$) findet, die wir der Einfachheit wegen so annehmen, dass die $\mathfrak{T}_1$ (die XY Ebene) senkrecht steht zur Drehungsaxe (man lässt die $\mathfrak{T}_1$ noch durch den Mittelpunkt der Fläche gehen, wenn ein solcher vorhanden ist, ausserdem durch einen Pol oder Polarkreis), die $\mathfrak{T}_2$ (die XZ Ebene) den Hauptmeridian enthält, und in der $\mathfrak{T}_3$ ebenfalls die Drehungsaxe liegt, so dass diese die Z-Axe vorstellt. Sind dann in unserer Figur die Gerade a_1 die Drehungsaxe und A der Hauptmeridian, so liegen X, Y in der $\mathfrak{T}_1$. Nimmt man nun eine Ebene $B_z \parallel \mathfrak{T}_1$ an, die von $\mathfrak{T}_1$ um z entfernt ist, so schneidet sie die 𝔇𝔉 nach einem Parallelkreis, dessen erster Riss die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ hat, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Ist aber von dem

in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Hauptmeridian die Gleichung in Bezug auf X und Z gegeben, so lässt sich r durch Z ausdrücken, und man erhält dann, wenn man den so gefundenen Werth von r in die obige Gleichung einsetzt, die Gleichung der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$.

Ist z. B. der Halbmeridian ein Kreis, dessen Gleichung $(x - \alpha)^2 + z^2 = \beta^2$ ist, in welcher α die Abscisse des Kreiscentrums und β den Halbmesser des Kreises bedeuten, so erhält man daraus, weil auch r ein x des Halbmeridians ist, $(r - a)^2 + z^2 = \beta^2$, woraus sich ergiebt:

$$r^2 = y^2 = \alpha + \sqrt{\beta^2 - z^2} \text{ und}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\alpha + \sqrt{\beta^2 - z^2}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \text{ A)}$$

als Gleichung der Drehungsfläche (Wulst). Transformirt die Gleichung A) so, dass keine Wurzelgrösse mehr in ihr enthalten ist, so erhält man eine Gleichung vierten Grades, und sieht so, dass der Wulst eine Fläche vierter Ordnung ist, d. h. von einer Geraden nach höchstens vier Punkten geschnitten werden kann, was auch leicht einzusehen ist.

Ist der Hauptmeridian ein Kegelschnitt, dessen Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt, so wird man finden, dass die Gleichung der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ vom zweiten Grade also die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ von zweiter Ordnung wird.

Ist z. B. der Hauptmeridian eine Hyperbel mit der Gleichung:

$$\beta^2 x^2 - \alpha^2 z^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

so erhält man hieraus: $r^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\beta^2 + z^2)$ u. $x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\beta^2 + z^2)$

oder
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \text{ B)}$$

als Gleichung der Drehungsfläche (einfaches Hyperboloid).

Ist der Hauptmeridian eine Parabel mit der Gleichung:

$$pz = x^2,$$

so erhält man als Gleichung der Fläche (Drehungsparaboloid): $x^2 + y^2 = pz \; . \; . \; . \; . \; .$ C).

Anm. Wird ein Drehungsparaboloid durch eine Ebene geschnitten, und wählen wir die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie auf der Ebene senkrecht steht, so dass die Gleichung dieser Ebene ist:

$$z = \alpha x + a \; . \; . \; . \; . \; . \text{ D)},$$

so finden wir die Gleichung für den ersten Riss des Schnittes, wenn wir durch Verbindung von C) und D) z eliminiren, und erhalten

$$x^2 + y^2 = \alpha x + a$$

also die Gleichung eines Kreises. Wir haben daher den Satz:

1) Wenn die Axe eines Drehungshyperboloides auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist der erste Riss eines ebenen Schnittes dieser $\mathfrak{DF}$ stets ein **Kreis**.

In ähnlicher Weise lässt sich (wenn auch durch etwas verwickelte Rechnung) folgender Satz nachweisen:

2) Wenn man durch den Mittelpunkt eines Wulstes eine Ebene legt, die ihn tangirt, so schneidet sie denselben nach zwei Kreislinien.

288. Ist der Meridian einer $\mathfrak{DF}$ eine Hyperbel, deren immaginäre Axe mit der Axe der $\mathfrak{DF}$ zusammenfällt, so nennt man diese $\mathfrak{DF}$, welche (nach 287) zweiter Ordnung ist, ein einfaches (einmanteliges) Drehungshyperboloid. Hat man eine Ebene $\mathfrak{E}$, die diese Fläche in einem $\mathfrak{P}$ (a) berührt, so kann man die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Drehungsaxe, und die $\mathfrak{T}_2$ so annehmen, dass der durch a gelegte Meridian A zum Hauptmeridian wird. Dann steht $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{T}_2$ und ihr zweiter Riss (B_2) berührt A_2 in a_2. Man sieht nun leicht, dass die $\mathfrak{E}$ (B_2) die $\mathfrak{DF}$ nach einer offenen Linie zweiter Ordnung schneiden wird, die vom $\mathfrak{P}$ (a) aus nach vier Richtungen geht, und demnach aus zwei in a sich schneidenden Geraden besteht, die mit der Axe der $\mathfrak{DF}$ gleiche Winkel bilden. Es geht hieraus hervor:

1) Dass man durch jeden Punkt eines Drehungshyperboloids mit einem Mantel zwei sich schneidende Gerade legen kann, dass daher diese Fläche eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung ist.

2) Dass die Ebene dieser beiden Geraden diese $\mathfrak{DF}$ berührt, und zwar in dem Schnittpunkte der beiden Geraden.

289. Man wird sich leicht überzeugen, dass jede Gerade, die auf dem einmanteligen Drehungshyperboloid gezogen werden kann, alle Parallelkreise schneidet, und demnach als Schneidlinie unserer $\mathfrak{DF}$ angesehen werden kann, sobald man die Parallelkreise als Erzeugende betrachtet. Da aber eine $\mathfrak{DF}$,

deren Axe gegeben ist, durch *eine* Schneidlinie bestimmt ist, so ist unsere 𝔇𝔉, wenn ihre Axe bekannt ist, durch eine auf ihr liegende Gerade ebensowohl bestimmt, als durch ihren Meridian. Es ist daher auch zweckmässiger, die in Rede stehende 𝔇𝔉 durch ihre Axe und eine von den beiden Geraden, die durch einen Punkt derselben gelegt werden können, zu bestimmen. Denken wir diese Gerade um die Axe der 𝔇𝔉 gedreht, und betrachten sie so als Erzeugende, so erhalten wir ebenfalls unsere 𝔇𝔉, und überzeugen uns so, dass diese erzeugende Gerade während ihrer Bewegung gleiche Winkel mit der Axe bildet. Nehmen wir daher in der Drehaxe einen Punkt an und legen durch ihn Parallele zu allen diesen Geraden, so erhalten wir einen Drehungskegel, *den man, wenn sein Centrum in dem Mittelpunkte des Hyperboloids angenommen ist, den asymptotischen Kegel dieser Fläche nennt.* Daraus geht aber hervor, dass unsere 𝔇𝔉 keine Leitebene hat *und ein besonderer Fall des windschiefen Hyperboloids ist.*

290. Es sei a_1 der erste Riss der Axe, und A eine Gerade eines Hyperboloids, die || $\mathfrak{T}_2$ ist, so ist der erste Riss des Aequators, da dieser der *kleinste* Parallelkreis unserer 𝔇𝔉 ist, eine aus a_1 beschriebene und A_1 berührende Kreislinie. Da ferner der Punkt a der Drehaxe der 𝔊 (A) am nächsten liegt, so ist a der Mittelpunkt unseres Hyperboloids. Es ist aber leicht einzusehen, dass der erste Riss einer *jeden* Geraden des Drehungshyperboloids *eine Tangente am ersten Riss des Aequators ist.* Nehmen wir den Mittelpunkt der 𝔇𝔉 als Centrum eines Kegels an, dessen Erzeugenden mit denen unserer 𝔇𝔉 parallel sind, so erhalten wir den asymptotischen Kegel. Ziehen wir daher durch a eine 𝔊 (B) || 𝔊 (A), so ist 𝔊 (B) eine Erzeugende dieses Kegels. Suchen wir nun die erste Spur unserer 𝔇𝔉 und unseres Kegels, die beide Kreise sind, die ihr Centrum in a_1 haben, so wird man aus der Zeichnung leicht erkennen, dass Fig. 115.

1) *der Halbmesser der ersten Spur des Hyperboloids die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Katheten der Halbmesser des Aequators und der der ersten Spur des asymtotischen Kegels sind.*

2) Jede Erzeugende des Hyperboloids zum ersten Riss eine Tangente an dem ersten Riss des Aequators hat.

Betrachtet man noch die $\mathfrak{E}$ (AB), so sieht man, dass diese eine Tangentialebene des asymptotischen Kegels ist, da sie durch a geht und ihre Spur die des Kegels berührt. Die $\mathfrak{E}$ (AB) enthält aber auch die beiden (parallelen) Geraden A und C des Hyperboloids, also ist diese Ebene asymptotische Ebene desselben. Dreht man diese Ebene um die Axe, so wird man einsehen, dass, was wir über die $\mathfrak{E}$ (AB) gesagt haben, auch für jede Tangentialebene des Kegels gilt. Wir wissen demnach

3) dass jede Tangentialebene des asymptotischen Kegels asymptotische Ebene des Hyperboloids ist.

Endlich geht aus der Gleichung, die wir für die Meridiane unserer beiden $\mathfrak{DF}$ bekommen, hervor,

4) dass, wenn man das Hyperboloid und den asymptotischen Kegel durch eine Meridianebene schneidet, die erstere Fläche nach einer Hyperbel und die letztere nach zwei Geraden geschnitten wird, die Asymptoten der Hyperbel sind.

291. Betrachtet man eine Röhrenfläche als Umhüllungsfläche einer Kugel (s. 252), so hat diese mit jener eine erzeugende Kreislinie gemein hat, und berührt sie nach dieser Linie. Demnach ist die Verbindungslinie eines Punktes a der Röhrenfläche mit dem Mittelpunkte der durch a gehenden Kreislinie (oder umhüllten Kugel) eine Normale der Fläche in a. Man sieht also:

1) Hat man auf einer Röhrenfläche eine erzeugende Kreislinie A und darauf einen Punkt a, so geht die Normale der Fläche für den Punkt a durch den Mittelpunkt von A;

2) alle dem Kreise A entsprechenden Normalen bilden die Ebene des Kreises; daher

3) alle dem Kreise A entsprechenden Tangentialebenen umhüllen einen Kreiscylinder.

Fig. 116. 292. Ist A ein Stück des zur $\mathfrak{T}_1$ parallelen Haupt-Meridians einer Ovalfläche ($\mathfrak{OF}$), deren Axe die Gerade a_1 ist, so schneidet eine Ebene B_1, welche die Axe enthält, die $\mathfrak{OF}$ nach einem

Meridian B, der mit dem Hauptmeridian *nicht* kongruent ist. Suchen wir einen Punkt c von B mit Hilfe einer Parallelellipse C, so finden wir in dieser den Punkt b für den Hauptmeridian A und c für den Meridian B; diese Punkte b, c liegen in einer Parallelen zur $\mathfrak{T}_1$. Nehmen wir eine andere Parallelellipse D (von welcher wir den ersten Riss, als entbehrlich, nicht gezeichnet haben), so finden wir für A den Punkt d und für B den Punkt e, so dass, wegen der Aehnlichkeit der Ellipsen C und D in Gestalt und Lage, de || bc werden muss.

Denkt man sich daher von den Punkten des Meridians B Parallele zu bc gezogen, so treffen sie die $\mathfrak{T}_2$ in Punkten von A. Es kann also A als Parallelriss von B (und umgekehrt) und ebenso jeder Meridian als Parallelriss des anderen betrachtet werden. Da man aber zwei ebene Figuren, deren eine man als *Parallelriss* der anderen ansehen kann, *affin* nennt, so sieht man:

die Meridiane einer $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ sind affine Figuren.

293. Zieht man in b eine Tangente an A, welche die Axe im Punkte g (dessen erster Riss in a_1 liegt) schneidet, so muss die Tangente in c an B mit der bg ebenfalls *affin* liegen, folglich durch g gehen. Hieraus geht hervor: Fig. 116.

1) *Legt man in allen Punkten einer Parallelellipse einer $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ Tangenten an die diesen Punkten entsprechenden Meridiane, so bilden sie einen* **Kegel,** *dessen Centrum in der Axe der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ liegt.* Dieser Kegel geht in eine Ebene über für einen Pol oder Polarkreis, in einen Cylinder für einen Aequator.

Durch ähnliche Betrachtungen, die sich wieder auf die Aehnlichkeit der Parallelellipsen in Gestalt und Lage stützen, findet man noch:

2) *Legt man in allen Punkten eines Meridians einer $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ Tangenten senkrecht zur Flächenaxe, so bilden sie einen Cylinder, der die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ nach dem Meridian berührt.*

294. Nimmt man die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gegen die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ wieder so an, wie vorhin, und betrachtet $\mathfrak{T}_1$ als XY Ebene, $\mathfrak{T}_2$ als XZ Ebene und die Axe a_1 als Z-Axe, so ist die Gleichung des ersten Risses einer jeden Parallelellipse

$$x^2 + \alpha^2 y^2 = r^2,$$

wenn r die (für die Parallelellipsen verschiedene) grosse Halbaxe und α das konstante Axenverhältniss bezeichnet. Ist nun wieder der Hauptmeridian durch eine Gleichung gegeben, so kann man in ähnlicher Weise wie für die Drehflächen (288) die Gleichung der 𝔇𝔉 finden, und der Unterschied ist nur der, dass hier αy an die Stelle von y tritt, woraus hervorgeht, dass die 𝔇𝔉 in eine Drehfläche übergeht, wenn $\alpha = 1$ wird.

Demnach sieht man aber auch, dass jede 𝔇𝔉, deren Hauptmeridian eine Curve zweiter Ordnung ist (welche die Flächenaxe zur Axe hat), eine Fläche zweiter Ordnung ist.

Wir erhalten daher folgende 𝔇𝔉 zweiter Ordnung:

1) das dreiaxige Ellipsoid, wenn der Hauptmeridian eine Ellipse,

2) das elliptische Paraboloid, wenn der Hauptmeridian eine Parabel,

3) das einfache (einmantelige) elliptische Hyperboloid, wenn der Hauptmeridian eine Hyperbel ist, deren Nebenaxe die Flächenaxe vorstellt. Von diesem Hyperboloid lassen sich ganz ähnliche Dinge nachweisen, wie für das mit kreisförmigen Erzeugenden (s. 289 und 290); so namentlich, dass es eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung mit einem Leitkegel ist, der zum asymptotischen wird, so bald sein Centrum mit dem des Hyperboloids zusammenfällt. Dieses Hyperboloid ist identisch mit dem unter den windschiefen Flächen angegebenen.

4) das doppelte (zweimantelige) elliptische Hyperboloid, dessen Meridian eine Hyperbel ist, deren Hauptaxe mit der Flächenaxe zusammenfällt. — Geht die Hyperbel in zwei zur Axe symmetrische Gerade über, so erhalten wir

5) den elliptischen Kegel, dessen Haupt-Halbmeridian eine die Axe schneidende Gerade ist, und wenn endlich diese Gerade die Axe in unendlicher Ferne trifft, so haben wir

6) den elliptischen Cylinder, dessen Haupt-Halbmeridian ein Parallel zur Axe ist.

Alle diese Flächen haben die Eigenschaft, dass man durch jede Hauptaxe einer Parallelellipse zwei Ebenen legen kann, welche die Fläche nach Kreisen schneidet,

und dass diese beiden Ebenen für die verschiedenen Parallelellipsen zwei Systeme von parallelen Ebenen bilden. Verschiebt man eine dieser Ebenen parallel, bis sie die Fläche erreicht, was nur für die oben unter 1, 2 und 4 angeführten Flächen möglich ist, so nennt man die Berührungspunkte Kreispunkte oder Nabelpunkte der Fläche.

295. Ausser den eben genannten Flächen zweiter Ordnung, Fig. 112.
die zu den 𝔒𝔉 zählen, giebt es noch als Flächen zweiter Ordnung den parabolischen und hyperbolischen Cylinder (s. 263) und das windschiefe Paraboloid (s. 260). Von dieser Fläche haben wir oben (275) noch eine Erzeugungsart mitgetheilt, die geeignet ist, eine Anschauung der ganzen Fläche zu geben. Wir können nun noch Folgendes hinzufügen.

Dass diese Fläche zweiter Ordnung ist, ergiebt sich, wenn man ihre Gleichung in ähnlicher Art sucht, wie die einer Dreh- oder Ovalfläche; dass aber diese Fläche windschief ist, eine Leitebene und gerade Schneidlinie hat, lehrt folgende Betrachtung.

Man betrachte den Scheitel a (Fig. 112) der Leitparabel A als Ursprung der Coordinatenebenen XY ($\mathfrak{T}_1$), XZ ($\mathfrak{T}_2$) und YZ, (welche letztere wir als $\mathfrak{T}_3$ ansehen und so umklappen, dass die $\mathfrak{K}'$ mit dem Umklappen der $\mathfrak{T}_3$ nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt) und zeichne die erzeugende Parabel B, welche in a ihren Scheitel hat. Ziehen wir nun in einem Punkt b von A an dieses die Tangente bc und denken uns durch diese eine Ebene senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ gelegt, so schneidet sie, aus ähnlichen Gründen wie oben (289), unsere Fläche nach zwei Geraden, deren zweite Risse mit b_2c_2 zusammenfallen, und gegen $\mathfrak{T}_2$ symmetrisch liegen. Nimmt man daher auf der Fläche einen Punkt an, und zieht von seinem zweiten Risse Tangenten an A_2, so sind sie die zweiten Risse zweier Geraden der Fläche. Diese lässt daher durch jeden ihrer Punkte zwei Gerade auf sich ziehen. Zeichnen wir noch die dritten Risse beider Geraden (bd, be), die b_2c_2 zum zweiten Riss haben (in der aus der Zeichnung hervorgehenden Weise), und erwägt, dass (nach früher angegebenen Eigenschaften der Parabel) $\overline{b_2a_2} = \overline{a_2c_2} = \overline{a_1c_1}$; ferner $\overline{d_3a_3} = \overline{c_1d_1}$ und $\overline{a_3b_3} = \overline{b_2b_2}$, so sieht man, dass, wenn die Gleichung von A ist: $z^2 = -\alpha x$, von B aber: $y^2 = \beta x$, sich herausstellt: $\dfrac{\overline{a_3d_3}}{\overline{a_3b_3}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

also konstant. Demnach werden für einen anderen Punkt der A die dritten Risse der entsprechenden Geraden der Fläche zu denen für den Punkt b parallel, und es folgt demnach, dass unsere Fläche zwei Systeme von Geraden hat, von denen jedes zu einer auf der $\mathfrak{T}_3$ senkrechten Ebene parallel ist. Es ist also unsere Fläche ein windschiefes Paraboloid, das wie wir schon früher gesehen, zwei Systeme von Geraden (Erzeugende, Schneidlinien) hat. Jedes dieser Systeme, sieht man nun jetzt klar, ist parallel zu einer Ebene.

Anm. Von den Flächen zweiter Ordnung haben die beiden Paraboloide und der parabolische Cylinder keinen (eigentlichen) Mittelpunkt.

296. Da wir jetzt alle Flächen zweiter Ordnung kennen gelernt haben, so wollen wir hier die für graphische Operationen wichtigen Eigenschaften dieser Flächen zusammenstellen. Die Nachweise dieser Eigenschaften überlassen wir der analytischen Geometrie:

1) Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden nach höchstens zwei Punkten, von einer Ebene nach einer Linie zweiter Ordnung geschnitten;

2) sie wird von parallelen Ebenen nach ähnlichen und ähnlich liegenden Curven geschnitten (sind daher die Schnitte Ellipsen, so haben sie gleiches Axenverhältniss, sind es Hyperbeln, so haben sie parallele Asymptoten).

3) Legt man durch einen Punkt a eine Gerade A, die eine Fläche zweiter Ordnung nach den Punkten b, c schneidet, und sucht man auf A den Punkt d, der durch b, c von a harmonisch getrennt ist (s. 204 und 205), so liegen alle die Punkte d, die sich auf den verschiedenen durch a möglichen Geraden (Stralen) finden lassen, in einer Ebene $\mathfrak{E}$, die man die Polarebene oder Polare von a in Bezug auf die Fläche nennt; während a der Pol von $\mathfrak{E}$ genannt wird. Fallen b und c zusammen (d. h. berührt A die Fläche), so fällt auch d mit diesen Punkten zusammen, also liegt dann d in der Polaren. Wir sehen also auch:

Zieht man von einem Punkte a alle möglichen Tangenten an eine Fläche zweiter Ordnung, so liegen deren Berührungspunkte in einer Ebene $\mathfrak{E}$

(der Polaren von a), und bilden daher einen Kegelschnitt.

Liegt der Punkt in unendlicher Entfernung, so sind die Tangenten parallel, und 𝔈 geht durch das Centrum der Fläche; 𝔈 heisst in diesem Falle eine Diametralebene. Liegt a auf einer Axe der Fläche in unendlicher Ferne, so ist 𝔈 eine Hauptebene.

Anm. zu 3. Man nennt jede durch den Pol gehende Gerade zur Polaren konjugirt. In's Besondere nennt man den durch den Pol gehenden Durchmesser (durch den Mittelpunkt gehende Gerade) den der Polaren konjugirten Durchmesser.

4) Haben zwei Flächen zweiter Ordnung eine ebene Curve A gemein, so liegen die Punkte, die sie ausser A gemeinsam enthalten, ebenfalls in einer Ebene, d. h. wenn die Flächen ausser A noch eine zweiten Curve (B) gemein haben, so ist diese auch eben (also ebenfalls ein Kegelschnitt). — Hier kann es sich auch treffen, dass B mit A benachbart wird, so dass sich die Flächen nach A berühren.

5) Wenn sich zwei Flächen zweiter Ordnung nach zwei Punkten berühren, so haben sie entweder nichts weiter gemein, oder sie haben eine oder zwei ebene Curven gemein.

297. Schneidet man eine Schraubenfläche (A, $a_{,,}$, h) durch eine Meridianebene ($B_{,}$), und sucht einen Punkt c des Schnittes, indem man durch den Punkt b des Meridians A eine Schraubenlinie C (von dieser ist blos der erste Riss, welcher eine Kreislinie $C_{,}$ ist, gezeichnet) legt, und sucht wo diese die Ebene $B_{,}$ schneidet, so ist der erste Abstand des Punktes c grösser, als der des Punktes b um ein bestimmtes Stück α, das sich verhält zu h wie die Anzahl Grade des Winkels ($A_{,,}$ $B_{,}$) zu 360. Demnach unterscheidet sich der Meridian in $B_{,}$ von dem in $A_{,}$ nur dadurch, dass die Punkte des ersteren um ein Stück α höher liegen, als die des letzteren. Dreht man daher die Ebene ($A_{,}$) um die Axe ($a_{,}$) und hebt ($A_{,}$) um ein Stück α, so fällt A auf B. Hieraus geht hervor: Fig. 110.

1) Alle Meridiane einer Schraubenfläche sind kongruent;

2) jeder Meridian schneidet alle Schraubenlinien und jede Schraubenlinie schneidet alle Meridiane.

Man kann daher entweder die Schraubenlinie als Erzeugende und einen Meridian als Schneidlinie, oder die Meridiane als Erzeugende und eine Schraubenlinie als Schneidlinie ansehen.

298. Hat man irgend eine Schraubenfläche und legt man durch alle Punkte einer Erzeugenden (Schraubenlinie) derselben Normalen, so müssen dieselben mit der Flächenaxe gleiche Winkel bilden, und gleiche Entfernung vor ihr haben. Es bilden daher alle diese Normalen eine windschiefe Schraubenfläche. — Legt man an die Fläche in allen Punkten einer Erzeugenden Tangentialebenen, so bilden diese mit der Axe gleiche Winkel und umhüllen eine entwickelbare Schraubenfläche. — Sucht man von einer geradlinigen Schraubenfläche den Leitkegel, so ist er ein Drehungskegel, der für die rechtwinkelige Schraubenfläche in eine zur Axe senkrechten Leitebene übergeht.

Fig. 111. 299. Legt man durch einen Punkt b einer Simsfläche eine Ebene parallel zur Ebene (A_2) der Direktrix, so wird der erste Riss des Schnittes dieser Ebene mit der Fläche eine durch b_1 gehende Parallele zu A_1, dessen zweiter Riss aber eine Parallele zu A_2 werden. Wir wollen daher die Schnitte solcher (mit A_2 paralleler) Ebenen mit der Simsfläche die Parallelen, und (der Analogie mit der Drehungsfläche wegen) die Erzeugenden die Meridiane der Fläche nennen. Jeder Meridian schneidet alle Parallelen und jede Parallele alle Meridiane, so dass auch ein Meridian als Schneidlinie und die Parallelen als Erzeugende angesehen werden können.

Legt man an die Fläche in allen Punkten einer Parallelen Tangentialebenen, so umhüllen diese, da sie alle mit der $\mathfrak{T}_1$ gleiche Winkel bilden, eine Böschungsfläche. Zieht man in allen Berührungspunkten dieser Tangentialebenen Senkrechte zu diesen, also Normalen zur Simsfläche, so bilden sie ebenfalls eine Böschungsfläche. Wir sehen also:

1) Einer jeden Parallelen A einer Simsfläche entspricht eine tangirende Böschungsfläche (die nach A berührt) und eine normale Böschungsfläche (deren Erzeugende Normalen der Simsfläche sind).

Es ist aber noch leicht einzusehen, dass wie bei den Drehflächen folgender Satz gilt:

2) Jedem Meridian einer Simsfläche entpricht ein tangirender Cylinder und eine normale Ebene.

§. 19.

Tangentialebenen von Flächen bei gegebenem Berührungspunkte.

300. Wir geben in diesem § den Punkt der Fläche, der als Berührungspunkt betrachtet werden soll, indem wir eine Erzeugende der Fläche angeben und darauf einen Punkt annehmen. Sollte die Aufgabe in der Art vorkommen, dass von dem Punkte nur der erste (oder zweite) Riss gegeben ist, so werden wir durch später zu entwickelnde Mittel den fehlenden Riss finden lernen.

Ist der Berührungspunkt der Tangentialebene durch seine beiden Risse gegeben, so müssen wir zur Bestimmung der gesuchten Ebene zwei Gerade derselben suchen. Eine Gerade werden wir stets dadurch erhalten, dass wir durch den Punkt eine Erzeugende der Fläche legen, und an dieser in dem Punkte eine Tangente ziehen, (deren Risse bekanntlich die entsprechenden Risse der Erzeugenden in den Rissen des Punktes berühren). Ist daher die Erzeugende Gerade (also zugleich ihre Tangente im Berührungspunkt), so ist sie schon eine Gerade der Tangentialebene. Um aber eine zweite Gerade der Tangentialebene zu erhalten, können wir durch den Punkt eine zweite Linie der Fläche legen, (diese können wir dadurch finden, dass wir den ersten Riss der Linie beliebig annehmen, aber so, dass er durch den ersten Riss des Punktes geht, und daraus nach früheren Regeln den zweiten suchen); da aber diese Linie in der Regel krumm ist, und daher wenigstens ein Riss derselben eine Curve ist, wir aber die Konstruktion von Curven, die keine Kreise sind, zu vermeiden suchen, so werden wir bei den einzelnen Flächen aus ihren Eigenschaften ein Verfahren abzuleiten suchen, das die Konstruktion einer Curve entbehrlich macht, wie in Folgendem gezeigt werden soll.

301. Aufg. An eine (Kegelfläche) 𝔎𝔉 (Aa) eine Tangentialebene zu legen, die den Punkt b zum Berührungspunkte hat. Fig. 118.

Aufl. Eine Gerade der Tangentialebene ist schon die durch b gehende Erzeugende B. Um nun eine zweite Gerade zu erhalten, benützen wir die Eigenschaft einer entwickelbaren Fläche, dass sie von einer Ebene nach einer Erzeugenden (hier nach B) berührt wird. Es ist demnach jeder Punkt der B ein Berührungspunkt der verlangten Ebene, also auch der Punkt c, in dem die Schneidlinie A von B geschnitten wird. Betrachten wir aber c als Berührungspunkt, so geht durch ihn schon eine zweite Linie der Fläche, nemlich die Schneidlinie A selbst, und die an diese in c gezogene Tangente C ist die verlangte zweite Gerade.

> Man bestimmt demnach die Tangentialebene eines Kegels bei gegebenem Berührungspunkt b mittelst der durch b gehenden Erzeugenden, der Berührungslinie B, und der Tangente C an der Schneidlinie A im Schnittpunkte von A und B, so dass 𝔈 (BC) die verlangte Tangentialebene ist *).

Anm. In derselben Weise lässt sich die Tangentialebene bei gegebenem Berührungspunkte für jede entwickelbare Fläche, von der eine Schneidlinie gegeben ist, aufsuchen (der Schüler kann zur Uebung eine Böschungsfläche als Beispiel nehmen); ist aber von einer Gratfläche nur der Grat A gegeben, so würde die Tangente an A mit der Berührungslinie zusammenfallen. Wir müssen daher, um zum Ziele zu kommen, eine Schneidlinie der Fläche suchen, indem wir diese durch eine Ebene schneiden [am bequemsten lässt man diese durch den Berührungspunkt gehen und senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) stehen], und den Schnitt suchen. Wir brauchen aber von diesem Schnitt nur das in der Nachbarschaft der Berührungs-

---

*) Damit der Schüler stets übersichtlich vor Augen hat, um welche Aufgabe es sich handelt, pflege ich in abgekürzter Bezeichnung die Aufgabe auf der Tafel anzuschreiben. Hiebei nehme ich das Zeichen)(für berühren. Obige Aufgabe würden dann geschrieben: 𝔈 [| 𝔓 (b);)(𝔎 𝔉 (A, a)], d. h. es ist gesucht (das vor [stehende, also 𝔈) eine Ebene, die durch (|) b geht und berührt die Kegelfläche (A, a). Und am Schlusse der Auflösung schreibe ich dann rechts von der Klammer] = 𝔈 (BC), d. h. die gesuchte Ebene ist die Ebene BC.

linie liegende Stück. — Wie man speziell für die entwickelbare Schraubenfläche die Aufgabe löst, wird bei den Schraubenflächen gezeigt werden.

302. Ist die entwickelbare Fläche ein $\mathfrak{C}\mathfrak{F}$ (A_1), d. i. ein Cylinder, der auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, und A_1 zum ersten Riss hat (A_1 ist dann offenbar der erste Riss einer jeden Schneidlinie), so steht auch die Berührungslinie $\perp$ $\mathfrak{T}_1$, ist also eine Gerade a_1, deren erster Riss (a_1) in A_1 liegt, und eine Tangente B_1 an A_1 im Punkte a_1 ist der erste Riss der Tangente an der Schneidlinie des Cylinders. Da aber die gesuchte Tangentialebene auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist $\mathfrak{E}$ (B_1) die gesuchte Ebene. Man sieht also:

> Die Tangentialebene einer $\mathfrak{C}\mathfrak{F}$ (A_1) nach einer Geraden a_1 ist eine Lothebene eins, deren erster Riss (B_1) die A_1 in a_1 berührt.

303. Aufg. An eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung, nemlich $\mathfrak{W}\mathfrak{F}$ (A, B, a_2), deren Schneidlinien Gerade sind, eine Tangentialebene bei gegebenem Berührungspunkt b zu suchen. Fig. 119.

Aufl. Wir wählen das Tafelsystem so, dass eine von den drei geraden Schneidlinien $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ (oder $\mathfrak{T}_1$) ist, weshalb wir die Fläche mit $\mathfrak{W}\mathfrak{F}$ (A, B, a_2) bezeichnet haben, da a_2 eine Gerade (a_2) bedeuten soll. Um einen Punkt b der Fläche zu erhalten, zeichnen wir eine Erzeugende C (deren zweiter Riss durch a_2 gehen muss, und welche A und B schneidet), und nehmen darauf einen Punkt b an. Da nun C schon eine Gerade der Tangentialebene ist, so haben wir nur noch eine Gerade der Ebene zu finden. Wir erinnern uns aber, dass durch jeden Punkt einer windschiefen Fläche zweiter Ordnung zwei Gerade gehen (Erzeugende und Schneidlinie). Suchen wir daher die Schneidlinie. Da diese alle Erzeugende schneiden muss, so bestimmen wir so viele Erzeugende, als wir brauchen (wie sich zeigen wird: drei, oder, da wir schon eine haben, noch zwei). Unter allen Erzeugenden wäre die am Bequemsten, welche auf einer Tafel, z. B. $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, und eine solche giebt es auch. Denn dieselbe schneidet dann die Gerade a_2 (in unendlicher Ferne), und ihr zweiter Riss muss in A_2 und B_2 liegen. Demnach ist die Gerade c_2 eine solche Erzeugende. (Eine solche $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ giebt es in unserer Zeichnung nicht, warum? Wie müssten A und B

liegen, wenn es eine solche geben sollte?). Eine weitere Erzeugende können wir beliebig annehmen; wir wollen eine solche suchen, die || B ist, hier die Gerade D. Haben wir nun drei Erzeugende (C, c_2 und D) und sollen wir die durch b gehende Schneidlinie finden, so muss ihr zweiter Riss durch c_2 gehen, also E_2 sein, während ihr erster Riss (E_1) dadurch gefunden wird, dass E die Geraden C und D schneiden muss. Die gesuchte Ebene ist also die Ebene CE, welche zwei Gerade der 𝔚𝔉 (A, B, a_2) enthält, die durch den Berührungspunkt gehen.

Anm. Wie man sieht, giebt es in vorliegendem Beispiele zu jeder Schneidlinie eine parallele Erzeugende und umgekehrt. Eine Ebene, die zwei solche parallele Gerade enthält, hat ihren Berührungspunkt in unendlicher Ferne und ist also asymptotisch für die 𝔚𝔉. Würde aber A_2 || B_2 sein, so gäbe es offenbar keine Erzeugende || 𝔖 (a_2) und ebensowenig eine || A oder || B. In diesem Falle aber wären die drei gegebenen Schneidlinien (A, B, a_2) parallel zu einer Ebene, z. B. zur Ebene A_2 und unsere 𝔚𝔉 wäre ein Paraboloid, während in unserer Zeichnung die A, B, a_2 nicht parallel einer Ebene sind, und ein Hyperboloid bilden. Wir erhalten daher den Satz:

1) Auf dem windschiefen Hyperboloid giebt es zu jeder Schneidlinie eine parallele Erzeugende, auf dem Paraboloid schneidet jede Erzeugende jede Schneidlinie in endlicher Entfernung.

Legt man durch eine Erzeugende eines windschiefen Paraboloids eine Ebene (die bekanntlich Tangentialebene der 𝔚𝔉 ist) parallel zur Leitebene, so wird sie von allen anderen Erzeugenden in unendlicher Ferne geschnitten; es liegt also die in ihr gesuchte Schneidlinie und mit dieser auch der Berührungspunkt der Ebene in unendlicher Ferne. Wir sehen daher:

2) Jede Asymptotenebene eines windschiefen Hyperboloids enthält zwei parallele Gerade desselben; jede solche Ebene eines windschiefen Paraboloids ist parallel zur Leitebene.

Fig. 117. 304. Sind die Schneidlinien einer 𝔚𝔉 alle oder zum Theil krumme Linien, und sollen wir für einen auf einer Erzeugenden liegenden Punkt die Tangentialebene finden, so legen

wir in den Punkten, wo die Erzeugende die Schneidlinien trifft, Tangenten D, E, F an diese und suchen die Tangentialebene für die 𝔚𝔉 (D, E, F) in dem gegebenen Berührungspunkt, da wie früher (s. 282) gezeigt wurde, die letztere 𝔚𝔉 die gegebene nach der angenommenen Erzeugenden berührt. Es seien z. B. (Fig. 117) die Schneidlinien der 𝔚𝔉 zwei in parallelen Ebenen liegende Kreise, und eine Gerade, die auf diesen Ebenen senkrecht steht, und durch den Mittelpunkt des einen Kreises geht. Wir nehmen dann die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_2$ parallel zu den Ebenen A_1, B_1 der Kreise A, B ist, so dass die gerade Schneidlinie, welche hier durch den Mittelpunkt a des Kreises A gehen soll, die 𝔖 (a_2) ist. Die $\mathfrak{T}_1$ wählen wir so, dass die Verbindungslinie $(a_2 b_2)$ der Mittelpunkt e von A_2, B_2 ein Kantenloth wird. Ist nun auf dieser 𝔚𝔉 (A, B, a_2) *) eine Erzeugende C und auf ihr ein Punkt b als Berührungspunkt einer Tangentialebene gegeben, so zieht man in den Schnittpunkten von C mit A, B, a_2 Tangenten an letztere Linien, wodurch man die Geraden D, E und a_2 erhält und löst die Aufgabe (nach voriger Nummer) für die 𝔚𝔉 (D, E, a_2).

305. Ist gegeben ein Planoid, (eine 𝔚𝔉 mit einer Leitebene) und zwei geraden Schneidlinien A, B, so nimmt man die Tafeln so an, dass die Leitebene eine Lothebene wird, z. B. eine Ebene C_2, so dass man hat die 𝔚𝔉 (A, B, C_2). Ist wieder eine Erzeugende D dieser Fläche (deren zweiter Riss parallel C_2 sein muss) gegeben und auf ihr ein Punkt b als Berührungspunkt, so ist wieder D eine Gerade der Tangentialebene. Als zweite Gerade sucht man wieder (wie in 303) die durch b gehende Schneidlinie, wobei sich abermals herausstellt, dass der Punkt c_2, in welchem sich A_2 und B_2 schneiden, der zweite Riss einer 𝔖 (c_2) ist, welche eine Erzeugende vorstellt, da sie || 𝔈 (C_2) ist, und A und B schneidet. — Die Ausführung der Zeichnung wollen wir dem Schüler überlassen.

Sind aber die Schneidlinien A, B krumm, oder ist es eine davon, so führt man wieder die Aufgabe (wie in voriger Nr.)

---

*) Man nennt diese Fläche im Bauwesen, wo sie zuweilen zu Fensterüberwölbungen verwendet wird, windschiefen Kernbogen.

mittelst Tangenten an den Schneidlinien auf eine Fläche mit geraden Schneidlinien zurück. — Der Schüler wird gut thun, darüber ein Beispiel zu machen, und dazu etwa den Fall wählen, wo die Schneidlinien sind: ein Kreis A und eine Gerade, die parallel zur Kreisebene ist und die durch seinen Mittelpunkt gehende zu seiner Ebene senkrechte Gerade schneidet. Zugleich soll die Leitebene auf der geraden Schneidlinie senkrecht stehen.

NB. Wie man an windschiefe Schraubenflächen Tangentialebenen legt, wird bei den Schraubenflächen auseinander gesetzt werden.

Fig. 120. 306. Es sei gegeben eine 𝔇𝔉 (A, a_1), d. i. eine Drehfläche, die A als Meridian und Gerade (a_1) als Axe hat, und auf einem Parallelkreis B der Fläche ein Punkt b als Berührungspunkt einer Tangentialebene, so ist die Tangente C von B im Punkte b schon eine Gerade der Tangentialebene. Um aber eine zweite Gerade der Tangentialebene zu erhalten, erinnern wir uns, dass dem Parallelkreis B ein Drehungs-Kegel entspricht, der die 𝔇𝔉 nach B berührt, so dass die gesuchte Tangentialebene auch diesen Kegel berührt, und demnach durch sein Centrum geht. Nun ist aber die Gerade D, welche in c (dies ist der Punkt des Parallelkreises, in dem er den Meridian A schneidet) den Meridian A berührt, der Halbmeridian unseres Drehungskegels; demnach erhalten wir hiedurch das Centrum a desselben und ist demnach die 𝔈 (Ba) die verlangte Tangentialebene.

Anm. Will man die Normale der 𝔇𝔉 (A, a_1) für den Punkt b, so wissen wir, dass alle Normalen der Fläche für Punkte des Kreises C einen Kegel bilden (s. 287), dessen Centrum in der Drehaxe liegt. Nun ist aber die Tangentialebene für den Punkt c die Ebene D_2 und demnach die zu dieser senkrechten Gerade cd (d_1 fällt auf a_1) die Normale für c; also ist Gerade bd die Normale der 𝔇𝔉 für b.

Fig. 121. 307. Aufg. An ein einfaches Drehungshyperboloid eine Tangentialebene für einen gegebenen Berührungspunkt b zu legen.

Aufl. Man wählt die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Axe der Fläche, so dass Gerade (a_1) diese Axe vorstellt und die $\mathfrak{T}_2$ so, dass $a_1 b_1 \parallel \mathfrak{K}_1$ ist, so dass man auch, wie in unserer Zeichnung, $\mathfrak{K}_1$ mit $a_1 b_1$ zusammenfallen lassen kann. Ist nun noch der Kreis A der Aequator und der B die erste Spur der Fläche, so zeichne

man zur Bestimmung der Tangentialebene die beiden durch den Berührungspunkt b gehenden Geraden unserer Drehfläche. Die ersten Risse (C_1, D_1) dieser Geraden berühren (s. 291) den ersten Riss (A_1) des Aequators. Ist C_1 der erste Riss einer dieser Geraden, so schneidet die Gerade C den Aequator in e, die erste Spur von C aber liegt in c oder d (die zweiten Risse dieser Punkte liegen offenbar in $\mathfrak{K}_2$); wir müssen daher bestimmen, welcher dieser beiden Punkte gelten soll. Lassen wir in unserer Figur c gelten, so gilt für D der Punkt f als erste Spur, und die verlangte Tangentialebene, die hier offenbar zur $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, ist die Ebene (C, D) oder $\mathfrak{C}$ (C_2).

Man sieht aus der Zeichnung dass die erste Spur der Tangentialebene für b, hier $\mathfrak{G}$ (cf), auf $a_1 b_1$ senkrecht steht, und dies ist auch der Fall, wenn $a_1 b_1$ nicht parallel zu $\mathfrak{K}_1$ liegt. Ferner sieht man leicht, dass wenn wir d und g als Spuren der Geraden (C, D) genommen hätten, der Punkt b ebenso hoch über, als für c und f unter dem Aequator erschienen wäre. Liegt demnach, wie in unserer Figur, der Aequator über der Spur eins unserer Drehfläche, so können wir die erste Spur der Tangentialebene im Punkt b, ohne Hilfe der $\mathfrak{T}_2$ finden, wenn wir von den vier Punkten (c_1, d_1, f_1, g_1), die beiden dem b_1 nächsten (c_1, f_1) oder fernsten (d_1, g_1) verbinden, je nachdem b unter oder über dem Aequator liegt.

Anm. Liegt der Berührungspunkt auf dem Aequator, z. B. der Punkt e, so steht die entsprechende Tangentialebene $\perp$ $\mathfrak{T}_1$, hier die Ebene C_1. Liegt der Berührungspunkt in der ersten Spur der Fläche, wie Punkt c, so lässt sich leicht einsehen, dass die Spur der Tangentialebene die der Fläche in c berührt; liegt endlich b in unendlicher Ferne, d. h. ist die gesuchte Ebene Asymptotenebene, so laufen, wie wir schon wissen, die beiden Geraden (C, D) parallel, und die Spur der Ebene berührt die des Asymptotenkegels.

308. Soll man an eine Röhrenfläche bei gegebenem Berührungspunkte a eine Tangentialebene legen, so geschieht dies am Besten mit Hilfe der Normale in a. Sucht man nemlich den Erzeugungskreis A der Fläche, auf welchem der Punkt a liegt, so ist die Gerade ab (wenn b den Mittelpunkt von A bezeichnet) die Normale für a (s. 291). Legt man demnach durch a eine

Ebene senkrecht zur 𝔖 (ab), so erhält man die verlangte Tangentialebene.

Fig. 122. 309. Aufg. An eine Ovalfläche bei gegebenem Berührungspunkte eine Tangentialebene zu legen.

Aufl. Nehmen wir die Tafeln so an, dass die Gerade a_1 die Axe und die zur $\mathfrak{T}_2$ parallele Curve A der Hauptmeridian der Fläche ist, so muss nur noch das Axenverhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ für die Parallelellipsen gegeben werden. Ist nun noch b_2 der zweite Riss des Berührungspunktes, und demnach B_2 der der entsprechenden Parallelellipse B, so müssen wir noch b_1 aufsuchen. Dies kann geschehen, ohne dass wir B_1 (das eine Ellipse ist) zeichnen. Denn es ist a_1c_1 die grosse Halbaxe von B_1 und $\overline{a_1d_1}$ $\left(= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \overline{a_1c_1}\right)$ die kleine. Wenden wir nun die in Nr. 188 angegebene Ellipsen-Konstruktion an, so finden wir unmittelbar b_1 (es giebt zwei solche Punkte, von denen einer als der gegebene erste Riss des Berührungspunktes, hier der vor dem Hauptmeridian liegende, bezeichnet werden muss). Die weitere Konstruktion der Tangentialebene hat denselben Gang zu verfolgen wie bei der Drehfläche. Legt man nemlich in b eine Tangente C an B [C_1 kann mit derselben Ellipsen-Konstruktion wie oben (nach 191) unmittelbar gefunden werden], so ist C eine Gerade der Tangentialebenen. Zieht man ferner D tangirend an A im Punkte c, so erhält man das Centrum a des Kegels, der die Fläche nach der Parallelellipse C berührt, und damit einen Punkt a der gesuchten Ebene, so dass Ebene (Ca) die verlangte Ebene ist.

Anm. Errichtet man in b eine Senkrechte zur Ebene (Ca), so ist dies die Normale der Fläche in b. Diese schneidet also die Axe der Fläche nicht.

Fig. 123. 310. Aufg. An ein einfaches (elliptisches) Hyperboloid bei gegebenem Berührungspunkte eine Tangentialebene zu legen.

Aufl. Nehmen wir wieder die Tafeln, wie in voriger Nummer an, so dass Gerade a_1 die Axe ist, und dass die (zu $\mathfrak{T}_2$ parallele) Gerade A eine Gerade der Fläche vorstellt, so ist B der Aequator, dessen erster Riss eine Ellipse B_1 ist, die A_1 berührt (wir haben der Deutlichkeit wegen B_1 gezeichnet; es ist aber nicht nöthig,

sondern es genügt, wenn man die Halbaxen $\overline{a_1c_1}$ und $\overline{a_1d_1}$ zeichnet). Um nun die Zeichnung von Ellipsen zu vermeiden, nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ an, die $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ ist, und auf welcher sich B, und demnach alle Parallelellipsen als Kreise darstellen. Zu dem Ende muss $\mathfrak{K}'_3$ so gelegt werden, dass $\overline{a_3c_3} = \overline{a_1d_1}$ wird (wir überlassen dem Schüler diese Konstruktion zu suchen), dann ist B_3 ein Kreis mit dem Radius $\overline{a_1d_1}$. Ist nun C_2 der zweite Riss einer Parallelellipse C, f (dessen erster Riss auf a_1 fällt) ihr Mittelpunkt, f_3 dessen dritter Riss, so ist e der Schnitt von C und A, und daher der aus f_3 mit dem Halbmesser $\overline{f_3e_3}$ beschriebene Kreis C_3 der dritte Riss von C. Nimmt man auf diesem den Punkt b als Berührungspunkt an (von welchem Punkte zunächst b_2 und b_3 gefunden werden), so können wir nach bekannten Regeln leicht b_1 finden. Denken wir uns nun die beiden durch b gehenden Geraden der Tangentialebene, deren erste Risse B_1 berühren, so haben diese Risse, als Gerade der $\mathfrak{T}_1$, den zweiten Riss ihres Schnittpunktes (b_1) in $\mathfrak{K}_2$, also in b'_2 und den dritten in b'_3. Ziehen wir nun von b'_3 Tangenten an B_3, die in g_3, h_3 berühren, so erhalten wir von den Punkten g, h, welche in B liegen, die dritten Risse, aus denen sich leicht die zweiten und daraus die ersten Risse finden lassen (wir haben diese Risse nicht gesucht, um die Zeichnung nicht mit zu vielen Punkten zu übersäen; der Schüler wolle sie aber aufsuchen). Dann ist Ebene (bgh) die verlangte Tangentialebene.

Mittelst einer $\mathfrak{T}_3$ derselben Art kann auch die Aufgabe in voriger Nummer gelöst werden; es wird gut sein, wenn es der Schüler versucht. — Man könnte auch der $\mathfrak{T}_1$ gleich die Stellung geben, die hier die $\mathfrak{T}_3$ eingenommen hat, und so mit zwei Tafeln auskommen.

311. Aufg. An eine scharfe Schraubenfläche (A, a_1, h) eine Tangentialebene zu legen, wenn der Berührungspunkt b gegeben ist. Fig. 124.

Aufl. Nimmt man eine Schraubenlinie B an, die durch einen Punkt c von A geht und auf B einen Punkt b, so muss b_1 auf einer durch c_1 gehenden Kreislinie B_1 (die den ersten Riss der Schraubenlinie B vorstellt) liegen, während der zweite Abstand ($\mathfrak{A}_2$) des Punktes b (wenn $\mathfrak{K}_2$ durch c_2 gelegt wird) gefunden wird durch die Proportion: $\mathfrak{A}_2 : h = \widehat{b_1c_1} : 2\pi \cdot \overline{a_1b_1}$

(hat, wie in unserer Figur, $\widehat{b_1 c_1}$ 30°, so ist $\mathfrak{A}_2 = \frac{h}{12}$). Legt man in b an die Schraubenlinie eine Tangente C, so findet man bekanntlich einen Punkt d derselben, wenn man $\overline{b_1 d_1} = \frac{1}{n} \cdot 2\pi \cdot \overline{a_1 b_1}$ und den zweiten Abstand um $\frac{h}{n}$ grösser macht, als $\mathfrak{A}_2$ des Punktes b. Zeichnet man endlich noch die durch b gehende Gerade unserer Fläche, so schneidet sie die Axe derselben in einem Punkte e, für welchen $\overline{a_2 e_2} = \mathfrak{A}_2$ ist. Die verlangte Tangentialebene ist dann die Ebene (bde).

Anm. 1. Wäre die Schneidlinie der Fläche eine Curve E, alles Uebrige aber wie oben, also die Schraubenfläche (E, a_1, h) gegeben, und zieht man in c eine Tangente A an E, so berühren sich die Flächen (E, a_1, h) und (A, a_1, h) nach der Schraubenlinie B, auf welcher b liegt; sucht man daher die Tangentialebene (bde) der Fläche (A, a_1, h), so ist sie die gesuchte Ebene. — Der Schüler wird gut thun, auch die Aufgabe zu lösen für den Fall, dass die Gerade A $\perp$ zur Geraden a_1 ist.

Anm. 2. Ist die Schneidlinie der Schraubenfläche eine Gerade A, welche die Axe (a_1) kreuzt, dann werden die ersten Risse aller Geraden der Fläche eine aus a_1 beschriebene Kreislinie (deren Halbmesser die Entfernung der Geraden a_1 und A ist) berühren (anstatt dass sie oben durch a_1 giengen); im Uebrigen bleibt alles wie oben, und damit auch das Verfahren zur Aufsuchnng der Tangentialebene an die eben besprochene Schraubenfläche, welche entweder eine windschiefe oder eine entwickelbare ist.

Fig. 111. 312. Aufg. An eine Simsfläche (A, B) eine Tangentialebene im Punkte b zu legen.

Aufl. Legt man durch b (von welchem b_1 und b_3 gezeichnet sind, woraus man b_2 leicht finden kann) einen Meridian C, dessen dritter Riss (s. 274) auf B_2 fällt, und an diesen in b eine Tangente D, so erhält man dadurch einen Punkt d der ersten Spur E der Tangentialebene. E_1 steht aber senkrecht zu C_1. Die gesuchte Ebene ist daher die Ebene (Eb).

313. Wie man Flächen zweiter Ordnung behandelt bei Aufsuchung von Tangentialebenen ist theils bei Kegeln und Cylindern, theils bei den windschiefen Flächen, theils bei den

Ovalflächen entwickelt worden. Nur, wenn ein windschiefes Paraboloid in der Art, wie in Fig. 112 gegeben ist, hat man noch nicht gezeigt, wie seine Tangential gefunden wird. Allein da man zur Bestimmung der Tangentialebene nur durch den Berührungspunkt zwei Gerade (die Erzeugende und die Schneidlinie) legen darf, und in Nr. 295 gezeigt wurde, wie man diese Geraden findet, so ist man auch in diesem Falle im Stande, die Aufgabe zu lösen.

314. Aus den bekannten Beziehungen, in denen die Tangentialebene in einem Punkte a einer Fläche, zur Normale, zu den Tangenten und Normalebenen für a stehen, ist es leicht, die letzteren Dinge aus der ersten und umgekehrt zu finden. So findet man die Normale für a, wenn wir in a eine Senkrechte zur Tangentialebene errichten und umgekehrt (wir haben schon einigemal in diesem § das Verfahren angewendet). Ist eine Tangente oder Normalebene für a gesucht, so wissen wir, dass beide noch unbestimmt sind, und demnach noch durch weitere Bedingungen genauer bestimmt werden müssen. Hätten wir z. B. die Aufgabe zu lösen:

Im Punkte a einer Fläche 𝔉 an diese eine Tangente zu legen, die parallel einer gegebenen Ebene 𝔈 ist, so würden wir die Tangentialebene 𝔗𝔈 von 𝔉 im Punkte a suchen und hätten so einen geometrischen Ort der Tangente. Einen zweiten solchen Ort erhalten wir offenbar durch eine Ebene 𝔄, welche a enthält und ∥ 𝔈 ist. Der Schnitt der Ebenen 𝔄 und 𝔗𝔈 ist demnach die verlangte Tangente. Der Schüler mag ein Beispiel über diese Aufgabe machen.

§. 20.

Schnitte von Linien mit Flächen, von Flächen mit Flächen und Tangenten an den Schnittlinien.

315. Wenn ein Körper von mehreren Flächen begrenzt wird, so haben je zwei zusammenstossende Flächen eine Linie gemein, und kann es ausnahmsweise sein, dass sie in jedem Punkte dieser Linie eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben, in welchem Falle wir bekanntlich sagen, die Flächen *berühren sich nach der Linie*. Diese Linie tritt dann bei Betrachtung des Körpers nicht deutlich hervor, und braucht daher auch nicht

gezeichnet zu werden. In den meisten Fällen aber haben die beiden Flächen in der ihnen gemeinschaftlichen Linie keine gemeinschaftlichen Tangentialebenen; dann sagt man, die Flächen schneiden sich nach der Linie. Diese tritt dann deutlich heraus und muss bei der graphischen Bestimmung des Körpers gezeichnet werden. Wir haben daher anzugeben, wie man für je zwei Flächen, die sich schneiden, die Aufgabe löst, ihren Schnitt zu zeichnen. Diese Aufgabe wird uns in dem vorliegenden § beschäftigen.

Im Allgemeinen lösen wir diese Aufgabe dadurch, dass wir auf der einen der beiden Flächen ein System von Linien (am besten Erzeugende) annehmen, und suchen, wo diese einzelnen Linien die andere Fläche treffen, so dass wir wiederholt die Aufgabe: den Schnitt einer Linie mit einer Fläche zu suchen — zu lösen bekommen, und demnach zunächst erst diese Aufgabe zur Lösung bringen müssen. Wir haben demnach im Ganzen in vorliegendem § sowohl Schnitte von Flächen mit Flächen, als auch Schnitte von Linien mit Flächen aufzusuchen.

Da wir schon früher den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene, und den zweier Ebenen finden gelernt haben, so werden wir diese Aufgaben als Grundlage und als Muster für weitere Aufgaben über Schnitte betrachten, und den ganzen Stoff so anordnen, dass immer eine Aufgabe zur Lösung einer folgenden benützt werden kann.

316. Was nun die Schnitte von Flächen betrifft, so wollen wir beginnen mit den Schnitten von Ebenen mit krummen Flächen. Hier werden wir die Aufgabe in der Regel so lösen, dass wir auf der krummen Fläche ebene Erzeugende annehmen und suchen, wo diese die gegebene Ebene (𝔈) schneiden. Um aber wieder dies zu finden, legen wir durch die Erzeugende eine Hilfsebene (𝔋), suchen den Schnitt von 𝔋 und 𝔈, und wo dieser Schnitt die Erzeugende trifft, da ist ein Punkt des gesuchten Schnittes. Da wir hier blos Schnitte von Ebenen (𝔋 und 𝔈) zu suchen haben, so sind wir jetzt schon im Stande, Aufgaben der Art durchzubringen; wir wollen nur, bevor wir ein Beispiel durchführen, noch folgende allgemeine Bemerkungen machen.

Nehmen wir auf der krummen Fläche eine ebene Erzeugende an, und suchen, wo sie die Ebene 𝔈 schneidet, so kann es sein, dass sie diese schneidet, oder nicht; in letzterem Falle hat man die Zeichnungsoperationen zur Aufsuchung des Schnittpunktes umsonst gemacht, da man kein Resultat damit erzielt hat. Damit nun dies nicht öfter vorkommt, erwägt man, dass, wenn es Erzeugende giebt, die 𝔈 schneiden, und solche, die dies nicht thun, so kommt man auf dem Wege von den ersten Erzeugenden zu den letzteren auf eine Grenzerzeugende, welche die Ebene 𝔈 berührt. Diese suchen wir wo möglich auf; finden wir sie, so dürfen wir nur nachsehen, auf welcher Seite derselben die Erzeugenden liegen, die Schnittpunkte geben (und das ist meistens, wie sich zeigen wird, leicht zu finden). Giebt es aber keine Grenzerzeugende, so geben entweder alle Erzeugende Schnittpunkte oder es giebt keine einen Schnitt, was leicht dadurch ermittelt werden kann, dass man von irgend einer Erzeugenden untersucht, ob sie schneidet oder nicht.

Alle diese Untersuchungen sind ausserordentlich leicht durchzuführen, wenn die Ebene 𝔈 eine Lothebene (oder Stralenebene) ist. Wir werden daher bei den Aufsuchungen von Schnitten von Ebenen mit krummen Flächen die Tafeln so wählen, dass sie nicht blos gegen die krumme Fläche bequem liegen, sondern dass auch die Ebene 𝔈 eine Lothebene ist. Geht das nicht an, so wählen wir wo möglich ein neues Risssystem, in welchem die 𝔈 eine Lothebene oder Stralenebene ist.

317. Die Punkte des Schnittes einer krummen Fläche mit einer Ebene, welche auf den Grenzerzeugenden liegen, werden wir Grenzpunkte des Schnittes nennen, und zu den Hauptpunkten zählen. Weitere Hauptpunkte sind diejenigen, welche auf dem ersten oder zweiten Profile (s. 233) der Fläche liegen, und die wir Profilpunkte nennen wollen. Diese letzteren Punkte finden wir offenbar dadurch, dass wir suchen, wo das erste (oder zweite) Profil der Fläche die 𝔈 trifft.

Wollen wir nun den gesuchten Schnitt zeichnen, so suchen wir dessen Punkte in folgender Ordnung

1) Grenzpunkte (wodurch man zugleich erfährt, ob überhaupt ein Schnitt erfolgt oder nicht);

2) *erste und zweite Profilpunkte*; denn der erste Riss des ersten Profilpunktes liegt auf dem ersten Umriss, von ihm aus wird der erste Riss der gesuchten Curve theils gestrichelt, theils ausgezogen (s. 234) und in ihm berührt der erste Riss des Schnittes den ersten Umriss;

3) noch weitere Punkte (die wir, im Gegensatz zu den als *besondere* Punkte anzusehenden Hauptpunkten, *allgemeine* nennen wollen) und zwar so viele, als zur hinreichend genauen Zeichnung des Schnittes nothwendig erscheint. Zu dem Ende ist es aber gut, die Risse der Schnittcurve aus Kreisbögen zusammensetzen, und das ist möglich, wenn wir in den einzelnen Punkten dieser Risse Tangenten, und daraus Normalen durch Konstruktion erhalten können. Deshalb suchen wir in jedem Punkte des Schnittes die Tangente durch Konstruktion zu erhalten.

318. Die Tangente der Schnittcurve A einer krummen Fläche $\mathfrak{F}$ und einer Ebene $\mathfrak{E}$ in einem Punkte a von A berührt auch $\mathfrak{F}$ im Punkte a, und gehört demnach der Tangentialebene von $\mathfrak{F}$ im Punkte a an. Wir sehen daher:

> *Um die Tangente des Schnittes* A (von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$) *im Punkte* a *zu erhalten, zeichnet man die Tangentialebene von* $\mathfrak{F}$ *im Punkte* a; da in dieser und in der gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ die Tangente liegt, *so ist der Schnitt der Tangentialebene mit* $\mathfrak{E}$ *die gesuchte Tangente.*

Anm. Liegt der Punkt a in unendlicher Ferne, so wird die Tangente zur Asymptote von A, aber auch die Tangentialebene zur Asymptotenebene. Hat daher A einen unendlich fernen Punkt, dem eine Asymptotenebene von $\mathfrak{F}$ entspricht, die aber $\mathfrak{E}$ nicht eigentlich schneidet (d. h. mit $\mathfrak{E}$ parallel ist), so hat A keine Asymptote.

319. Die Aufsuchung des Schnittes A einer Fläche $\mathfrak{F}$ mit einer Ebene $\mathfrak{E}$ kann (oder muss) ausnahmsweise anders, als bisher angegeben, aufgesucht werden:

1) wenn voraussichtlich der Schnitt A eine *Erzeugende* von $\mathfrak{F}$ ist. In diesem Falle suchen wir blos den Punkt, in welchem $\mathfrak{E}$ von einer Schneidlinie der $\mathfrak{F}$ geschnitten wird, und

legen durch diese Schnittpunkte Erzeugende; jede dieser Erzeugenden, welche in 𝔈 liegt, gehört zum Schnitt A;

2) wenn der Riss der 𝔉 eine Linie ist (s. 232). In diesem Falle, wo 𝔉 ein auf einer Tafel, z. B. auf $\mathfrak{T}_1$ senkrechter Cylinder (A_1) ist, hat man schon den ersten Riss (A_1) der Schnittcurve; lässt man noch 𝔈 ⊥ $\mathfrak{T}_2$ sein, so hat man auch A_2 und somit A. — Wir wollen über den Fall 1) ein Beispiel machen.

320. Aufg. Es ist gegeben eine Kegelfläche (A, a) in der Weise, wie in Fig. 118, und eine Ebene (Ba), die also das Centrum des Kegels enthält; man soll den Schnitt der beiden gegebenen Flächen suchen.

Aufl. Man sucht den Schnitt der Schneidlinie A des Kegels mit der Ebene (Ba), indem man durch A die Ebene (A_2) legt, und (nach längst bekannten Regeln) den Schnitt der Ebenen A_2 und Ba aufsucht; durch die Punkte, wo dieser Schnitt und 𝔈 (A) sich schneiden, legen wir Erzeugende des Kegels, so sind das die verlangten Schnittlinien. — Die Ausführung der Zeichnung wollen wir dem Schüler überlassen.

321. Aufg. Den Schnitt B einer Drehfläche (A, a_1) mit einer 𝔈 (B_2) zu finden. Fig. 125.

Aufl. Wir haben vorausgesetzt, dass die Tafeln frei gewählt werden können, und haben die Wahl so getroffen, dass die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Axe (a_1) der Drehfläche (𝔇𝔉) ist, und dass die schneidende Ebene senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ steht. In diesem Falle sieht man aus der Zeichnung sofort:

1) Die durch die Punkte b, c (des Hauptmeridians und der Ebene B_2) gehenden Parallelkreise sind die Grenzerzeugenden; denn die ihnen benachbarten Kreise unterhalb derselben erreichen die 𝔈 (B_2) nicht mehr. Es sind also b, c Grenzpunkte; da diese aber auf dem Hauptmeridian liegen, der einen Theil des zweiten Profils der 𝔇𝔉 ist, so sind b, c zugleich zweite Profilpunkte;

2) der obere Polarkreis, der ebenfalls dem zweiten Profil der 𝔇𝔉 angehört, enthält die Punkte f, g (deren zweite Risse in f_2 liegen), während hier der untere Polarkreis keine Punkte des Schnittes enthält. Es sind also b, c, f, g zweite Profilpunkte;

3) der Aequator C schneidet die 𝔈 (B_2) nach den Punkten d, e (deren zweite Risse in dem Schnitte d_2 von C_2 und B_2 liegen). Es sind also d, e erste Profilpunkte;

4) will man einen allgemeinen Punkt des Schnittes finden, so nimmt man einen beliebigen Parallelkreis E an, sucht wo der zweite Riss von E (nemlich die zur 𝔎 Parallele E_2) B_2 schneidet, und findet damit die ersten Risse der Schnittpunkte h, k, deren zweite Risse in h_2 liegen.

Der zweite Riss unserer Schnittcurve liegt offenbar in B_2. Der erste Riss findet sich durch Verbindung der ersten Risse der Schnittpunkte durch eine Curve aus freier Hand, wobei man, wenn man es für nöthig hält, noch weitere allgemeine Punkte, und zwar an den Stellen, wo man über den Lauf der Curve noch nicht sicher ist, aufsucht.

Will man aber die Curve aus Kreisbögen zusammensetzen, so muss man Tangenten derselben konstruiren. Die Regel über diese Konstruktion haben wir oben (318) angegeben. Wir wollen diese Regel hier anwenden, und zwar für den allgemeinen Punkt h. Demgemäss suchen wir (nach 306) die Tangentialebene (Fm) für den 𝔓 (h), deren Schnitt mit 𝔈 (B_2) die verlangte Tangente ist. Legen wir daher durch m (dessen erster Riss in a_1 liegt) eine Gerade der Ebene (Fm) z. B. eine Parallele (H) zu F und suchen ihren Schnitt n mit 𝔈 (B_2), so ist nh die Tangente.

Anm. Will man die wahre Gestalt der Schnittcurve, so betrachtet man die 𝔈 (B_2) derselben als $\mathfrak{T}_3$, klappt diese um, und zeichnet in bekannter Art die dritten Risse der Schnittpunkte, durch deren Verbindung mit einer Curve man zum Ziele gelangt. Sucht man den dritten Riss der Tangente (hn), so ist sie Tangente am dritten Riss (also an der wahren Gestalt) im Punkte h.

322. Hat man den Schnitt einer geradlinigen Fläche 𝔉 mit einer Ebene 𝔈 zu finden, so wird diese von allen Erzeugenden der 𝔉 (in endlicher oder unendlicher Ferne) geschnitten, und giebt es demnach in diesem Falle keine Grenzpunkte. Wohl aber könnte man verlangen, diejenige Erzeugende anzugeben, die ∥ 𝔈 ist. Giebt es eine solche, so muss es auch auf dem Leitkegel der Fläche eine Erzeugende parallel

zu 𝔈 geben. Sucht man daher auf dem Leitkegel diejenige Erzeugende A, die || 𝔈 ist, und deren zweiter Riss, wenn 𝔈 eine 𝔈 (B_2) ist, || B_2 sein muss, so darf man nur noch die entsprechende zu A parallele Erzeugende (C) von 𝔉 suchen. Legt man noch in A eine Tangentialebene an den Leitkegel, so ist deren Schnitt mit 𝔈 (B_2) die Asymptote der Schnittcurve.

Die Aufsuchung der Schnittcurve selbst, wenn die 𝔈 eine Lothebene ist, geht nach den gegebenen Regeln so leicht, dass wir sie dem Schüler überlassen können, der gut thun wird, sich in solchen Aufgaben für Cylinder, Kegel, windschiefe und entwickelbare Flächen zu versuchen. Doch wollen wir darüber ein Beispiel durchführen.

323. Aufg. Es ist gegeben ein Drehungshyperboloid (A, a_1) und eine 𝔈 (B_2); man soll den Schnitt der beiden Flächen nebst Asymptote des Schnittes zeichnen. Fig. 126.

Aufl. Sucht man auf bekannte Art den Aequator C und die ersten Spuren D, E des Hyperboloids und seines Asymptotenkegels Ea (wir haben der Einfachheit wegen $\mathfrak{K}_2$ so angenommen, dass C_1 und E_1 zusammenfallen), so könnte man von den verlangten Schnittpunkten zunächst die Punkte auf C und D, und allgemeine Punkte dadurch erhalten, dass man auf der Fläche eine beliebige Erzeugende annähme, und ihren Schnitt mit 𝔈 (B_2) aufsuchte. Allein da wir wissen, dass unsere Fläche zweiter Ordnung ist, und daher von der Ebene B_2 nach einer Linie zweiter Ordnung geschnitten wird, so wollen wir zunächst untersuchen, was für einen Kegelschnitt wir erhalten. Zu dem Ende untersuchen wir, welche Erzeugende unserer Fläche und demnach welche Erzeugende des Asymptotenkegels || 𝔈 (B_2) sind. In unserer Zeichnung giebt es in der That zwei Erzeugende (F, G) des Asymptotenkegels || 𝔈 (B_2), also zwei unendlich ferne Punkte, und ist demnach unsere Schnittcurve eine Hyperbel, deren erster Riss wieder eine Hyperbel ist. [Wäre B_2 || A_2, so gäbe es nur eine Erzeugende || 𝔈 (B_2) und wir erhielten eine Parabel, wäre der spitze Winkel, den B_2 mit dem zweiten Riss der Axe (a_1) macht, grösser, als derselbe Winkel für A_2, so gäbe es keinen unendlich fernen Punkt und der Schnitt wäre eine Ellipse]. Legt man nun an den Asymptotenkegel eine Ebene (Ha), die ihn nach F berührt, so ist ihr Schnitt (F) mit 𝔈 (B_2) eine Asymptote,

und demnach Punkt b der Mittelpunkt der gesuchten Hyperbel, und von dem ersten Riss derselben b_1 der Mittelpunkt und J_1 eine Asymptote; da ausserdem noch c_1 ein Punkt von diesem Riss ist [denn c ist der Punkt, in welchem die erste Spur von $\mathfrak{E}$ (B_2) und in die Spur (D) der Fläche sich schneiden], so kann man die Hyperbel konstruiren.

Fig. 127. 324. **Aufg.** Den Schnitt einer Ovalfläche ($\mathfrak{O}\mathfrak{F}$) und einer Ebene zu finden.

Aufl. Betrachten wir die Axe der Fläche als Axe Z, und die Axe der Aequatorial-Ellipse (wenn es eine solche giebt, wenn nicht, die Axen irgend einer Parallelellipse) als X und Y, und sind die von der Ebene gegebenen Punkte (b, c, d) resp. auf diesen Coordinatenaxen gelegen, so nehmen wir die Tafeln so an, dass Z auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, und mit der $\mathfrak{G}$ (a_1) zusammenfällt (so dass X und Y parallel $\mathfrak{T}_1$ werden), die $\mathfrak{T}_2$ aber so, dass bc darauf senkrecht steht und unsere Ebene daher die $\mathfrak{E}$ (C_2) wird. Das zweite Profil unserer $\mathfrak{O}\mathfrak{F}$ ist dann eine dem Hauptmeridian affine Curve B. In unserer Zeichnung, wo wir als Hauptmeridian eine Ellipse voraussetzen, deren Halbaxen $\overline{a_2 m_2}$ und $\overline{a_1 n_1}$ sind, ist das erste Profil der Aequator A, und das zweite eine Ellipse B, deren erster Riss (B_1) durch die Punkte geht, in denen A_1 von Kantenlothen berührt wird. Ferner ist hier der verlangte Schnitt eine Ellipse D (D_2 fällt natürlich auf C_2), die gegen die Ebene B_1 schief symmetrisch liegt, deren zweiter Riss $\overline{g_2 h_2}$ und deren Mittelpunkt i ist (die ersten Risse von g, h, i liegen offenbar auf B_1, und i_2 in der Mitte von $\overline{g_2 h_2}$, i_1 in der Mitte von $\overline{g_1 h_1}$). Da ausserdem noch die Punkte e, f des Aequators A (deren zweite Risse in b_2 liegen) leicht gefunden werden können, und $\overline{g_1 h_1}$ ein Durchmesser der D_1 ist, dem die Sehne $\overline{e_1 f_1}$ konjugirt ist, so kann D_1 konstruirt werden.

325. **Aufg.** Den Schnitt einer Ebene $\mathfrak{E}$ mit einer Röhrenfläche zu finden.

Aufl. Man sucht wieder, wo ein erzeugender Kreis A der Röhrenfläche die Ebene B schneidet, und legt zu dem Ende durch A eine Hilfsebene ($\mathfrak{H}$), sucht den Schnitt B von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, und dann den Punkt a, in welchem B und A sich schneiden; der Punkt a ist ein Punkt der Schnittlinie. Bei der Ausführung

der Zeichnung betrachtet man die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{T}_3$ und klappt diese nebst dem darin liegenden Kreise A und der Geraden B um, und findet so den dritten Riss von a (aus welchem man in bekannter Art den ersten und zweiten Riss dieses Punktes erhalten kann) ohne Konstruktion von Hilfscurven, da der dritte Riss von A ein Kreis ist. — Wie man aber bei dieser Aufgabe die Hauptpunkte findet, das lässt sich aus den folgenden beiden Aufgaben ableiten, da eine Röhrenfläche mit ebener Mittellinie ein Spezialfall einer Simsfläche ist und wie diese behandelt werden kann, während eine Röhrenfläche mit unebener Mittellinie nur als Serpentine vorkommt, die zu den Schraubenflächen zählt, und daher wie diese behandelt werden kann.

326. Aufg. Den Schnitt einer Schraubenfläche mit einer Ebene zu finden. Fig. 128.

Aufl. Wir nehmen die Tafeln so an, dass die Axe der Fläche senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, und dass die $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zur Ebene steht, so dass wir haben die Schraubenfläche (A, a_1, h) und die Ebene $\mathfrak{E}$ (B_2) ist. Um nun einen Punkt des Schnittes zu finden, nimmt man einen Meridian C an, legt durch diesen die Ebene C_1, sucht den Schnitt dieser und der gegebenen Ebene, und wo dieser Schnitt und C sich schneiden, da ist ein Punkt der gesuchten Schnittlinie. Um aber die Zeichnung auszuführen, klappt man die Ebene C_1 (die man als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet) so um, dass C auf A, also C_3 auf A_2 fällt. Zu dem Ende muss man die $\mathfrak{E}$ (C_1) um die Axe (a_1) drehen, bis sie $\parallel \mathfrak{T}_2$ wird, und parallel zur Axe um den ebensovielten Theil von h verschieben, als der Winkel von A_1 und C_1 ein Theil von 360° ist (und zwar in unserer Zeichnung, wo h positiv ist, abwärts um $\frac{h}{6}$). Sucht man den dritten Riss der Schnittlinie ab, so kommt a_3 unter a_2 um $\frac{h}{6}$ zu liegen, und b_3 unter c_2 ebenfalls um $\frac{h}{6}$; wo nun a_3b_3 die C_3 (welche, wie schon gesagt, mit A_2 zusammenfällt) schneidet, da ist der dritte Riss (d_3) eines Schnittpunktes d. Schraubt man nun die $\mathfrak{E}$ (C_1) wieder zurück, d. h. dreht man sie wieder zurück, und hebt sie so viel, als man sie vorher gesenkt hat, so findet man d_1 und d_2, also den Schnittpunkt (ohne genöthigt zu sein, eine Hilfscurve zu konstruiren).

Durch Wiederholung dieses Verfahrens findet man so viele Schnittpunkte, als man will.

Bei der Wiederholung dieses Verfahrens findet man viele Gerade, wie die a_3b_3, welche eine Curve umhüllen, [d. h. eine Curve D_3 geben, die alle die Geraden (a_3b_3) berührt]. Legt man dann das Lineal so an, dass es D_3 und A_2 berührt, so erhält man als Berührungspunkt den dritten Riss des Grenzpunktes, und denselben Riss (E_3) der entsprechenden Schnittlinie [der 𝔈 (B_2) mit der Ebene des entsprechenden Meridians]. Der Winkel, den diese Meridianebene (E_1) mit 𝔈 (A_1) einschliesst, verhält sich zu 360 wie $\overline{a_2e_3} : h$. Hat man so E_1 gefunden, so erhält man durch Zurückschrauben dieser Ebene (von der Stellung parallel zur $\mathfrak{T}_2$ in die Lage E_1) die Risse des Grenzpunktes.

Anm. Es wird uns noch öfter begegnen, dass wir, um einen Punkt, wie hier den Grenzpunkt, zu finden eine Hilfscurve (wie hier D_3) benützen; eine solche Curve nennen wir von nun an Fehlercurve.

Fig. 111. 327. Aufg. Den Schnitt einer Simsfläche (AB) mit einer Ebene F_2 zu finden.

Aufl. Wir suchen, wo die Parallelen der Fläche die 𝔈 (F_2) schneiden. Nehmen wir z. B. die durch den Punkt b gehende Parallele G [deren zweiter Riss (G_2) || $\mathfrak{K}_2$ ist], so liegt der zweite Riss ihres Schnittpunktes (g_2) in G_2 und F_2; der erste desselben liegt im ersten Kantenloth des Punktes, und im ersten Riss von G also von A_1 soweit entfernt, als b_1 von c_1. Misst man daher mit dem Zirkel $\overline{b_1c_1}$ und setzt eine Spitze desselben im Kantenlothe von g so, dass die andere Spitze einen Kreis beschreibt, der A_1 berührt, (was man durch Probiren sehr rasch findet), so steht die erste Spitze in g_1.

Anm. Da die zweiten Risse der Parallelen Gerade || $\mathfrak{K}_2$ sind, so kann man sehr leicht erkennen, welche Parallelen die 𝔈 (G_2) schneiden und welche nicht, also auch, welche die Grenzpunkte geben.. Aus demselben Grunde findet man auch leicht die Punkte auf dem ersten Profil und auf den Polar-Parallelen, während man die Punkte auf dem Hauptmeridian durch ihre zweiten Risse (als Schnitte von B_2 und F_2, wenn solche vorhanden sind) leicht erhält.

328. In allen bisher behandelten Aufgaben über Schnitte von Flächen mit Ebenen haben wir, wie dies in der That gewöhnlich der Fall ist, vorausgesetzt, dass die Tafeln frei wählbar sind, und sie so angenommen, dass die Ebene eine Lothebene wurde. Sind aber die Tafeln gegeben, und zwar so, dass die Ebene keine Lothebene ist, und die Fläche auch nicht die bequeme Stellung gegen die Tafeln hat, die wir bisher voraussetzen konnten, so müssten wir durch einen Uebergang des Tafelsystems in ein anderes bequem liegendes die Aufgabe zu lösen suchen. Der Schüler wird gut thun, sich in solchen Aufgaben zu versuchen, und um ihm dazu Gelegenheit zu geben, wollen wir ihm eine solche Aufgabe vorlegen.

Es sind gegeben die Gerade ab (durch die Risse der Punkte a und b) und eine Ebene (cdf); man soll die wahre Gestalt des Schnittes dieser Ebene mit einem Drehungsellipsoid suchen, dessen Scheitel a und b sind, und dessen Aequator ein Kreis von gegebenem Halbmesser ist.

Unter Umständen kann eine Aufgabe vorkommen, in welcher der Schnitt einer Ebene (abc) mit einer krummen Fläche gesucht ist, und es zweckmässiger ist, anstatt durch ein neues Tafelsystem die Ebene zur Lothebene, sie zur Stralenebene zu machen. Als Beispiel hiefür kann eine Aufgabe vorgelegt werden, die der im ersten Bande dieses Buches (133. Fig. 61) behandelten Aufgabe ganz analog ist, nemlich den Schnitt einer 𝔈 (abc) mit einem Kegel (Ad) zu finden, wenn A_2 eine mit $𝔎_2$ nicht parallele Gerade ist. Auch hier werden wir am Besten zum Ziele kommen, wenn wir die 𝔈 (A_2) zur 𝔗′ und die Ebene (abc) zur Stralenebene machen, und ganz ähnlich, wie in 133 verfahren. Der Schüler mag die Durchführung dieser Aufgabe versuchen.

329. Ist bei irgend einer Aufgabe, in welcher der Schnitt einer Ebene mit einer Fläche gesucht wird, die Ebene von krummen oder geraden Linien begrenzt, so gilt die Schnittlinie nur so weit, als sie innerhalb der Grenzen liegt, und da wo dieselbe mit der Grenze zusammenkommt, ist der Punkt, in welchem diese Grenze die gegebene krumme Fläche schneidet. Demnach können wir nun auch die Aufgabe lösen:

Den Schnitt einer ebenen Linie mit einer Fläche zu suchen. Die Auflösung der Aufgabe geht darauf hinaus, dass wir den Schnitt der Ebene der Linie [ist diese gerade, so nehmen wir die Lothebene (eins oder zwei) der Geraden] mit der Fläche suchen; wo dieser Schnitt die Curve trifft, da ist der verlangte Schnittpunkt.

Hiebei werden wir, wie früher bei Geraden, das Stück der Curve, das in der Materie des von der Fläche begrenzten Körpers steckt, weglassen, dagegen das Stück vom ersten Riss des Schnittpunktes bis zum nächsten Umriss ausziehen oder stricheln, je nachdem der Punkt in Bezug $\mathfrak{T}_1$ sichtbar oder unsichtbar ist.

330. Obgleich wir eben gesehen haben, wie man den Schnitt einer ebenen Linie mit einer Fläche findet, so wollen wir doch diese Aufgabe noch näher besprechen, da sie in manchen Fällen auf andere Art gelöst wird. Namentlich ist es nicht immer am Zweckmässigsten, den Schnitt der Ebene der Linie (mit der Fläche) zu suchen, sondern ist es manchmal vortheilhafter, eine andere, die Linie enthaltende Fläche anzunehmen, wie dies in folgenden Beispielen sich herausstellen wird. Es giebt aber auch noch andere Mittel, die Aufgabe zu lösen, die ganz ähnlich sind denen, welche wir bei der Aufsuchung der Schnitte von Geraden und Prismen und Pyramiden angewendet haben.

Haben wir nemlich den Schnitt einer Geraden mit einem Cylinder oder Kegel zu finden, so können wir dasselbe Verfahren, wie früher für Prisma und Pyramide anwenden, und unterscheidet sich die Aufgabe jetzt von der früheren nur dadurch, dass die Schneidlinie (oder wenn der Cylinder auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, der erste Riss) des Cylinders oder Kegels krumm ist, während die Grundlinie (sie vertritt die Stelle der Schneidlinie) eines Prisma's oder einer Pyramide eine gebrochene Linie ist. Demnach wird man einsehen,

1) soll der Schnitt einer Geraden B mit einem Cylinder $A_{1\prime}$ (d. h. einem auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Cylinder, dessen erster Riss die Curve A_1 ist) gefunden werden, so erhält man im Schnitte von A_1 und B_1 die ersten und daraus die zweiten Risse der Schnittpunkte;

2) soll der Schnitt eines Kegels (Aa) mit einer Geraden B gefunden werden, so betrachtet man, wenn A in einer Ebene A_2 liegt, a als Centrum eines Stralensystems, und $\mathfrak{E}$ (A_2) als $\mathfrak{T}'$, so ist A der Stralenriss ($\mathfrak{R}'$) des Kegels; sucht man noch den $\mathfrak{R}'$ der Geraden B und wo dieser A schneidet, so erhält man den $\mathfrak{R}'$ des Schnittpunktes. Legt man noch durch den letzteren $\mathfrak{R}'$ einen Stral, so ist dessen Schnitt mit B der verlangte Schnittpunkt (liegt a in unendlicher Ferne, so geht der Kegel in einen Cylinder über).

Die Ausführung der Zeichnungen können wir füglich dem Schüler überlassen, besonders da die Fig. 60 die analoge Aufgabe für das Prisma behandelt.

331. Aufg. Den Schnitt eines Kegels (Aa) mit einer Kreislinie B (von dieser ist B_2, welches gleich dem Durchmesser von B ist, und der Mittelpunkt b gezeichnet, was genügt) zu finden, wenn A und B || $\mathfrak{T}_2$ sind. Fig. 129.

Aufl. Nimmt man wieder Stralenrisse zu Hilfe, so dass der Riss prim des Kegels eine Linie wird, so müssen die Stralen (Centralstralen) durch a gehen; zugleich nimmt man die $\mathfrak{T}'$ so an, dass sie A enthält, also mit $\mathfrak{E}$ (A_2) zusammenfällt, und demnach A selbst der Riss prim von A ist. Sucht man nun noch den Riss prim von B, so ist er ein Kreis B′, dessen Mittelpunkt (b′) der $\mathfrak{R}'$ des Mittelpunktes b von B ist. Der Halbmesser von B′ aber (wie der Schüler leicht herausfinden wird, wenn er sich den ganzen zweiten Riss des Stralenkegels von B gezeichnet denkt) wird gefunden, wenn man von a_2 nach dem Endpunkte (c_2) von B_2 zieht, wodurch man c'_2 erhält, und von b'_2 nach c'_2 misst. Da wo B′ und A sich schneiden, ist der Riss prim (d′) des Schnittpunktes. Zieht man nach durch d′ einen Stral, und sucht seinen Schnitt mit B, so erhält man den verlangten Punkt d. In unserem Beispiele giebt es noch einen Punkt e.

Hat man einen Cylinder statt des Kegels, so werden die Stralen zu Parallelstralen, und ist B′ mit B kongruent, also der Halbmesser von B′ dem von B gleich.

Anm. Man könnte die vorliegende Aufgabe auch ohne Stralenrisse nach der gewöhnlichen Regel lösen, indem man (nach 329) durch B eine Hilfsfläche legte. Nimmt man aber

als solche die Ebene von B an, so würde der Schnitt derselben mit dem Kegel eine Curve geben, die man konstruiren müsste. Durch Ueberlegung würde man finden, dass es am Zweckmässigsten ist, durch B den Kegel (Ba) zu legen, denn dieser schneidet den Kegel (Aa) nach Geraden. Thut man aber dies, so kommt man auf dieselben Zeichnungsoperationen, wie diejenigen, welche wir ausgeführt haben, nur führen die erhaltenen Linien andere Namen, wie vorher. So z. B. ist der durch d′ gehende Stral der Schnitt der beiden Kegel (Aa und Ba).

Fig. 130. 332. Hat man den Schnitt einer Drehfläche (A, a_1) mit einer Geraden B zu finden, so kann man (nach 329) die Lothebene der B, z. B. die 𝔈 (B_1) als Hilfsfläche anwenden, und ist dies auch zu empfehlen, wenn der Schnitt dieser Ebene mit der 𝔇𝔉 eine uns bekannte Curve z. B. ein Kegelschnitt ist. Im Allgemeinen ist es viel bequemer, durch B das Drehungshyperboloid (B a_1) zu legen. Hat man nemlich die Tafeln so angenommen, dass B || $\mathfrak{T}_2$, so ist B_2 eine Asymptote der Hyperbel C, welche den Hauptmeridian unseres Drehungs-Hyperboloids vorstellt, während die Entfernung von a_1 nach B_1 die reele Halbaxe dieser Hyperbel ist. Ein etwas geübter Zeichner kann daher den zweiten Riss (C_2) dieser Curve und somit ihren Schnitt (b und c) mit A ziemlich gut provisorisch angeben. Will man b nun genau, so sucht man in der Nähe des provisorischen b (rechts und links von diesem Punkt) zwei definitive Punkte der Hyperbel, verbindet sie durch den graphischen Krümmungskreis (175), so ist dessen Schnitt mit A der definitive Punkt b. Legt man nun durch b einen Parallelkreis D der 𝔇𝔉 (A, a_1), so gehört er auch der 𝔇𝔉 (B, a_1) an und der Schnitt von D und B ist der verlangte Punkt d. In gleicher Art erhält man in unserer Zeichnung einen zweiten Schnittpunkt.

Anm. So wie wir hier durch eine provisorische Zeichnung von C_2 in die Lage kamen, von dieser Curve nur ein kleines Stück (hier nur ein graphisches Element) zeichnen zu müssen, so werden wir immer, wenn wir von einer Curve nur einen einzelnen Punkt brauchen, dahin trachten, durch eine provisorische Zeichnung die Stelle zu finden, in deren Nachbarschaft der Punkt liegt. Dies kommt

uns dann besonders zu statten, wenn wir die Aufgabe haben, nicht den einzelnen Punkt aufzusuchen, sondern zu untersuchen, ob es einen solchen Punkt giebt. In unserer Figur sagt uns schon die provisorische Zeichnung, dass zwei Schnittpunkte von A und C zu erhalten sind.

333. Hat man eine Drehfläche (𝔇𝔉) und eine Kreislinie, deren Axe (Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises und senkrecht zu seiner Ebene) die der 𝔇𝔉 schneidet, so nimmt man die Tafeln so an, dass die $𝔗_1$ senkrecht zur Axe (a_1) der 𝔇𝔉 (A, a_1) steht, und dass $𝔗_2$ parallel zur Axe (B) der Kreislinie C (von dieser ist gegeben der Mittelpunkt b und der zweite Riss C_2, dessen Länge gleich dem Durchmesser von C ist) ist, also senkrecht zur Ebene (C_2) des Kreises. Ueberlegt man nun, welche Hilfsfläche wir am Besten durch C legen, wenn dessen Schnitt mit 𝔇𝔉 (A, a_1) gesucht werden soll, so werden wir finden, dass dies eine Kugel ist, die im Schnitte a der beiden Axen (der 𝔇𝔉 und des Kreises) ihr Centrum hat; der Hauptmeridian dieser Kugel ist dann die Kreislinie D (D_1 fällt auf A_1) und der durch den Schnittpunkt von D und A gezogene Parallelkreis E der 𝔇𝔉 (A, a_1) gehört auch der Kugel an. Es schneidet also die Hilfskugel die 𝔇𝔉 (A, a_1) nach dem Kreise E (dessen erster Riss ein Kreis und dessen zweiter Riss eine Gerade ist); die Punkte c, d, nach denen sich C und E schneiden, sind die gesuchten Schnitte, die man so gefunden hat, ohne Konstruktion von Hilfscurven. Fig. 131.

334. Eine Anwendung des Schnittes einer Linie mit einer Fläche erhalten wir in folgenden zwei Fällen.

1) Wenn auf einer Fläche (𝔉) ein Punkt a gesucht wird, dessen erster Riss (a_1) gegeben ist. In diesem Falle liegt der 𝔓 (a) auch auf der 𝔊 (a_1); er ist also der Schnitt der 𝔊 (a_1) mit 𝔉. Hier können wir als Hilfsfläche eine Ebene annehmen, die 𝔊 (a_1) enthält, und daher erste Lothebene ist; wir wählen dann diejenige Lothebene, die am Einfachsten zum Ziele führt.

2) Wenn wir untersuchen sollen, ob auf einer Erzeugenden A ein Doppelpunkt der Fläche 𝔉 liegt. Soll dies der Fall sein, so muss A von einer anderen Erzeugenden (B) geschnitten werden. Die B muss demnach, wenn wir durch A eine Hilfsfläche (𝔄)

legen, und B nicht zufällig in 𝔄 liegt, dieses 𝔄 in einem Punkte von A schneiden. Sucht man daher den Schnitt der 𝔄 mit allen Erzeugenden von 𝔉, also den Schnitt C der 𝔄 mit 𝔉, so kann nur der Punkt, in welchem A und C sich schneiden, und der also ganz so gefunden wird, wie der Schnitt von A und 𝔉 ein Doppelpunkt sein. Dieser Punkt ist aber nur dann ein Doppelpunkt, wenn es durch ihn noch eine zweite Erzeugende der 𝔉 giebt. Würde in der 𝔄 noch eine zweite Erzeugende (D) der 𝔉 liegen, die A in d schneidet und würden die Nachbarinnen von D, die Erzeugenden E und F, die 𝔄 in Punkten e, f (die d benachbart sind) treffen, so würde d wieder als Schnitt der A mit 𝔉 sich herausstellen. Wir sehen demnach:

> Soll man auf einer Erzeugenden A einer Fläche 𝔉 einen Doppelpunkt finden, so sucht man mit Hilfe einer durch A gelegten Fläche 𝔄 den Schnitt a von A und 𝔉 und sieht nach, ob es durch a noch eine zweite Erzeugende giebt; in diesem Falle ist a ein Doppelpunkt. Ausserdem kann es in der Fläche 𝔄 noch eine zweite Erzeugende geben, die A in b schneidet; dann ist b ebenfalls ein Doppelpunkt.

335. Da wir gelernt haben, wie man den Schnitt einer ebenen Linie mit einer Fläche findet, und die Erzeugenden einer Fläche stets entweder Gerade oder ebene Curven sind oder sein können, so haben wir das Mittel in der Hand, um Aufgaben „über Schnitte von krummen Flächen untereinander" zu lösen. Denn der Weg, den wir zur Lösung derartiger Aufgaben gewöhnlich einschlagen, ist der, dass wir suchen, wo die Erzeugenden der einen Fläche die andere schneiden; wählen wir also ebene Erzeugende, so haben wir wiederholt die Aufgabe zu lösen: den Schnitt einer ebenen Curve mit einer Fläche zu finden, und diese Aufgabe können wir ja schon lösen. Nur in einem Falle müssen oder wollen wir eine andere Lösung anwenden. Wenn nemlich der Schnitt der beiden Flächen eine ihnen gemeinschaftliche Erzeugende ist (welche also durch einen einzigen Punkt schon bestimmt werden kann), so ist es zuweilen nothwendig, jedenfalls zweckmässig, wenn man einen Punkt dieser Erzeugenden sich

dadurch zu verschaffen sucht, dass man die Punkte zeichnet, in welchen eine Schneidlinie der einen Fläche die andere trifft, und jeder solche Punkt, durch den eine beider Flächen gemeinschaftliche Erzeugende möglich ist, führt uns zum Ziele. Ist nun die angenommene Schneidlinie eben, so haben wir wieder den Schnitt einer ebenen Linie mit einer krummen Fläche zu suchen; ist sie aber uneben, wie dies bei den Schraubenflächen der Fall ist, so stossen wir auf eine Aufgabe, die wir noch nicht lösen können, zu deren Lösung uns aber bald Gelegenheit geboten wird.

336. Sucht man, wo die Erzeugenden der einen Fläche (𝔄) die andere Fläche (𝔅) schneiden, so wird man zunächst fragen, auf welcher der beiden Flächen sollen Erzeugende angenommen werden? Die Beantwortung dieser Frage ist sehr wichtig, denn die Zeichnung gestaltet sich oft viel einfacher, wenn man die Erzeugenden auf 𝔄, als wenn man sie auf 𝔅 annimmt. Deshalb muss man, ehe man zur Ausführung der Zeichnung schreitet, überlegen, auf welchem Wege man am Besten fährt; wie dies in der Folge durch Beispiele erläutert werden soll.

Hat man sich dafür entschieden, dass man suchen will, wo die Erzeugenden von 𝔄 die 𝔅 schneiden, so kann es sein, dass es Erzeugende auf 𝔄 giebt, die 𝔅 schneiden, und solche, die es nicht thun, und demnach Grenzerzeugende vorhanden sind, die man, wo möglich, vor Allem nebst ihren Schnittpunkten, Grenzpunkten, aufsucht. Ausser diesen Grenzpunkten, welche wir zu den Hauptpunkten zählen, sind noch weitere Hauptpunkte die Profilpunkte, d. i. diejenigen, welche auf den Profilen (eins und zwei) der Flächen liegen. Sobald wir diese Hauptpunkte, mit denen wir den Anfang machen, haben, werden wir die Risse der Schnittcurve, so gut es gehen will, aus freier Hand zeichnen (und dabei beobachten, dass wir richtig in Bezug auf Sichtbarkeit der Curventheile verfahren), und diese Zeichnung als definitiv ansehen dürfen, wenn keine besondere Genauigkeit bei der Zeichnung der Schnittcurve erforderlich ist, dagegen noch weitere Schnittpunkte (und zwar an den Stellen, wo der Lauf der Curve noch nicht klar genug hervortritt) aufsuchen, wenn wir solche nöthig zu haben glauben. Wollen wir aber

die Curve besonders gut zeichnen, so werden wir ihre Risse aus Bögen zusammensetzen, und ist daher nöthig, in jedem Risse die Normalen (oder die Tangenten) durch Konstruktion angeben zu können.

337. Hat man für eine Schnittcurve zweier Flächen 𝔄 und 𝔅 eine Tangente bei gegebenem Berührungspunkte a zu konstruiren, so bedenke man, dass diese Tangente, weil sie eine Linie beider Flächen berührt, auch Tangente an beiden Flächen ist. Sucht man daher eine Tangente der Fläche 𝔄 für den Punkt a, so ist deren Ort in der Regel eine Tangentialebene an 𝔄 im Punkte a. Demnach findet man die Tangente der Schnittcurve zweier Flächen (𝔄 und 𝔅) für einen Punkt a, wenn man in a an beide Flächen Tangentialebenen legt, und deren Schnitt sucht (von diesem Schnitte braucht man natürlich nur einen Punkt zu finden, da man einen solchen, nemlich a, schon hat). Würden ausnahmsweise die beiden Tangentialebenen zusammenfallen, und sich demnach 𝔄 und 𝔅 in a berühren, so wäre die Tangente in a zunächst nicht zu finden; man würde dann für Punkte der Schnittcurve die rechts und links von a in dessen Nähe liegen, die Konstruktion ausführen.

Anm. In besonderen Fällen, in denen man die Normalen der Schnittflächen leicht findet, kann man die Tangente in einem Punkte a der Schnittlinie zweier Flächen auch dadurch finden, dass sie auf den dem Punkte a entsprechenden Normalen der beiden Flächen, folglich auch auf der Ebene dieser Normalen senkrecht steht.

338. Nachdem wir nun die allgemeinen Regeln, die wir bei der Konstruktion des Schnittes zweier Flächen befolgen, auseinander gesetzt haben, wollen wir zu Beispielen übergehen, die uns theils über die Wahl der Fläche, auf der man am Zweckmässigsten die Erzeugenden annimmt, theils über die zweckmässigste Annahme der Tafeln, über Ausziehen und Stricheln der Schnitte u. dgl. Aufschlüsse geben sollen. Es würde uns zu weit führen, wollten wir die Schnitte für alle möglichen Flächenpaare ausführen. Wir beschränken daher unsere Beispiele auf solche Aufgaben, die für die Praxis ganz besonderes Interesse

haben, und das sind diejenigen, in welchen als schneidende Flächen Cylinder, Kegel und Drehflächen vorkommen.

Sind die sich schneidende Flächen Cylinder oder Kegel, so stimmen die Lösungen der Aufgaben, der Hauptsache nach, in ähnlicher Art wie oben (328) mit denen für Pyramiden und Prismen überein. Wir glauben daher den Schüler im Allgemeinen auf jene Aufgaben (136—141) verweisen und uns damit begnügen zu dürfen, nur eine derartige Aufgabe vollständig zu lösen.

339. Aufg. Es sind gegeben zwei Cylinder, jeder von zwei Ebenen begrenzt; man sucht ihren Durchschnitt. Fig. 132.

Aufl. Man wählt die Tafeln so, dass die $\mathfrak{T}_1$ eine Grundfläche A des einen Cylinders enthält, und die $\mathfrak{T}_2$ noch auf einer Grundfläche B des anderen Cylinders senkrecht steht (vergl. 141), so dass der erste Cylinder die $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ (A C), der zweite die $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ (BD) ist, und nimmt ähnlich wie früher (141) und aus denselben Gründen wie dort, eine Ebene zu Hilfe, die zu beiden Cylindern parallel ist, und die beiden Ebenen A_2, B_2 nach einer gebrochenen Linie schneidet, die ihren Brechungspunkt in der Schnittlinie, $\mathfrak{G}$ (a_2), der beiden Ebenen hat. Nimmt man daher einen Punkt b im Raume an [am Bequemsten in der Art, wie er in unserer Zeichnung (Fig. 132) angenommen ist] und legt dadurch Parallele zu C und D, so schneidet die Ebene dieser Parallelen die $\mathfrak{E}$ (A_2) nach der Geraden E und die Ebene (B_2) nach der Geraden F, also beide Ebenen (A_2, B_2) nach einer gebrochenen Linie dac, die ihren Brechungspunkt a in der Schnittlinie (a_1) der Ebenen (A_2, B_2) hat. Diese gebrochene Linie selbst liefert uns hier keine Schnittpunkte, da sie die Grundlinie B nicht schneidet. Verschiebt man aber die Hilfsebene parallel und damit die Linie dab parallel so, dass ihr Brechungspunkt in der $\mathfrak{G}$ (a_1) bleibt, und dass sie mit A und B Punkte gemein hat, so schneidet diese Ebene beide Cylinder nach Erzeugenden, deren gegenseitige Schnittpunkte gesuchte Punkte sind. Verschieben wir dab so, dass sie A oder B berührt, so erhalten wir die Stralenrisse der Grenzpunkte (1, 2, 3, 4) und daraus in ähnlicher Art wie früher (141) die ersten und zweiten Risse. Verschieben wir so, dass einer der Cylinder nach einem Profil (z. B. nach einem ersten Profil) geschnitten wird, so

erhalten wir Profilpunkte (hier die Punkte 5 und 6) ausserdem können wir noch so viele allgemeine Punkte (z. B. 7 und 8) finden, als wir für nothwendig erachten. Verbinden wir zunächst die ersten Risse der Hauptpunkte (1, 2, 3, 4, 5, 6) in derselben Aufeinanderfolge wie früher (141), so werden wir finden, dass wir noch in der Gegend 7 und 8 weitere Punkte (7, 8) brauchen, um den Lauf des ersten Risses der Schnittcurve genauer erkennen zu können.

Für die Hauptpunkte sind die Tangenten leicht ersichtlich; denn die Curve muss in den Grenzpunkten die Grenzerzeugenden berühren, und der erste Riss der Curve muss für einen Profilpunkt den ersten Umriss berühren (wie dies für 5 und 6 der Fall ist). Will man aber für einen allgemeinen Punkt (z. B. den Punkt 8) die Tangente konstruiren, so legt man in ihm eine Tangentialebene an den Cylinder (AC), und eine Tangentialebene an den Cylinder (BD) nach bekannten Regeln (s. 301), und sucht einen Punkt des Schnittes beider Tangentialebenen (die Aufsuchung desselben wollen wir dem Schüler überlassen), so ist seine Verbindungslinie mit dem Punkte (8) die verlangte Tangente.

Anm. Die Aufsuchung des zweiten Risses der Schnittcurve, sowie die Untersuchung darüber, was gestrichelt und ausgezogen werden muss (es geht dies so, wie bei Prismen), wollen wir dem Schüler überlassen, und nur bemerken, dass wir im ersten Riss alles so gezeichnet haben, wie es sein soll. — Ebenso mag sich der Schüler versuchen, in der der vorliegenden gleichen Aufgabe über zwei Pyramiden oder eine Pyramide und ein Prisma. Desgleichen über die den Nummern (136—140) analogen Aufgaben über Cylinder und Kegel.

340. Hat man den Schnitt einer geradlinigen Fläche (𝔉) mit einem Cylinder (oder Kegel) zu suchen, so sucht man, wo die Erzeugenden der 𝔉 den Cylinder (oder Kegel) schneiden, und hat daher die oben [330. 2)] gelöste Aufgabe zu wiederholen, d. h. man betrachtet die Erzeugenden des Cylinders als Stralen und die Ebene seiner Schneidlinie als 𝔗′, und sucht zunächst die Risse prim (𝔑′) und daraus die ersten und zweiten Risse der Schnittpunkte. Sucht man bei dieser Gelegenheit die 𝔑′ von vielen Erzeugenden der 𝔉, so umhüllen sie eine Curve,

deren Tangenten $\mathfrak{N}'$ von Erzeugenden der $\mathfrak{F}$ sind. Dadurch ist man im Stande, auch die Hauptpunkte des Schnittes zu finden. Denn da die $\mathfrak{N}'$ der Grenzerzeugenden die Schneidlinie des Cylinders berühren, so können wir den $\mathfrak{N}'$ (und daraus den ersten und zweiten Riss) der Grenzerzeugenden finden. In ähnlicher Art können wir den $\mathfrak{N}'$ derjenigen Erzeugenden von $\mathfrak{F}$ angeben, die einen Punkt auf dem ersten Profil des Cylinders liefert, denn ihr $\mathfrak{N}'$ muss durch den $\mathfrak{N}'$ des Cylinder-Profils gehen.

341. Haben wir den Schnitt eines Kegels mit einer Dreh- Fig. 133.
fläche zu finden, so nehmen wir die $\mathfrak{T}_1$ wieder senkrecht zur Axe der Drehfläche ($\mathfrak{D}\mathfrak{F}$), so dass diese eine $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) wird, und die $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zur Ebene der Schneidlinie des Kegels steht. Wir suchen zunächst den Schnitt (B) des Kegels mit der $\mathfrak{T}_1$ (s. 322) und nun den Schnitt des Kegels (B, b) mit $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1).

Um nun diesen Schnitt zu finden, suchen wir, wo die Parallelkreise der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ den Kegel schneiden, und haben so die oben (331) gelöste Aufgabe zu wiederholen, wobei, wie sich dort gezeigt hat, keinerlei Hilfscurven konstruirt werden brauchen. Allerdings haben wir die Curve B zeichnen müssen; allein wenn wir suchen wollten, wo die Erzeugenden des Kegels die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ schneiden, so müssten wir für jede Erzeugende eine Hilfscurve konstruiren, und hätten also eine viel mühsamere Arbeit.

Sind nun (Fig. 133) die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) und die $\mathfrak{K}\mathfrak{F}$ (Bb) gegeben (wir haben der Deutlichkeit wegen die ursprünglich gegebene Schneidlinie des Kegels weggelassen), so finden wir, wie schon gesagt, einen allgemeinen Punkt des Schnittes, wenn wir auf der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ einen Parallelkreis annehmen, und (nach 331) mittelst Stralenrissen (b als Centrum der Stralen und die $\mathfrak{T}_1$ als $\mathfrak{T}'$) die auf diesem Parallelkreis liegenden Schnittpunkte aufsuchen. Da es uns aber begegnen kann, dass der angenommene Parallelkreis (und auch noch ein zweiter, dritter etc.) keinen Schnitt geben, so wollen wir den Grenz-Parallelkreis aufsuchen. Zur unmittelbaren Auffindung desselben haben wir aber hier keine Anhaltspunkte. Wir wollen nun an diesem Beispiele zeigen, wie man die Grenzpunkte mittelst einer Fehlercurve (s. 326. Anm.) auffinden kann.

Der Grenzparallelkreis ist ein Kreis, der folgende Bedingungen erfüllen muss.

1) Sein Mittelpunkt liegt in der Axe (a_1);
2) seine Ebene steht zu dieser Axe senkrecht;
3) er schneidet den Meridian (A) der 𝔇𝔉;
4) er berührt den Kegel (Bb), also sein 𝔑′ berührt der Riss prim (B) des Kegels.

Nimmt man nun auf der 𝔇𝔉 einen beliebigen Parallelkreis C an und sucht (nach 331) seinen 𝔑′ (C′), so schneidet dieser in unserer Zeichnung die Spur B des Kegels (C′ könnte auch berühren, und wäre dann C zufällig Grenzlinie, oder auch so liegen, dass es mit B nichts gemein hat), und ist daher C kein Grenzkreis. Sollte der angenommene Kreis denselben Mittelpunkt haben, seine Ebene auch || $\mathfrak{T}_1$ sein und zugleich den Kegel berühren, so müsste sein 𝔑′ (D′) die Spur B berühren und dem entsprechend der Kreis D selbst einen Halbmesser haben, dessen Grösse sich leicht mittelst D′ finden lässt, so dass $\overline{d_2 e_2}$ der zweite Riss von D wäre. Sucht man nun alle derartigen Kreise für die verschiedenen Punkte der Axe (a_1) auf, so bilden sie eine neue 𝔇𝔉 mit derselben Axe (a_2) und einem neuen Meridian E. Die 𝔈 (E) ist dann die Fehlercurve und ihr Schnitt mit A führt auf den gesuchten Grenzkreis F, dessen Riss prim (F′) an B in einem Punkte berührt, der den 𝔑′ des Grenzpunktes f vorstellt. Hat man so den Grenzpunkt gefunden, und aus der bisherigen Zeichnungsoperation erfahren, dass unter F die Kreise liegen, welche den Kegel (Bb) schneiden, so kann man auf die schon oben angedeute Art (nach 331) noch so viele weitere Punkte finden, als man will. Sollen aber Profipunkte der 𝔇𝔉 oder des Kegels gefunden werden, so müsste man suchen, wo das entsprechende Profil der einen Fläche die andere schneidet, was zu unbequemen Curvenkonstruktionen führen würde, die man hier und in ähnlicher Art auch in anderen Fällen umgehen kann. Will man z. B. den Punkt g auf dem Hauptmeridian A suchen, in dessen zweitem Riss (g_2) der zweite Riss (A_2) des Hauptmeridians (der zweite Umriss der 𝔇𝔉) von dem zweiten Riss der gesuchten Schnittcurve berührt wird, so bedenke man, dass der erste Riss von g (also g_1) ein Schnittpunkt von A_1 mit dem ersten Riss der Schnittcurve ist. Sucht

man daher zwei Punkte der Schnittcurve, deren ersten Risse rechts und links von A_1 nahe an diesem liegen, so kann man durch Verbindung dieser ersten Risse g_1, und daraus g_2 erhalten.

Um also einen Punkt auf dem ersten (zweiten) Profil einer Fläche zu finden, suchen wir zuerst seinen zweiten (ersten) Riss und daraus den ersten (zweiten).

Ist in unseren Aufgaben statt des Kegels ein Cylinder gegeben, so ist das Verfahren ein ganz ähnliches, wie das eben angeführte; nur kann man unter Umständen die Fehlercurve leichter erhalten. Denn, wie oben bemerkt, ist die Fehlercurve der Meridian einer Drehfläche, deren Parallelkreise den Kegel (oder Cylinder, wenn ein solcher die Stelle des Kegels vertritt) berühren. Dreht man daher die Axe der gegebenen Drehfläche mit dem (in fester Verbindung zu ihr befindlichen) Kegel (oder Cylinder) um, so beschreibt der Kegel (als Umhüllte) eine 𝔇𝔉, deren Parallelkreise den gegebenen Kegel berühren, also eine 𝔇𝔉 deren Meridian die Fehlercurve ist.

Haben wir nun statt des Kegels einen Kreiscylinder, so beschreibt dessen Axe, wenn wir ihn mit der Axe der 𝔇𝔉 umdrehen, ein einfaches Drehungs-Hyperboloid, dessen Hauptmeridian eine Hyperbel H ist, die man leicht darstellen kann. Betrachtet man noch den Cylinder als erzeugt durch eine Kugel, deren Centrum sich auf der Axe des Cylinders fortbewegt, so wird man sich leicht überzeugen, dass die von dem Cylinder (als Umhüllte) erzeugte 𝔇𝔉 zum Meridian eine zur Hyperbel H parallele Curve K hat, welche also die Fehlercurve vorstellt. Will man nun den Schritt von K mit dem Hauptmeridian der gegebenen 𝔇𝔉 finden, so wird man gut thun H und K aus freier Hand provisorisch zu zeichnen, wodurch man den verlangten Punkt ohne viel Mühe (und wenn man graphische Krümmungskreise der H und K anwendet graphisch genau) findet.

Anm. Wenn das Centrum des gegebenen Kegels in der Axe (a_1) liegt, so behalten wir das Verfahren bei, nur fallen dann die Mittelpunkte der 𝔎′ aller Parallelkreise nach a_1, und ist es dadurch möglich ohne Fehlercurve die Grenzpunkte, so wie direkt die Profilpunkte zu finden, wie man sich leicht über-

zeugen kann, wenn man eine derartige Aufgabe versucht. Ebenso vereinfacht sich die Konstruktion, wenn statt des Kegels ein Cylinder gegeben ist, dessen Richtung parallel zur Axe (a_1) ist, und der daher ein Lothcylinder wird. — Weiter haben wir zu bemerken, dass wenn B eine Kreislinie ist (in unserer Zeichnung haben wir zwar B als eine Kreislinie gezeichnet, aber das Verfahren so eingerichtet, dass es für jede Gestalt von B gilt), so können wir auch die Punkte der gesuchten Schnittlinie durch Ebenen $\parallel \mathfrak{T}_1$ finden; jede solche Ebene schneidet beide gegebene Flächen nach Kreisen (deren ersten Risse wieder Kreise sind), die zum Schnittpunkt einen Punkt der gesuchten Schnittlinie liefern.

Fig. 134. 342. Da, namentlich in Bauwesen bei Gewölbkonstruktionen, sehr oft die Aufgabe vorkommt, den Schnitt eines Cylinders mit einer Fläche zu finden, wenn die gegenseitigen Lagen dieser Flächen eine besonders einfache ist, so wollen wir hier eine derartige Aufgabe lösen, die dem Schüler zugleich zeigen soll, wie man überhaupt derartige Aufgaben behandelt.

Aufg. Es sind gegeben ein Simsfläche (A, B) und ein Cylinder, dessen Richtung mit der Ebene der Direktrix A parallel ist; man soll die Schnittlinie beider Flächen suchen.

Aufl. Sobald die eine der beiden Flächen ein Cylinder ist, so nimmt man gerne die Tafeln so an, dass eine derselben auf dem Cylinder senkrecht steht; man thut dies auch stets, wenn dabei die Stellung der anderen Fläche gegen die Tafeln nicht unbequem wird. Bei der einfachen Stellung unserer Flächen gegeneinander kann man auch der Simsfläche eine bequeme Lage gegen die Tafeln geben. Wir nehmen daher (wie in Fig. 134) die Tafeln so an, dass die Directrix A in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie auf dem Cylinder (C_2) senkrecht steht, dann liegt in C_2 schon der zweite Riss unserer Schnittcurve (C). Um nun einzelne Schnittpunkte zu erhalten, suchen wir, wo die Parallelen der Simsfläche den Cylinder schneiden. Nehmen wir z. B. die Parallele D (deren zweiter Riss die zur $\mathfrak{K}_2$ parallele Gerade D_2 ist) an, so erhält man den zweiten Riss (a_2) eines Schnittpunktes (a), dessen erster Riss von A_1 so weit entfernt ist, als a_2 von der Axe (E_2) der Curve B_2. Mißt man daher diese Entfernung mit

einem Zirkel und setzt dessen eine Spitze im ersten Kantenloth von a so ein, das ein mit der anderen Spitze beschriebener Kreis die A_1 berührt, so hat man a_1. Man kann also hier einen Punkt des Schnittes ohne Curven-Konstruktion finden. Aber auch die Hauptpunkte lassen sich leicht erhalten. Der Grenzpunkt (b) liegt offenbar in der Parallelebene, deren zweiter Riss (F_2) die C_2 berührt. Die Punkte auf dem ersten Profil des Cylinders (und der Simsfläche) liegen in den Parallelen, deren zweiter Riss (A_2) in der $\mathfrak{K}_2$ liegt. Weitere Hauptpunkte sind in unserer Zeichnung nicht vorhanden. — Der Schüler mag darüber nachdenken, welche derartigen Punkte noch vorhanden sein konnten, und wie man sie fände.

Will man die gefundene Schnittcurve sauber zeichnen, so muss man sie aus Bögen zusammensetzen, und zu dem Ende in ihren einzelnen Punkten Tangenten konstruiren, was hier nach der darüber gegebenen Regel (337) sehr leicht ausführbar ist. Suchen wir nemlich für den Punkt a (nach 302 und 312) die Tangentialebenen an dem Cylinder und der Simsfläche, so können wir sehr leicht die ersten Spuren dieser Ebenen angeben, deren Schnittpunkt mit a verbunden die Tangente in a liefert.

343. Nachdem wir uns überzeugt haben, dass es nicht schwer hält, den Schnitt eines Loth-Cylinders mit einer Fläche aufzufinden, sind wir im Stande, die Aufgabe zu lösen:

Den Schnitt einer unebenen (gewundenen) Curve A mit einer Fläche ($\mathfrak{F}$) zu finden.

Um diese Aufgabe zu lösen, legen wir durch die A eine Hilfsfläche ($\mathfrak{H}$), suchen den Schnitt (B) von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ und wo A und B sich schneiden, da ist der gesuchte Schnitt. Die einzelnen hier vorkommenden Aufgaben können wir jetzt lösen; es fragt sich nur, welche Hilfsfläche wir durch A legen sollen? Die Antwort auf diese Frage ist einfach die: Wenn nicht durch besondere Umstände allenfalls sich eine bequeme Hilfsfläche darbietet, so legen wir durch A ihren ersten oder zweiten Lothcylinder, also den Cylinder A_1 oder A_2, und von diesen beiden den bequemeren.

Haben wir z. B. den Schnitt einer Schraubenlinie mit einer Drehfläche zu finden, deren Axe mit der der Schraubenlinie parallel ist, so nimmt man die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu

den beiden Axen (der 𝔇𝔉 und Schraubenlinie) ist, so dass der erste Riss der Schraubenlinie (A) eine Kreislinie (A_1) wird. Sucht man nun den Schnitt B des Cylinders A_1 mit der 𝔇𝔉, so ist der Schnittpunkt von B und A der gesuchte Punkt.

344. Wir wollen nun noch Schnitte von zwei Drehflächen aufsuchen. Bei dieser Aufgabe haben wir viererlei gegenseitige Lagen der Flächen zu unterscheiden. Es können nemlich die Axen der beiden Drehflächen 1) zusammenfallen, 2) parallellaufen, 3) sich schneiden, 4) sich kreuzen (windschief sein.) Jeder dieser Fälle erfordert eine besondere Behandlung.

Was nun zunächst den ersten Fall betrifft, so schneiden sich hier die beiden 𝔇𝔉 nach Parallelkreisen, und werden wir offenbar die eine Tafel, etwa die $\mathfrak{T}_1$, senkrecht zur gemeinschaftlichen Axe der 𝔇𝔉 annehmen, so dass auch die beiden Hauptmeridiane in **einer** Ebene liegen, und die Parallelkreise, welche sich durch die Schnitte dieser Hauptmeridiane legen lassen, die gesuchten Schnittlinien sind. Etwas umständlicher ist folgende Aufgabe.

Aufg. Den Schnitt zweier Drehflächen zu finden, deren Axen parallel sind.

Aufl. Man nimmt die eine der Tafeln, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, so an, dass sie auf beiden Drehaxen senkrecht steht, und die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie **mit der Ebene, welche durch die beiden Axen gelegt werden kann,** parallel ist. Dann liegen die ersten Risse (a_1, b_1) der beiden Axen in einer Parallelen zur $\mathfrak{K}_1$ (oder in $\mathfrak{K}_1$), welche den ersten Riss der Hauptmeridianebene beider Flächen bildet. Die **Hauptmeridiane beider Flächen liegen** demnach **in einer Ebene** und schneiden sich in Punkten, welche auf dem zweiten Profile der 𝔇𝔉 (A, a_1) und der 𝔇𝔉 (B, b_1) sich befinden. Um einen einzelnen Schnittpunkt zu finden, suchen wir, wo ein Kreis C der ersten Fläche die zweite schneidet; wir legen zu dem Ende durch C eine **Hilfsebene**, die 𝔈 (C_2), suchen ihren Schnitt (D, welches auch ein Kreis ist) mit 𝔇𝔉 (B, b_1), und wo C und D sich schneiden, da ist ein verlangter Schnittpunkt. Hiebei stellt sich dann heraus, dass die oben gefundenen Schnitte der Hauptmeridiane zugleich die **Grenzpunkte** sind. Nimmt man die Hilfsebene so an, dass sie einen **Aequator** oder **Polarkreis** der einen oder anderen

Fläche enthält, so findet man die noch fehlenden Hauptpunkte. Man erhält also hier sowohl die Hauptpunkte, als die allgemeinen Punkte auf sehr leichte Art und *ohne* Konstruktion von Curven, weshalb wir die Ausführung der Zeichnung dem Schüler überlassen dürfen. Desgleichen die Aufsuchung der Tangente in einem Schnittpunkte.

345. Aufg. Es sind gegeben zwei Drehflächen, deren Axen sich schneiden; man sucht ihre Schnittlinie. Fig. 185.

Aufl. Man nimmt die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie auf der Axe der *einen* $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) senkrecht steht, die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie auch mit der Axe C der *anderen* $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (BC) *parallel* ist (A_1, B_1, C_1 *fallen zusammen*). Um nun einen Schnittpunkt auf einem Parallelkreis der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (BC) zu finden, nehmen wir (nach 333) eine *Kugel* zur Hilfe, deren Centrum in dem Schnittpunkte a der beiden Drehaxen liegt. Diese Kugel schneidet dann auch die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) nach einem Kreis, somit sind unsece *Hilfsflächen Kugeln, deren Mittelpunkte in a liegen*, und welche beide $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ nach Kreisen schneiden, die zu *zweiten* Rissen *gerade* Linien haben, während von dem einen dieser Kreise der erste Riss ein Kreis ist. Mnn kann daher die Risse der Schnittpunkte *ohne Construction von Curven* finden. Nehmen wir z. B. die Kugel D an, so schneidet sie die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) nach einem Kreise E, die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (BC) aber nach einem Kreise F, dessen zweiter Riss F_2 ist. Da wo E_2 und F_2 sich schneiden ist der zweite Riss (b_2) zweier Schnittpunkte (b, c), deren erste Risse (b_1, c_1) in dem Kreise E_1 liegen.

Im Schnitte der beiden Hauptmeridiane liegen wieder, wie in voriger Nummer die zweiten Profilpunkte, und zugleich die Grenzpunkte. Um den ersten Profilpunkt der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) zu finden, nehmen wir die Hilfskugel so an, dass sie die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (A, a_1) nach dem *Aequator* schneidet. Den ersten Profilpunkt der andern Drehfläche suchen wir aber *nicht*, da wir auch den ersten Umriss dieser Fläche wegen der schwierigeren Auffindung desselben weglassen.

Will man noch die Tangente für einen Schnittpunkt, z. B. für den Punkt b, so verfährt man (nach 337 Anm.) hier am Besten folgendermassen.

Man sucht die Normale der 𝔇𝔉 (A, a_1) für den Punkt b, und erhält (nach 306) den Punkt d, in welchem diese Normale die Axe a_1 schneidet (d_1 liegt natürlich in a_1). Ebenso sucht man den Punkt e, in welchem die Normale im Punkte b der 𝔇𝔉 (BC) die Axe C trifft. Die gesuchte Tangente ist daher eine Gerade, die durch b geht und auf der Ebene bde senkrecht steht.

Anm. Sind die beiden 𝔉𝔇 Kegel mit gemeinsamem Centrum a, die sich also nach Geraden schneiden, welche durch a gehen, so braucht man blos eine Hilfskugel; die Verbindungslinie der von dieser Kugel gelieferten Schnittpunkte mit dem Punkte a stellen die gesuchten Schnittlinien beider Kegel vor.

346. Soll man den Schnitt zweier Drehflächen (𝔄 und 𝔅) suchen, wenn deren Axen sich kreuzen, so nimmt man wieder die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Axe der Fläche 𝔄 steht und $\mathfrak{T}_2$ parallel zu beiden Axen ist, und sucht wiederholt, wo ein Parallelkreis A der Fläche 𝔅 die Fläche 𝔄 schneidet. Zu dem Ende legt man durch A die Ebene A_2, sucht (321) den Schnitt B dieser Ebene mit 𝔄, und wo A und B sich schneiden, ist der verlangte Schnittpunkt. Um nun diesen Punkt zu zeichnen, müssen wir ausser der Curve (B_1) auch den ersten Riss von A_1 (eine Ellipse) konstruiren, um als Schnitt von A_1 und B_1 den ersten Riss des Schnittpunktes zu erhalten. Wenn wir nun auch durch provisorisches Zeichnen von A_1 und B_1 es wieder dahin bringen, dass wir blos die Theile von A_1 und B_1 zeichnen brauchen, die in der Umgebung des gesuchten Punktes liegen, so verursacht doch die Aufsuchung der ganzen Schnittcurve sehr viel Mühe, wenn auch in dem angegebenen Verfahren nichts vorkommt, was uns nicht schon bekannt wäre. Will man aber nach diesem Verfahreen die Grenzpunkte finden (mittelst einer Fehlercurve), so wäre das höchst beschwerlich und und ungenau. Darum ziehen wir es vor, die Aufgabe in folgender Art zu lösen, die nicht schwieriger ist, als die vorhin beschrieben, aber die Grenzpunkte viel leichter und genauer auffinden lässt.

Fig. 136. Sind (A, a_1) und (BC) die beiden 𝔇𝔉, so nehmen wir (Fig. 136) auf der 𝔇𝔉 (A, a_1) einen Parallelkreis D an, und

suchen dessen Schritt mit $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (BC). Zu dem Ende zeichnen wir den ersten Riss (E_2) des Schnittes (E) der $\mathfrak{E}$ (D_2) mit der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (BC). Da aber die Axe dieser Fläche auf keiner Tafel senkrecht steht, so nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ an, welche diese Stellung gegen die C hat, so dass $\mathfrak{K}' \perp C_2$, und suchen den Schnitt der $\mathfrak{E}$ (D_2) mit der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (BC), mit Hilfe des Tafelsystems (2, 3), nach der früher (321) gegebenen Anweisung; wir gehen dann zurück zum alten Tafelsystem (wie dies für die Punkte c, d aus der Zeichnung hervorgeht, bei deren Ausführung man wieder, durch ein provisorisches Zeichnen von E_1, sich auf dasjenige Stück dieser Linie beschränken kann, auf welchem die ersten Risse der gesuchten Schnittpunkte liegen) und erhalten so E_1 und mit ihm die ersten Risse der Schnittpunkte, als Schnitt von D_1 und E_1.

Zeichnet man aber einen Kreis, dessen erster Riss E_1 berührt, und dessen zweiter Riss auf D_2 liegt, so können wir durch Wiederholung dieses Verfahrens in derselben Art, wie früher (134, Fig. 133) eine *Fehlercurve* finden, deren Schnitt mit A_2 uns den *Grenzkreis* liefert.

Anm. Es ist jedenfalls vortheilhaft, bei der Anwendung des letzteren Zeichnungsverfahrens diejenige $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ schief gegen $\mathfrak{T}_1$ zu stellen, deren Schnitte mit einer Ebene *einfacher* ausfallen, als für die andere $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$. Namentlich werden wir, wenn eine der $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ *zweiter Ordnung* ist, diese schief stellen. Dann ist der Schnitt E derselben mit $\mathfrak{E}$ (D_2) eine Linie zweiter Ordnung, die wir, da wir ihre Axen und Scheitel finden können, leichter (provisorisch und definitiv) konstruiren können. Der Schüler, welcher über die vorliegende Aufgabe ein Beispiel machen will, wird daher gut thun, etwa folgendes zu wählen:

Den Schnitt eines *Wulstes* mit einem *Ellipsoid* zu finden, wenn die *Axen* der beiden *Flächen sich kreuzen*.

347. Ist der Schritt *zweier* $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ *zweiter Ordnung* zu Fig. 137.
finden, so muss man darnach streben, die Hilfsebenen so zu wählen, dass sie beide Flächen nach *ähnlichen Ellipsen* schneiden. Nimmt man dann eine Tafel so an, dass darauf der Riss der einen Ellipse ein Kreis ist, so gilt das auch vom anderen.

Sind die beiden 𝔇𝔉 zwei Ellipsoide (𝔄 und 𝔅) und nehmen wir an, wir hätten eine Ebene (𝔈), welche beide 𝔇𝔉 nach ähnlichen Ellipsen schneidet, so wird das auch der Fall sein, wenn wir die eine Fläche parallel verschieben (d. h. so bewegen, dass ihre Axe sich parallel bleibt), aber auch, wenn wir den Meridian ähnlich verändern (das soll heissen, wenn wir den Meridian kleiner oder grösser machen, aber so, dass er dem ursprünglichen Meridian ähnlich ist). Verändern wir nun den Meridian von 𝔄 so, dass der Aequator von 𝔄 dem von 𝔅 gleich wird, und verschieben dann 𝔄 parallel bis sein Mittelpunkt mit dem von B zusammenfällt, so werden, wie sogleich nachgewiesen werden soll, die Fläche 𝔅 und die ähnlich veränderte und parallel verschobene 𝔄 sich in zwei Punkten berühren und demnach, wenn sie sonst noch Punkte gemein haben, sich (s. 286. 5,) nach zwei ebenen Curven, also Ellipsen, schneiden. Nimmt man nun die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass eine dieser Ellipsen sich darauf als Kreis darstellt, so wird jede zur Ebene dieser Ellipse parallele Ebene beide Flächen nach Ellipsen schneiden, deren erste Risse Kreise sind. Man kann demnach hier die Schnittpunkte ohne Konstruktion von Curven darstellen.

Bei der Ausführung der Zeichnung nimmt man zunächst die $\mathfrak{T}_2$ so an, dass die Axen (BD) der beiden Flächen zu ihr parallel sind und B in der $\mathfrak{T}_2$ liegt, und zeichnet (Fig. 137) die zweiten Risse (B_2, D_2) dieser Axen, sowie die zweiten Risse (A_2, C_2) der Hauptmeridiane (A, C). Gibt man noch die Entfernung der Axen (B, D), so sind beide Flächen (AB und CD) ihrer Gestalt und gegenseitigen Lage nach bestimmt. Zeichnet man nun eine neue 𝔇𝔉 (EF), so dass sie mit der 𝔇𝔉 (CD) ähnlich und ähnlich liegend ist, außerdem mit 𝔇𝔉 (AB) einerlei Centrum und gleichen Aequator hat, so berühren sich die 𝔇𝔉 (AB) und 𝔇𝔉 (EF) in zwei Punkten, deren zweiter Riss a_2 ist, und deren zweiter Abstand gleich dem Halbmesser des Aequators von 𝔇𝔉 (AB) ist. Wenn daher A und E sich schneiden, so schneiden sich auch die beiden 𝔇𝔉 nach zwei ebenen Curven, von denen wir eine (hier die der 𝔈 [a_2 b_2], welche $\perp \mathfrak{T}_2$ und deren zweiter Riss die Geraden $a_2 b_2$ ist) in der oben angegebenen Art benützen. Nehmen wir die $\mathfrak{K}_1$ so an, dass der erste Riss der in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden geraden ab gleich dem Halb-

messer des Aequators von $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (AB) ist, so wird jede Ebene G_2, die $\parallel$ $\mathfrak{E}$ (a_2 b_2), die beiden $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (AB und CD) nach Ellipsen (G, H) schneiden, deren erste Risse Kreise (G_1, H_1) sind. Ferner fällt A_1 und B_1 auf $\mathfrak{K}_1$, C_1 und D_1 auf eine $\mathfrak{K}_1$ parallele Gerade, die von $\mathfrak{K}_1$ um die gegebene Entfernung der beiden Drehaxen absteht, und vor oder hinter $\mathfrak{K}_1$ gezeichnet wird, je nachdem die Axe C selbst vor oder hinter der $\mathfrak{T}_2$ liegen soll.

Verändert man die Ellipse G, nach welcher die Hilfsebene G_2 die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (AB) schneidet, so dass ihr Mittelpunkt bleibt, ihr erster Riss aber ein Kreis wird, der den Kreis H_1 berührt, und verfährt man für verschiedene Hilfsebenen in gleicher Art, so erhält man eine Fehlercurve (in ähnlicher Art wie in voriger Nummer) die auf die Grenzpunkte führt.

Anm. Wäre für die $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ (CD) der Halbmesser des Aequators die grosse Halbaxe der Ellipse C, so würden sich sich die Ellipsen A und E nicht schneiden und das Verfahren wäre nicht anwendbar. Dagegen können wir dieses Verfahren auch häufig anwenden, wenn die beiden Flächen andere Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt sind, z. B. zwei Hyperboloide, oder ein solches und eine Ellipsoid.

348. Hat man den Schnitt eines Ellipsoides (oder Hyperboloides) $\mathfrak{A}$ und eines Drehungsparaloides $\mathfrak{B}$ zu finden, so benützen wir die oben (287. Anm. 1) aufgeführte Eigenschaft des Paraboloides, und stellen daher die Tafeln so, dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, zur Axe von $\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{T}_2$ aber parallel ist zu beiden Drehaxen. Legen wir nun durch den Mittelpunkt der Fläche $\mathfrak{A}$ eine Ebene $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie $\mathfrak{A}$ nach einer Ellipse schneidet, deren erster Riss ein Kreis ist, so haben wir eine Stellung unserer Hilfsebenen, die ohne Curvenkonstruktion zum Ziele führt. Denn diese Ebene schneidet ja, nach der oben angeführten Eigenschaft der Fläche $\mathfrak{B}$, auch diese Fläche nach einer Curve, deren erster Riss ein Kreis ist. Wir glauben, die Ausführung unserer Aufgabe dem Schüler überlassen zu dürfen, wollen ihm aber zeigen, wie man die Stellung unserer Hilfsebene findet.

Ist A (Fig. 138) der Meridian eines Ellipsoides, B seine Fig. 138.
Axe, a sein Centrum, und zieht man ein zweites Kantenloth, das von a_2 um den Halbmesser des Aequator der ($\mathfrak{D}\mathfrak{F}$) entfernt ist, so erhalten wir dadurch einen Punkt b des Hauptmeridians.

Nehmen wir nun eine 𝔈 (C_2) an, die ⊥ $\mathfrak{T}_2$ und die Punkte a und b enthält, so schneidet sie die 𝔇𝔉 nach einer Ellipse, deren erster Riss ein Kreis mit dem Halbmesser gleich dem des Aequators ist. Verschiebt man nun 𝔈 (C_2) parallel, z. B. nach 𝔈 (D_2), so schneidet auch diese die (𝔇𝔉) nach einer Ellipse (D); deren erster Riss ein Kreis D_1 ist.

349. Hat man den Schnitt zweier Drehungsparaboloide zu finden, so stellen wir wieder die Tafeln, wie vorhin, so dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur einen Drehaxe und $\mathfrak{T}_2$ parallel zu beiden Drehaxen ist, und stellen unsere Hilfsebene wieder senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$, und zugleich so, dass ihr zweiter Riss mit den der Drehaxen gleiche Winkel bilden. Dann sieht man leicht ein, dass die ersten Risse beider Ellipsen, nach denen die Hilfsebene die beiden Flächen schneidet, Kreise sind.

Anm. Zu dieser und der vorigen Nummer haben wir noch zu bemerken, dass ein Kreiscylinder als Drehungsparaboloid angesehen werden kann.

350. Wir haben schon früher bemerkt, dass eine Kugel vor allen Drehflächen sich dadurch auszeichnet, dass man jeden Radius derselben als Drehaxe ansehen kann. Ist daher statt einer allgemeinen 𝔇𝔉 eine Kugel gegeben, so kann und wird man von der genannten Eigenschaft Gebrauch machen, und die Axe der Kugel so wählen, dass die Lösung der Aufgabe sich dadurch vereinfacht.

Ist z. B. der Schnitt eines Kegels mit einer Kugel zu finden (s. 341), so kann man die $\mathfrak{T}_1$ durch die Grundfläche des Kegels, also die Axe der Kugel senkrecht zu dieser Grundfläche wählen, oder, was auch vortheilhaft ist, die Axe der Kugel durch das Centrum des Kegels legen, wodurch man die Hauptpunkte des Schnittes leicht findet.

Ist der Schnitt einer 𝔇𝔉 und einer Kugel gesucht, so nimmt man die Axe der Kugel so, dass sie die der 𝔇𝔉 schneidet.

Sind zwei Kugeln gegeben, so wird man ihre Centrale als Axe ansehen.

§. 21.

Abwickelung einer Fläche auf einer anderen.

351. Wenn man die Elemente einer Fläche so in eine Ebene legt, dass die Elemente selbst keine Gestaltsänderung erleiden und je zwei Nachbarelemente die ihnen gemeinsame Erzeugende gemeinschaftlich behalten, so nennt man diese Operation das Ab- oder Entwickeln der Fläche.

Man sieht daher (aus. dem Umstande, dass bei dem Entwickeln keine Gestaltsänderung der Flächenelemente eintreten darf), dass sich diese Operation nur mit mit solchen Fällen vornehmen lässt, die ebene Elemente haben. Deshalb haben Flächen mit ebenen Elementen den Namen entwickelbare Flächen erhalten.

Ist auf einer entwickelbaren Fläche (𝔈𝔉) eine Curve (A) gegeben, so bekommt diese, wenn man die 𝔈𝔉 entwickelt, eine andere Gestalt. Man nennt die Curve, die durch die Entwickelung einer 𝔈𝔉 aus einer auf dieser Fläche gegebenen ℭ (A) sich bildet, die Verwandelte, Transformirte der ℭ (A).

352. Jede Curve auf einer 𝔈𝔉 wird durch die Erzeugenden derselben in unzählige Elemente getheilt, deren jedes auf einem Flächenelement liegt. Da nun beim Entwickeln der Fläche ihre Elemente sich nicht ändern, so ändern sich auch die Längen, der in ihnen liegenden Curven-Elemente nicht. Betrachtet man daher die Länge eines von den Punkten a, b bebegrenzten Stückes der gegebenen Curven vor und nach der Entwickelung als Summe ihrer Elemente, was angeht, da sowohl vor als nach der Entwickelung je zwei Nachbarelemente in einem Punkte zusammenstossen, so kommt man zu folgendem Satze:

> Die Länge einer Curve auf einer 𝔈𝔉 zwischen irgend zwei Punkten derselben wird durch das Entwickeln der Fläche nicht geändert.

353. Aus dem Umstande, dass durch das Entwickeln der 𝔈𝔉 die einzelnen Elemente unverändert bleiben, geht auch hervor, dass die Lage eines Elements einer auf der 𝔈𝔉 gegebenen Curve gegen die Erzeugenden des Flächenelements, in der es

liegt, sich nicht ändert, dass also der Winkel, den das Curven-Element mit diesen Erzeugenden bildet, nach und vor der Entwickelung der nemliche ist. Erwägen wir nun, dass die Richtung eines Curven-Elements die seiner Tangente ist, und dass die beiden Erzeugenden eines Flächen-Elements in der Zeichnung in eine zusammenfallen, so haben wir den Satz:

Der Winkel, unter welchem eine Erzeugende einer EF eine auf dieser liegende Curve schneidet, ändert sich durch die Entwickelung nicht.

354. In der Regel ändern sich durch das Entwickeln einer EF die Krümmungen einer auf der EF liegenden Curve C. Denn es ändert sich die gegenseitige Lage von zwei Nachbarelementen der C, da sie in der Regel auf zwei Nachbarelementen der EF liegen, und diese durch die Entwickelung ihre gegenseitige Lage ändern. Liegen aber zwei Nachbarelemente der C auf demselben Element der EF, so ändern sie ihre gegenseitige Lage bei der Entwickelung nicht. Dies ist aber der Fall bei dem Grat der EF; denn bekanntlich liegt jedes Element des Grates auf einer Erzeugenden, also zwei Nachbarelemente desselben auf zwei Nachbar-Erzeugenden, demnach auf einem Element der EF. Wir haben also den Satz:

Durch das Entwickeln einer EF ändern sich in der Regel die Krümmungen einer darauf liegenden C; nur der Grat ändert seine Krümmungen durch das Entwickeln nicht.

Anm. Ist daher der Grat einer EF eine Schraubenlinie, die bekanntlich in allen ihren Punkten gleiche Krümmungen hat, so hat die Verwandelte der Schraubenlinie auch nach der Entwickelung in allen Punkten dieselbe Krümmung, und wird demnach eine Kreislinie, deren Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes der Schraubenlinie ist.

355. Sollen zwei Nachbarelemente ba, ac einer Curve C auf einer EF nach der Entwickelung in eine Gerade fallen, so müssen sie mit der durch a gehenden Erzeugenden (A) nach (also auch vor) der Entwickelung gleiche Winkel bilden; die beiden Geraden ba und ac können demnach (wenn sie nicht in einer Geraden liegen) als Erzeugende eines Drehungskegels betrachtet werden, der A zur Axe hat. Da aber ba und ca

benachbart sind, so ist die 𝔈 (bac), welche offenbar die Krümmungsebene der ℭ im 𝔓 (a) ist, eine Tangentialebene des genannten Drehungskegels. Ferner ist die 𝔈 (A, ba) eine Meridianebene dieses Kegels, und steht demnach auf der 𝔈 (bac) senkrecht. Da aber 𝔊 (ba) eine Tangente der ℭ, folglich der 𝔈𝔉 ist, so ist es 𝔈 (A, ba) eine Tangentialebene der 𝔈𝔉. Aus dem Ganzen geht nun aber hervor, dass, wenn ba und ac gleiche Winkel mit A machen, die Krümmungsebene der ℭ für den 𝔓 (a) auf der Tangentialebene der 𝔈𝔉 für diesen Punkt senkrecht steht. Eben so lässt sich aber auch der umgekehrte Satz nachweisen. Wir haben also den Satz:

Damit zwei Nachbarelemente ba, ac einer ℭ auf einer 𝔈𝔉 nach deren Entwickelung in eine Gerade fallen, der 𝔓 (a) also ein Flachpunkt (Inflexionspunkt) werde, ist es in der Regel nothwendig aber auch gerade hinreichend, dass die Krümmungsebene der ℭ im 𝔓 (a) Normalebene der 𝔈𝔉 für den 𝔓 (a) sei.

356. Nimmt man auf einer 𝔈𝔉 zwei Punkte a und b an, und denkt sich auf 𝔈𝔉 von a nach b beliebige Linien gezogen, so verändern diese, wie wir oben gezeigt haben, bei dem Entwickeln der 𝔈𝔉 ihre Längen nicht. Demnach wird die, welche vor der Entwickelung die kürzeste unter ihnen war, es auch nach der Entwickelung sein. Daraus geht aber hervor, dass die kürzeste Linie, welche auf der 𝔈𝔉 von a nach b gezogen werden kann, diejenige ist, deren Verwandelte eine Gerade ist. Ist aber dies der Fall, so fallen je zwei Nachbarelemente der Curve nach der Entwickelung in eine Gerade, folglich sind (nach der vorigen Nummer) alle Krümmungsebenen der Curve Normalebenen der Fläche. Da man nun eine Linie einer Fläche, die zwischen irgend zweien ihrer Punkte die kürzeste auf der Fläche ist, eine geodätische Curve der Fläche nennt, so erhalten wir den Satz.

Jede geodätische Linie einer entwickelbaren Fläche hat zur Verwandelten eine Gerade, und ihre **Krümmungsebenen** sind **Normalebenen** der Fläche.

357. Die letztgenannte Eigenschaft einer geodätischen Curve (ℭ) gilt auch, wenn die Fläche (𝔉), auf der sie liegt,

nicht entwickelbar ist. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich auf 𝔉 zwei unendlich nahe Punkte a, b durch einen sehr kleinen Bogen adb verbunden. Da $\widehat{adb}$ unendlich klein ist, so kann man setzen $\widehat{adb} = \overline{ad} + \overline{bd}$ und annehmen, dass d die Mitte des Bogens adb ist. Zieht man, in dem unendlich kleinen Dreieck adb, dc ⊥ ab, so liegt der Fusspunkt c (der dc) auf ab in dessen Mitte. Demnach ist unter allen Bögen adb, die man auf 𝔉 ziehen kann, derjenige der kürzeste, für welchen $\overline{dc}$ am kleinsten ist. Das kleinste dc erhält man aber, wenn man um c eine unendlich kleine Kugel beschreibt, die 𝔉 in einem Punkte e berührt, dann ist ce Normale dieser Kugel und der 𝔉, und die 𝔈 (abe) Normalebene der 𝔉 und zugleich Krümmungsebene des kleinen Bogens aeb. Sobald demnach ein unendlich kleiner Curvenbogen auf einer Fläche möglichst klein ist, so ist seine Krümmungsebene Normalebene der Fläche; sind alle Bogenelemente möglichst klein, die ℭ also geodätisch, so sind alle Krümmungsebenen Normalebenen der Fläche. Wir haben daher den Satz:

1) **Jede geodätische Curve einer Fläche hat zu Krümmungsebenen Normalebenen der Fläche.**

Hat man nun auf einer nicht entwickelbaren Fläche (𝔉) eine geodätische Curve (ℭ), und legt man in allen Punkten von ℭ Tangentialebenen an 𝔉, welche eine entwickelbare Fläche (ℭ𝔉) umhüllen, so sind die Krümmungsebenen von ℭ auch Normalebenen von ℭ𝔉, demnach ist ℭ auch geodätisch für ℭ𝔉, und daher die Verwandelte von ℭ für ℭ𝔉 eine Gerade. Wir sehen also:

2) **Wenn eine ℭ auf einer Fläche (𝔉) geodätisch ist, so ist sie es auch für eine entwickelbare Fläche (ℭ𝔉) die 𝔉 nach ℭ berührt, und ihre Verwandelte für ℭ𝔉 ist gerade.**

Fig. 139. 358. Es seien A, B, C drei Folgeerzeugende einer entwickelbaren Fläche (𝔉), (also AB, BC zwei Nachbarelemente der 𝔉) und auf A, B, C die Punkte a, b, c einer Curve (ℭ) der 𝔉 gegeben (so dass $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ zwei Nachbarelemente der ℭ sind); wickelt man nun die 𝔉 mit der darauf liegenden Curve ab und legt sie in die Ebene unseres Zeichnungsblattes (Fig. 139), so dass A, B, C, a, b, c nach A_3, B_3, C_3, a_3, b_3, c_3 kommen [es versteht

sich, dass $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$, obgleich wir sie der Deutlichkeit wegen gross gezeichnet haben, immer noch unendlich klein vorausgesetzt werden, ebenso der Kontingenzwinkel ($\wedge\, \alpha_3$), den ab mit der rückwärtigen Verlängerung von bc einschliesst], so ist $\wedge\, \alpha_3 = 180^0 - \beta - \gamma$. Bezeichnen wir nun den Kontingenzwinkel des Bogens abc vor der Abwickelung von $\mathfrak{F}$ mit α also sein Supplement mit $180 - \alpha$, so sieht man, dass β, γ und $180 - \alpha$ vor der Entwickelung ein Dreikant bilden. Nennen wir noch den Winkel, den die Seite $(180 - \alpha)$ und die Seite β des Dreikants mit einander einschliessen, $\wedge\, \varphi$, so ist, nach bekanntem Satze aus der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \cos (180 - \alpha) \cos \beta}{\sin (180 - \alpha) \sin \beta}.$$

Da aber nach der vorletzten Gleichung $\gamma = 180 - \beta - \alpha_3$ ist, so erhält man

$$\cos \varphi = \frac{\cos (180 - \beta - \alpha_3) - \cos (180 - \alpha) \cos \beta}{\sin (180 - \alpha) \sin \beta}$$
$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha_3 \cos \beta + \sin \alpha_3 \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Weil nun α und α_3 unendlich klein sind, so ist $\cos \alpha = \cos \alpha_3 = 1$ und $\sin \alpha = \alpha$, $\sin \alpha_3 = \alpha_3$; also

$$\cos \varphi = \frac{\alpha_3}{\alpha}.$$

Nachdem endlich die Bögen abc und $a_3 b_3 c_3$ (vor und nach der Entwickelung) einander gleich sind, so verhalten sich die Krümmungshalbmesser ρ, ρ_3 dieser Bögen umgekehrt wie die Bögen α und α_3>. Es ist also

$$\cos \varphi = \frac{\rho_3}{\rho} \text{ oder } \rho = \rho_3 \cos \varphi.$$

Erwägt man noch, dass die Seite β oder AB unseres Dreikants die Tangentialebene der $\mathfrak{F}$ im Punkte a der $\mathfrak{C}$, dagegen die Seite $(180 - \alpha)$ oder (abc) die Krümmungsebene der $\mathfrak{C}$ im Punkte a vorstellt, so erhält man den Satz:

Bildet man ein rechtwinkeliges Dreieck (pqr), dessen eine Kathete $(\overline{pq})$ der Krümmungshalbmesser ρ in einem Punkte a einer Curve ($\mathfrak{C}$) (einer entwickelbaren Fläche) ist, die mit der Hypotenuse den $\wedge\, \varphi$ (Winkel der Tangentialebene und Krümmungs-

ebene im Punkte a) bildet, so ist diese Hypotenuse ($\overline{p}$r) der Krümmungshalbmesser der Verwandelten für denselben Punkt.

Anm. Ist die Krümmungsebene der Curve im Punkte a Normalebene der Fläche, so ist $\varphi = 90^0$ und $\cos\varphi = 0$, also $\rho_3 = \infty$ (wenn nicht ausnahmsweise $\rho = 0$ ist) und umgekehrt. Es bestätigt sich also der oben (355) entwickelte Satz. Ist aber $\rho = \infty$, so ist auch $\rho_3 = \infty$, auch wenn $\cos\varphi$ nicht $= 0$ ist.

359. Hat man im Raume eine Curve M (die in der Regel uneben [gewunden] ist) und denkt man sich alle Normalebenen der M errichtet, so umhüllen sie (s. 244) eine entwickelbare Fläche, die man die Evolutenfläche der M heisst. Nennt man nemlich die den Folgepunkten (a, b, c etc.) entsprechenden Normalebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. und zeichnet man in $\mathfrak{A}$ eine Normale A von M, und sucht den Punkt α, wo A und $\mathfrak{B}$ sich schneiden, zieht αb und sucht, wo diese Normale (B) die $\mathfrak{C}$ schneidet, u. s. f., so erhält man ein System von auf einander folgenden Normalen, die eine Curve N umhüllen, welche eine Evolute von M ist, und auf der Evolutenfläche (daher der Name) liegt. Hätte man in $\mathfrak{A}$ eine andere Normale gezeichnet, so würde man eine andere ebenfalls auf der Evolutenfläche liegende Evolute von M erhalten haben. Wir sehen also:

1) Es ist die Evolutenfläche einer $\mathfrak{C}$ (M) der Ort aller Evoluten dieser Curve.

Betrachtet man nun zwei benachbarte Normalen von M, z. B. A und B, so hat jede mit N ein Curvenelement gemein, und ist demnach die Ebene (AB), weil sie zwei Nachbarelemente von N enthält, eine Krümmungsebene von N. Auf der anderen Seite ist die $\mathfrak{E}$ (AB), weil sie zwei Nachbarpunkte (a, b) von M enthält, Tangentialebene von M im Punkte a, also auf der durch a gehenden Normalebene für M (welche zugleich, als Umhüllte, Tangentialebene der Evolutenfläche ist) senkrecht; es ist also $\mathfrak{E}$ (AB) Normalebene der letztgenannten Fläche und demnach jedes Element von N geodätisch in Bezug auf die Evolutenfläche. Hieraus folgt:

2) Jede Evolute einer Curve M ist eine geodätische Curve der Evolutenfläche von M.

Hat man wieder auf einer Raumcurve M die Folgepunkte a, b, c, d etc. und in ihnen die Normalebenen 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 etc. (welche die Evolutenfläche von M umhüllen) und bezeichnen wir den Schnitt von 𝔄 und 𝔅 mit A, von 𝔅 und ℭ mit B etc., so sind A, B, C etc. die Erzeugenden der Evolutenfläche. Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von A und B mit α, von B und C mit β, von C und D mit γ etc., so bilden die Punkte α, β, γ etc. den Grat unserer Fläche. Es ist aber offenbar auch α der Mittelpunkt einer Kugel, die durch a, b, c, d geht, β einer durch b, c, d und e, u. s. f. Demnach sehen wir:

3) Der Grat der Evolutenfläche einer Curve ist der Ort der Mittelpunkt ihrer Schmiegungskugeln (s. 173).

Zugleich sieht man aber auch, dass der Winkel von A und B (weil A ⊥ 𝔈 (abc) und B ⊥ 𝔈 (bcd) ist), gleich dem Winkel der 𝔈 (abc) mit der 𝔈 (bcd) ist, d. h. gleich dem Windungswinkel (s. 173) der ℭ (M). Da aber der Winkel von A und B, der Kontingenzwinkel des Grats der Evolutenfläche, durch den entsprechenden Krümmungshalbmesser des Grats gemessen wird, und dieser Halbmesser (nach 354) nach der Entwickelung der Fläche sich nicht ändert, so sehen wir:

4) Der Windungswinkel einer Curve M in einem Punkte derselben wird gemessen durch den diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreis für die Verwandelte des Grats der Evolutenfläche.

360. Die Flächen, welche in der Praxis fast ausschliesslich zur Abwickelung gelangen, sind Cylinder- und Kreiskegel; gleichwohl wollen wir auch die Abwickelung anderer Flächen durchgehen.

Will man die Verwandelte einer Curve auf einer entwickelbaren Fläche bestimmen, so nimmt man am Besten eine Curve der Fläche zu Hilfe, deren Verwandelte man der Gestalt nach von vornherein kennt. Eine solche Curve giebt es auf dem Cylinder, Drehungskegel und der entwickelbaren Schraubenfläche. — Auf dem Cylinder geht jedes Profil (Normalschnitt zu den Erzeugenden) durch die Entwickelung in eine Gerade über, da nach und vor der Entwickelung die Winkel der Curve

mit den resp. Erzeugenden dieselben (hier also rechte) bleiben müssen. — Auf dem Drehungskegel sind alle Punkte eines Parallelkreises vor und nach der Abwickelung gleichweit vom Centrum entfernt, also ist die Verwandelte eines Parallelkreises wieder ein Kreis, dessen Halbmesser aber gleich der Entfernung der Kegelspitze vor einem Punkte des Parallelkreises ist. — Bei der entwickelbaren Schraubenfläche aber ist die Verwandelte des Grats A (s. 354) eine Kreislinie A_3, deren Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser des Grats ist. Allein es lässt sich leicht einsehen, dass, wenn wir von den Punkten a des Grats dieser Schraubenfläche aus auf die entsprechenden Erzeugenden gleiche Strecken $\overline{ab}$ auftragen (deren Endpunkte b eine Schraubenlinie B geben), die Geraden ab nach der Entwickelung an der Verwandelten A_3 tangiren und demnach da $\overline{a_3 b_3} = \overline{ab}$ ist, die Schraubenlinie B als Verwandelte eine Kreislinie A_3 hat. Man sieht also:

1) **Alle Profile eines Cylinders haben gerade Verwandelte;**
2) **alle Parallelkreise eines Kreiskegels haben kreislinige Verwandelte;**
3) **alle Schraubenlinien einer entwickelbaren Schraubenlinie haben kreislinige Verwandelte.**

Fig. 140. 361. Aufg. Auf einen Cylinder ist eine Curve gegeben; man soll ihre Verwandelte suchen und für einen Punkt von dieser die Tangente konstruiren.

Aufl. Wir nehmen das Tafelsystem so an, dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zum Cylinder steht, während wir die $\mathfrak{T}_2$ so wählen, dass sie, wenn die zu verwandelte Curve eben ist, auf der Ebene der Curve senkrecht steht. Bei dieser Wahl der Tafeln ist $\mathfrak{CF}$ (A_1) der gegebene Cylinder und $\mathfrak{C}$ (A) (deren zweiter Riss die Gerade A_2 ist, welche zugleich den zweiten Riss der Ebene der Curve vorstellt) die gegebene Curve.

Schneiden wir nun den Cylinder längs einer Erzeugenden (z. B. der Geraden a_1) durch, und klappen ihn um, d. h. legen ihn nach vollzogener Abwickelung desselben in unsere Tafel, so erscheint das Profil ($\mathfrak{K}'$) desselben nach der Umklappung als gerade Linie ($\mathfrak{K}'_3$). Klappen wir nun den Cylinder so um, dass seine Grundlinie ($\mathfrak{K}'$) nach $\mathfrak{K}'_3$ (Fig. 140),

a_1 nach $\mathfrak{a}'_3$ und der vordere (mit einem Pfeil versehene) Theil von $\mathfrak{K}'$ nach rechts (ebenfalls mit einem Pfeil bezeichnet) von $\mathfrak{a}'_3$. kommt, so fällt b_1 auf $\mathfrak{b}'_3$, wenn $\overline{\mathfrak{a}'_3\mathfrak{b}'_3} = \overline{a_1 b_1}$ ($= \pi r$ wenn A_1 ein Kreis, π die Ludolphine und r der Halbmesser von A_1 ist). Theilt man nun $\widehat{a_1 b_1}$ und $\mathfrak{a}'_3\mathfrak{b}'_3$ in gleich viele gleiche Theile, so entsprechen die Theilpunkte einander, und kommt z. B. c_1 auf $\mathfrak{c}'_3$. Sucht man nun die Verwandelte der gegebenen Curve A, d. h. nach Umklappung des (als $\mathfrak{T}_3$ betrachteten) Cylinders den dritten Riss der A, so nehmen wir in A einen Punkt c (dessen erster Riss c_1 ein Theilpunkt von A_1 ist), und suchen seiner Lage (c_3, oder seinen dritten Riss) nach Umklappung des Cylinders. Zu dem Ende legen wir durch c eine Erzeugende und suchen ihren Schnitt c_1 mit dem Profil ($\mathfrak{K}'$) des Cylinders. Suchen wir nun wohin c_1 nach der Entwickelung (hier nach $\mathfrak{c}'_3$) kommt, zeichnen die begrenzte Erzeugende $\overline{\mathfrak{c}'_3 c_3}$ nach der Entwickelung (nach 352 und 353) so ist c_3 die Lage von c nach der Entwickelung.

Betrachten wir, wie schon oben angedeutet, den Cylinder als (krumme) $\mathfrak{T}_3$, sein in der $\mathfrak{T}_1$ liegendes Profil als (krumme) $\mathfrak{K}'$, die nach Umklappung der $\mathfrak{T}_3$ nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, so können wir die Verwandelte von A als dritten Riss (A_3) von A und jeden Punkt von A_3 als dritten Riss (c_3) eines Punktes (c) von A ansehen, und das ganze Entwickelungsgeschäft, wie einen Uebergang von dem Tafelsystem (1,2) zu einer $\mathfrak{T}_3$ behandeln, mit dem Unterschied, dass die Abscisse auf $\mathfrak{K}'_1$ krumm ist (und demnach ihre Länge durch Rektifikation der Strecke gefunden wird).

Sollen wir für einen Punkt (c_3) von A_3 eine Tangente (B_3) konstruiren, so zeichnen wir für den entsprechenden Punkt (c) der A die Tangente (B) und erinnern uns, dass (nach 353) der Winkel dieser Tangente mit der entsprechenden Erzeugenden vor und nach der Entwickelung derselbe ist. Suchen wir daher diesen Winkel auf bekannte Art, indem wir die $\mathfrak{E}$ (B_1), welche die Tangente B und die entsprechende Erzeugende, $\mathfrak{G}$ (c_1), enthält, als neue Tafel ($\mathfrak{T}_4$) ansehen und umklappen, so sieht man, dass dieser Winkel in einem rechtwinkeligen Dreiecke $d c_1 c$ liegt. Macht man daher $\overline{d_4 c_3^1} = \overline{c_1 d_1}$ und zieht $c_3 d_4$ so ist dies die verlangte Tangente B_3.

Fragt man, welcher Punkt von A in A_3 zum Inflexionspunkt wird (s. 355), so müssen wir untersuchen, an welcher Stelle von von A die Krümmungsebene Normalebene des Cylinders ist. Wenn nun, wie in unserer Figur, die A eben ist, und demnach ihre Ebene (A_2) in allen Punkten von A Krümmungsebene ist, so dürfen wir nur den Punkt von A suchen, in welchem die Ebene (A_2) Normalebene des Cylinders ist, also auf der entsprechenden Tangentialebene der Fläche senkrecht steht.

Wir haben also die Tangentialebene des Cylinders zu suchen, die $\perp$ 𝔈 (A_2) ist, oder mit einer auf 𝔈 (A_2) senkrechten Geraden parallel ist.

Da diese Gerade aber parallel $\mathfrak{T}_2$ ist, so ist die verlangte Tangentialebene die 𝔈 (C_1), welche $\parallel$ $\mathfrak{T}_2$ ist, und der Punkt e, nach welchem sie A berührt ist der verlangte Punkt, dessen dritter Riss (e_3) Inflexionspunkt der A_3 ist.

Anm. Wir haben als Beispiel einen Kreiscylinder gewählt, und als 𝔈 (A) darauf eine ebene Curve. In diesem Falle ist A_3 eine Curve, die man Wellenlinie oder Sinusoide nennt (weil eine Curve deren Gleichung, in Bezug auf die Coordinatenaxen X, Y die Form $y = a \sin \frac{x}{b}$ hat, die Gestalt unserer 𝔈 (A_3) annimmt). Das angegebene Verfahren bleibt aber auch richtig, welche Gestalt das Profil des Cylinders und die Curve A hat, auch wenn diese uneben ist; nur der Inflexionspunkt lässt sich wenn A uneben ist, nicht leicht finden.

Fig. 141. 362. Ist, umgekehrt, ein Cylinder A_1 und die Verwandelte (A_3) einer darauf liegenden Curve (A) gegeben und soll man A finden, so ist diese Aufgabe, wenn man wieder den Cylinder als (krumme) $\mathfrak{T}_3$ betrachtet, in ähnlicher Art durchzuführen, wie früher die Aufgabe, aus den dritten Rissen von in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden Punkten, die ersten und zweiten zu finden. Wir wollen darüber ein Beispiel machen.

Aufl. Es ist gegeben (Fig. 141) ein Kreiscylinder (A_1) (durch dessen Umklappung, wie in voriger Nummer, $\widehat{a_1 c_1 b_1}$ nach $\overline{a'_3 c'_3 b'_3}$ kommt) und die Verwandelte (A_3) einer Curve (A) des Cylinders; man soll A suchen.

Aufl. Theilt man wieder die Strecken $\widehat{a_1 b_1}$ und $\overline{a'_3 b'_3}$ in gleichviele gleiche Theile, so dass z. B. die Theilpunkte

c_1 und c'_3 einander entsprechen, so erhält man durch c'_3 das Kantenloth, das zum dritten Riss (c_3) und durch c_1 das Kantenloth das zum zweiten Riss (c_2) eines Punktes der Curve A führt, und muss $\overline{c_2 c_2} = \overline{c'_3 c_3}$ gemacht werden. Will man die Tangente von A in einem Punkte (z. B. c), so zieht man ihren dritten Riss (der hier, wo A_3 gerade ist, mit A_3 zusammenfällt) und finden, wenn wir wieder (wie in voriger Nummer) die Ebene der Tangente und der entsprechenden Erzeugenden als $\mathfrak{T}_4$ ansieht, aus d_4 den Punkt d, indem man $\overline{d_1 c_1} = \overline{d_4 c'_3}$ macht.

Ist nun, wie in unserer Figur, A_1 eine Kreislinie, und A_3 eine Gerade, so wird man sich bei der Aufsuchung den $\mathfrak{C}$ (A) mittelst A_3 leicht überzeugen, dass die A eine Schraubenlinie ist, und demnach die Verwandelte der Schraubenlinie eine Gerade, ist. Wir haben also den Satz.

Die geodätische Curve eines Kreiscylinders ist eine Schraubenlinie.

Anm. Die eben ausgesprochene Eigenschaft der Schraubenlinie, wornach dieselbe die kürzeste Linie des Cylinders zwischen irgend zwei Punkten desselben ist, und eine gerade Verwandelte hat, lässt sich in zweierlei Art benützen, um eine Schraubenlinie von der Ganghöhe h auf einen gegebenen Cylinder (A_1) aufzuzeichnen.

1) Man zeichnet ein rechtwinkeliges Dreieck $a'_3 e'_3 e_3$ dessen eine Kathete ($a'_3 e'_3$) gleich dem Umfang von A_1 ist, während die andere Kathete ($e'_3 e_3$) die Länge h hat. Wickelt man nun dieses Dreieck auf den (fertig hergestellten) Cylinder (A_3) so auf, dass $a'_3 e'_3$ auf den Umfang (A_1) der Grundlinie des Cylinders und daher $e'_3 e_3$ auf eine Erzeugende desselben fällt, so wird $a'_3 e_3$ ein Gang einer Schraubenlinie. Will man einen weiteren Gang aufzeichnen, so zieht man (in der Figur des Dreieckes $a'_3 e'_3 e_3$) $a'_3 f_3 \perp a'_3 e'_3$, macht $a'_3 f_3 = h$ und zieht durch f_3 eine Parallele zu $a'_3 e_3$; dann kommt beim Aufwickeln dieser Figur auf den Cylinder e_3 auf f_3, und man erhält daher von e_3 aus die Fortsetzung der Schraubenlinie. Zeichet man die Figur des gegenannten rechtwinkeligen Dreieckes auf Papier, und beschneidet es nach den Linien $a'_3 e'_3$, $a'_3 f_3$ und $e'_3 e_3$, so kann man es auf den Cylinder aufkleben, und so darauf die Schraubenlinie fest erhalten.

2) Hat man einen fertigen Cylinder, und soll man darauf zwei Punkte durch eine Schraubenlinie verbinden, so spannt man auf dem Cylinder einen durch diese Punkte gehenden dünnen Faden oder Draht, der dann die Gestalt einer Schraubenlinie annimmt, weil er in Folge der Spannung die kürzeste Linie zwischen den Punkten vorstellt.

Fig. 142. 363. Aufg. Die Verwandelte einer Curve A eines Kreiskegels zu finden.

Aufl. Man nimmt die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Axe (a_1) des Kegels ist, die $\mathfrak{T}_2$ aber möglichst bequem gegen A, also, wenn wie in unserer Zeichnung (Fig. 142) A eben ist, $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zur Ebene (A_2) der Curve, so dass der zweite Riss von A eine Gerade (A_2) ist. Hat man nun noch einen Parallelkreis (B) des Kegels (ist ein solcher nicht gegeben, sondern der Halbmeridian C, so suchen wir uns einen), so verfahren wir ähnlich wie beim Cylinder. Wir suchen nemlich zuerst die Verwandelte von B, welche (nach 360. 2) ein Kreis (B_3) ist, indem wir wieder den Kegel (B a) als (krumme) $\mathfrak{T}_3$, seine Spur (B) als $\mathfrak{K}'$ ansehen, und die $\mathfrak{T}_3$ umklappen, d. h. nachdem wir sie nach einer Erzeugenden (C) aufgeschnitten und entwickelt haben, in unser Blatt legen, und zwar so dass die Spitze a nach a_3, B nach B_3, ein Punkt $\mathfrak{b}_1$ (von $\mathfrak{K}'_1$) nach $\mathfrak{b}_3$ (von $\mathfrak{K}'_3$) kommt, und ein Punkt $\mathfrak{c}'_1$ (von $\mathfrak{K}'_1$) so nach $\mathfrak{c}'_3$ (von $\mathfrak{K}'_3$), dass $\widehat{\mathfrak{b}'_3\mathfrak{c}'_3} = \widehat{\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1}$ (hiebei ist, ähnlich wie für die Epicycloiden, wenn $\widehat{\mathfrak{b}'_3\mathfrak{c}'_3}$ n Grade hat, während $\widehat{\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1} = 180^0$, $n : 180 = r : r'_3$, wo r den Halbmesser von B und r_3 den von B_3 bedeutet. In unserer Zeichnung, wo $r : r_3 = 1 : 3$, ist also $n = 60^0$). Theilt man wieder in gleichviele gleiche Theile, so entsprechen wieder die Theilpunkte einander, z. B. $\mathfrak{b}'_1$ und $\mathfrak{b}'_3$. Will man nun von einem Punkte d (der auf einer durch einen Theilpunkt $\mathfrak{b}'$ der B gehenden Erzeugenden liegt und von dem wir den ersten Riss, wie sich zeigen wird, gar nicht zeichnen brauchen) der $\mathfrak{C}$ (A) den dritten Riss suchen, so ziehen wir wieder die entsprechende Erzeugende (D) vor und (D_3) nach der Entwickelung, so ist $\overline{ad}$ vor und nach der Entwickelung von gleicher Länge. Um aber die Strecke $\overline{ad}$ zu finden (obgleich der erste Riss von d nicht gezeichnet) benützt man den durch d gehenden Parallelkreis (E), dessen Punkte alle gleichweit von a ent-

fernt sind. Misst man daher $\overline{e_2 d_2}$ (welches mit $\overline{ea}$ gleiche Länge hat, da ae || $\mathfrak{T}_2$ ist), so ist $\overline{e_2 a_2} = \overline{ad} = \overline{a_3 d_3}$. In derselben Art findet man weitere Punkte und somit A_3.

Will man für einen Punkt (d_3) von A_3 die Tangente (F_3) konstruiren, so muss man wieder die Tangente (F, deren zweiter Riss auf A_2 fällt) für den Punkt d vor der Entwickelung suchen, und den Winkel von F_3 und D_3 dem von F und D gleich machen. Um aber F zu finden, legen wir (nach 318) an den Kegel im Punkte d, also in der Erzeugenden D, eine Tangentialebene (Ga), deren erste Spur (G) die $\mathfrak{K}'_1$ in $\mathfrak{d}'_1$ berührt, und der Schnitt (df) dieser Tangentialebene mit $\mathfrak{C}$ (A_2) ist die verlangte Tangente (F). Sucht man nun den Winkel von D und F, so muss man die Ebene (DF) als $\mathfrak{T}_4$ betrachten und umklappen. Dieses Umklappen geschieht nun am zweckmässigsten so, dass a, d, $\mathfrak{d}'$ auf a_3, d_3, $\mathfrak{d}'_3$ fallen und somit $\mathfrak{d}'$f auf $\mathfrak{d}'_3 f_3$ und F auf F_3; dann ist F_3 die verlangte Tangente, da es durch d_3 geht und mit der Erzeugenden (D_3) nach der Entwickelung denselben Winkel bildet, wie F mit D vor der Entwickelung.

Soll noch der Inflexionspunkt der Verwandelten von A angegeben werden, so müssen wir wieder, ähnlich wie in voriger Nummer, eine Tangentialebene (Ha) an den Kegel (Ba) legen, die $\perp \mathfrak{C}$ (A_2) ist, demnach die durch a gehende und zur $\mathfrak{C}$ (A_2) senkrechte Gerade (ag) enthält, und deren erste Spur die B (in $\mathfrak{h}'$) berührt. Es ist also a$\mathfrak{h}'$ die Erzeugende, auf welcher der Punkt (h) liegt, der nach der Entwickelung zum Inflexionspunkt wird. Sucht man daher h_3, so ist dies der Inflexionspunkt von A_3.

Anm. Wäre A_2 eine krumme Linie, so bliebe das obige Verfahren dasselbe, nur würde dann der zweite Riss der Tangente in d eine Tangente in d_2 an A_2 sein, und würde man wieder auf die Aufsuchung des Inflexionspunktes verzichten. — Der Schüler wird gut thun, eine derartige Aufgabe zu versuchen, z. B. wenn A_2 eine Kreislinie ist, deren Mittelpunkt im zweiten Riss der Axe (a_1) liegt, so dass A der Schnitt unseres Kegels mit einem Kreiscylinder (A_2) wäre.

364. Sollte man, umgekehrt, für einen Kegel (Ba) aus A_3 das A_1 und A_2 finden, so dürfte man nur den oben angegebenen

Weg rückwärts gehen. Als Beispiel hiefür wollen wir folgende Aufgabe wählen.

Aufg. Es ist gegeben ein Kegel (Ba) und auf ihm zwei Punkte d, e auf zwei Erzeugenden (D, E); man soll die Curve A finden, welche durch d und e geht und eine geodätische Linie unseres Kegels ist.

Aufl. Nennen wir wieder, wie in voriger Nummer, die Lagen nach der Entwicklung dritte Risse, und suchen wir wieder a_3, $\mathfrak{A}'_3$, $\mathfrak{b}'_3$, $\mathfrak{c}'_3$ aber auch die dritten Risse (d_3 und e_3) von d und e, so ist die Gerade d_3e_3 die Verwandelte (A_3) der gesuchten Curve. Wie man für einen beliebigen Punkt f_3 das f_1 und f_2 und die Tangente für f findet, geht aus dem bisher Gesagten hinreichend klar hervor und ist aus der Zeichnung zu erkennen. Wir wollen nur den Schüler veranlassen, die Eigenschaften der Curve A zu ermitteln und zu dem Ende noch folgende Bemerkungen machen.

Hier, so wie in allen bisherigen Aufgaben über Entwickelungen, kann man sich die Abwickelung auch so vorstellen, als ob um die entwickelbare Fläche ein unendlich dünnes Papier nicht blos einmal, sondern öfter (bis in's Unendliche fort) aufgewickelt wäre, so dass die Abwickelung sich bis in's Unendliche fortsetzen lässt.

Fig. 143. 365. Aufg. Eine Böschungsfläche $A\alpha$ (s. 267) zu entwickeln, und die Verwandelte einer darauf liegenden ebenen Curve B zu suchen.

Aufl. Man sieht an unserer Zeichnung (Fig. 143), dass wir das Beispiel so gewählt haben, dass die Schneidlinie A unserer Fläche mit der Ebene (hier $\mathfrak{T}_1$) parallel ist, mit welcher alle Erzeugende gleiche Winkel (α) bilden sollen; ferner, dass die Curve B mit derselben Ebene ($\mathfrak{T}_1$) parallel ist, und daher ihr erster Riss (B_1) mit A_1 parallel ist. Setzt man nun A_1 aus Kreisbögen (a_1b_1, b_1c_1 etc.) und mithin auch B_1 aus Kreisbögen ($\mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1$ etc.) zusammen, so ist dadurch die ganze Böschungsfläche ($A\alpha$) in lauter Kreiskegel zerlegt, deren Spitzen (Centren) sich leicht finden lassen, da jede Spitze der Schnitt zweier Erzeugenden des entsprechenden Kegels ist. So ist die Spitze m der Schnitt der Erzeugenden $a_1\mathfrak{a}'_1$ und $b_1\mathfrak{b}'_1$, n von $b_1\mathfrak{b}'_1$ mit $c_1\mathfrak{c}'_1$ etc.

Entwickeln wir nun die Böschungsfläche, so erhalten wir eine Figur, die aus den Entwickelungen der genannten Kegelflächen zusammengesetzt ist. Suchen wir zunächst den dritten Riss ($m_3 a'_3 b'_3$) des Kegels $m a' b'$ (indem wir $\overline{m_3 a'_3} = \overline{m a'}$, $\overline{a'_3 b'_3} = \overline{a'_1 b'_1}$ und $\overline{m_3 b'_3} = \overline{m b'}$ machen, so dürfen wir nur $b'_3 m_3$ verlängern und darauf $\overline{m_3 n_3} = \overline{m n}$ auftragen, um den dritten Riss (n_3) der Kegelspitze n und daraus die Entwickelung des nächsten Kegels ($n b' c'$) zu erhalten u. s. f.

Liegt nun auf der Böschungsflache irgend eine andere Curve (C), (von welcher natürlich blos ein Riss, z. B. C_2 gegeben zu werden braucht) so finden wir wieder den dritten Riss eines Punktes von C, wenn wir die Erzeugende der Fläche suchen, die durch den Punkt geht, und dann den Kegel behandeln, dem die Erzeugende angehört. Durch denselben Kegel können wir dann auch die Tangente in dem entsprechenden Punkte der Verwandelten konstruiren. Was aber den Inflexionspunkt der Verwandelten anlangt, so wird man ihn, wenn diese provisorisch gezeichnet wird, so weit erkennen, dass man sieht, welchem Kegel er angehört und ihn mittelst dieses Kegels (nach voriger Nummer) aufsuchen.

366. Soll eine entwickelbare Schraubenfläche (deren Grat eine Schraubenlinie A ist), abgewickelt werden, so benützt man dazu den Umstand, dass die Verwandelte (A_3) von A (nach 360, 3.) eine Kreislinie ist, deren Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser von A ist. Dieser Krümmungshalbmesser ist aber analytisch aufgefunden, und $= \frac{r}{\sin^2 \varphi}$ (wo r der Halbmesser des Schraubencylinders und φ der Winkel ist, den eine Tangente der Schraubenlinie mit ihrer Axe einschliesst).

Hat man nun auf der Schraubenfläche irgend eine 𝕮 (B), so findet man wieder die Verwandelte eines Punktes, wenn man durch ihn eine Erzeugende legt, und diese in derselben Art benützt, wie bei den bisher behandelten Flächen, wobei man sich erinnern muss, dass diese Erzeugende nach der Entwickelung an A_3 berührt.

367. Aufg. Einen allgemeinen Kegel (der also kein Drehungskegel sein soll) zu entwickeln, und die Verwandelte einer Curve desselben zu konstruiren. Fig. 144.

Aufl. Nehmen wir zunächst an, es sei die zu verwandelnde Curve des Kegels (A a) seine Schneidlinie (A), so nehmen wir die Tafeln so an, dass die eine (z. B. $\mathfrak{T}_1$) A enthält, und theilen A in so kleine Theile ($\overline{bc}$, $\overline{cd}$ etc.), dass dieselben fast als gerade angesehen werden können. Ziehen wir nun durch die Theilpunkte b, c, d etc. etc. Erzeugende, so wird dadurch die Mantelfläche des Kegels in lauter Dreiecke getheilt, so dass derselbe als eine Pyramide von sehr vielen Seiten angesehen wird und das Netz der Pyramide die Abwickelung des Kegels darstellt. Die Ausführung der Aufgabe ist ziemlich einfach.

Hat man nemlich A in gleiche kleine Theile mit dem Messzirkel getheilt, so behält man das Mass im Zirkel. Nimmt man nun an, dass der entwickelte Kegel so umgeklappt werden soll, dass a nach a_3 und ab nach a_3b_3 (so dass $\overline{a_3b_3} = \overline{ab}$ ist) kommt, so finden wir c_3, indem wir das Dreieck abc nach $a_3b_3c_3$ legen; wir messen demnach die wahre Länge von ac und beschreiben damit aus a_3 mit einem Stockzirkel einen Kreisbogen C_3, sodann setzen wir unseren Messzirkel (der noch das obige Mass enthält) in b_3 ein und sehen, wo seine andere Spitze den Bogen B_3 trifft, so erhalten wir c_3. Beschreiben wir nun aus a_3 mit der wahren Länge ad einen Bogen D_3 und setzen jetzt den Messzirkel in c_3 ein, so erhalten wir d_3 u. s. w.

Will man die Curve A_3 nun aus Kreisbögen zusammensetzen, so sucht man in den einzelnen Punkten von A_3 die Tangenten und daraus die Normalen (dabei ist es nicht nothwendig, dies für alle Punkte zu thun, sondern es genügt, es für den zweiten, vierten, sechsten etc. auszuführen). Soll nun für den Punkt d_3 die Tangente construirt werden, so zeichnen wir die entsprechende vor der Entwickelung für den Punkt d, und geben den Punkt e an, in welchem diese Tangente (de) die $\mathfrak{K}$ (welche so gezeichnet wird, dass $\mathfrak{K}_1$ durch a_1 geht) trifft; dann ist $\wedge$ ade der Winkel der Tangente de und der Erzeugenden ad. Klappt man daher das Dreieck ade nach $a_3d_3e_3$, indem aus a_3 mit der Länge ae und aus d_3 mit der Strecke de (beide Strecken lassen sich leicht messen) Bögen beschreibt, die sich in e_3 schneiden (die Anschauung giebt leicht zu erkennen, welcher der beiden Schnittpunkte dieser Bögen e_3 ist), so ist e_3d_3 die Tan-

gente und ein in d_3 zu dieser gezogene Senkrechte die Normale für d_3.

Will man endlich den Inflexionspunkt von A_3, so hat man bekanntlich an den Kegel eine Tangentialebene zu legen, senkrecht zur Ebene von A, also $\perp \mathfrak{T}_1$; demnach ist der erste Riss dieser Tangentialebene eine Gerade, die aber ausserdem durch a_1 gehen und A_1 berühren muss. Man erhält so die Punkte f und g, deren dritte Risse die Inflexionspunkte sind.

Hat man auf diese Art die Verwandelte einer ebenen Curve des Kegels finden gelernt, so kann man mit Hilfe dieser Curve und der Erzeugenden der Fläche in gleicher Weise wie früher auch die Verwandelte unebener Curven finden.

Anm. Das eben angegebene Verfahren zur Aufsuchung der Verwandelten einer ebenen Curve eines allgemeinen Kegels liefert ein viel genaueres graphisches Resultat, als das in vielen Lehrbüchern angegebene, theoretisch vollkommen richtige Verfahren unter Zuhilfenahme einer Kugel, die den Kegel nach einer sphärischen Curve schneidet. Denn bei diesem Verfahren sind so viele Zeichnungsoperationen auszuführen, dass dadurch die Genauigkeit des Resultats sehr beeinträchtigt wird.

368. Will man die Verwandelte einer Curve A auf einer entwickelbaren Fläche AB (s. 266), so zieht man auf der Fläche Erzeugende, die so nahe an einander liegen, dass die zwischen ihnen liegenden Bögen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ von A und B sehr klein sind, so dass sie als Gerade angesehen werden können. Dann ist abdc ein Viereck, das aber im Allgemeinen uneben ist; zieht man daher eine Diagonale desselben, z. B. ad, so wird das Viereck in zwei Dreiecke getheilt. Verfährt man ebenso für alle die Vierecke zwischen je zwei auf einanderfolgenden Erzeugenden, so ist die entwickelbare Fläche in einen Körper übergegangen, dessen Mantel aus lauter Dreiecken besteht. Sucht man nun das Netz dieses Mantels in ähnlicher Weise, wie in voriger Nummer das der Pyramide, so erhält man Punkte der Verwandelten von A.

Soll endlich die Verwandelte einer ebenen Curve B auf einer Gratfläche A (s. 265) gefunden werden, so theilt man den Grat in so kleine Theile ab, bc, cd etc., dass sie als Gerade und daher verlängert als Erzeugende angesehen werden

können. Wird nun die Curve B von ab nach dem Punkte a′ geschnitten, von bc nach b′, von cd nach c′ etc. und sind die Bögen a′b′, b′c′ etc. so klein, dass sie ebenfalls als Gerade angesehen werden können, so ist die entwickelbare Fläche in Dreiecke a′bb′, b′cc′, c′dd′ etc. getheilt, und das Netz der als polyedrisch angesehenen Oberfläche führt wieder zur Verwandelten.

Anm. Das Entwickeln entwickelbarer Flächen giebt uns auch ein Mittel an die Hand, um jede Curve gerade zu richten (rektifiziren).

Will man eine ebene Curve rektifiziren, so bleibt im Allgemeinen kein anderes Mittel dafür, als dass man die Curve in sehr kleine Theile theilt, die man fast als gerade ansehen kann, und diese Theile nacheinander auf eine Gerade aufträgt. Dieses Mittel lässt sich aber nur ohne zu grosse Unbequemlichkeit und Ungenauigkeit anwenden, wenn die Curve in dem Zeichnungsblatt liegt, wohin man sie durch Umklappung ihrer Ebene bringen kann.

Ist nun aber die Curve uneben, und kann sie daher ohne Gestaltsänderung nicht umgeklappt werden, so erinnern wir uns, dass die Länge der Curve dieselbe ist, wie die ihrer Verwandelten für jede entwickelbare Fläche, auf der sie liegt. Nehmen wir daher eine entwickelbare Fläche an, welche die Curve enthält, und klappen jene nach ihrer Entwickelung um, so ist die Rektifikation der Verwandelten der Curve übereinstimmend mit der der Curve selbst.

Die bequemste entwickelbare Fläche die man durch eine Curve legen kann, ist gewöhnlich ihr erster oder zweiter Lothcylinder.

369. So wie man stets eine entwickelbare Fläche in eine Ebene entfalten kann, so kann man auch, aber nur unter besonderen Umständen, eine entwickelbare Fläche ($\mathfrak{F}$) auf eine andere ($\mathfrak{F}'$) Aufwickeln, oder auf ihr wälzen. Seien nemlich A, B, C, D etc. Folge-Erzeugende von $\mathfrak{F}$ und A′, B′, C′, D′, etc. Folge-Erzeugende von $\mathfrak{F}'$, und so gewählt, dass alle Winkel (AB, BC, CD etc., A′B′, B′C′, C′D′ etc.) von je zwei auf einanderfolgenden einander gleich sind; seien ferner a, b, c etc.

die Schnittpunkte von A und B, B und C, C und D etc. der Fläche $\mathfrak{F}$, und a', b', c' etc. dasselbe für $\mathfrak{F}'$.

Legt man $\mathfrak{F}$ so auf $\mathfrak{F}'$ dass A, B auf A', B' (also auch a auf a') fallen, und dreht nun $\mathfrak{F}$ um B bis C auf C' fällt (was nur möglich ist, wenn $\overline{ab} = \overline{a'b'}$), sodann die $\mathfrak{F}$ wieder um C bis D auf D' kommt (was wieder voraussetzt, dass $\overline{bc} = \overline{b'c'}$) u. s. w. so sagt man, die eine Fläche ist auf der anderen gewälzt oder abgewickelt worden. Dieser Vorgang ist aber nur möglich, wenn $\overline{ab} = \overline{a'b'}$, $\overline{bc} = \overline{b'c'}$ etc. und zugleich $\triangle abc = \triangle a'b'c'$, $\triangle bcd = \triangle b'c'd'$ etc. ist, also wenn die Kreislinie (a,b,c) $\cong$ Kreislinie (a',b',c') etc. Nun sind aber a,b,c etc. Punkte des Grats von $\mathfrak{F}$, a',b',c' etc. dasselbe für $\mathfrak{F}'$, die Kreise abc, bcd etc. Krümmungskreise von $\mathfrak{F}$, a'b'c' etc. dasselbe von $\mathfrak{F}'$; ferner wissen wir, dass die Krümmungskreise des Grats einer entwickelbaren Fläche sich durch die Entwickelungen nicht ändern. Es geht also hieraus hervor, dass die aufeinander folgenden Krümmungskreise des Grats von $\mathfrak{F}$ gleich sind denen von $\mathfrak{F}'$, und demnach die Verwandelte des Grats von $\mathfrak{F}$ kongruent der Verwandelten des Grats von $\mathfrak{F}'$. Ist der Grat von $\mathfrak{F}$ ein Punkt, d. h. ist $\mathfrak{F}$ ein Kegel, so muss auch $\mathfrak{F}'$ ein Kegel sein, dessen Spitz beim Wälzen mit der von $\mathfrak{F}'$ zusammenfallen muss. Demnach muss $\mathfrak{F}'$ ein Cylinder sein, wenn $\mathfrak{F}$ ein solcher ist. Aus dem Gesagten geht nun hervor:

1) Bewegt man zwei entwickelbare Flächen so aufeinander, dass die Erzeugenden der einen Fläche nach einander auf die entsprechenden der anderen fallen, so nennt man dies das **Wälzen** oder **Entwickeln** der einen Fläche auf der anderen;

2) sollen zwei entwickelbare Flächen auf einander entwickelbar sein, so müssen **beide** entweder **Cylinder** oder **Kegel** oder **Gratflächen** sein, deren Gratlinien bei der Entwickelung beider Flächen **kongruente Verwandelte** geben. Es sind demnach zwei entwickelbare Schraubenflächen nur dann auf einander wälzbar, wenn ihre **Grat-Schraubenlinien gleiche Krümmungshalbmesser** haben.

370. Wälzt man zwei entwickelbare Flächen ($\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$) aufeinander und liegt auf $\mathfrak{F}$ eine Curve M, so werden durch das Wälzen die aufeinander folgenden Punkte a, b, c etc. dieser Curve welche den Erzeugenden A, B C etc. von $\mathfrak{F}$ angehören, auf bestimmte Punkte (a', b', c' etc.) der entsprechenden Erzeugenden A', B', C' etc. von $\mathfrak{F}$ fallen, und demnach auf $\mathfrak{F}'$ eine Curve M' sich bilden, welche die Punkte a', b', c' etc. enthält. Wir wollen M' den **Abklatsch** der Curve M (der $\mathfrak{F}$) auf der Fläche $\mathfrak{F}'$ nennen.

Wickelt man die $\mathfrak{F}$ ab und legt sie in's Zeichnungsblatt (d. h. klappt man die als krumme $\mathfrak{T}_8$ betrachtete Fläche $\mathfrak{F}$ um), so geht M in die Verwandelte (M_3) über. Klappt man $\mathfrak{F}'$ (als krumme $\mathfrak{T}_4$ betrachtet) um, und zwar so, dass A'_4, B'_4, C'_4 etc. auf A_3, B_3, C_3 etc. fallen (und demnach die Verwandelte des Grats von $\mathfrak{F}'$ auf die von $\mathfrak{F}$) so kommen offenbar a'_4, b'_4, c'_4 etc. auf a_3, b_3, c_3 etc., also M'_4 auf M_3. Wir sehen also:

> Um den Abklatsch (M') einer Curve M einer entwickelbaren Fläche ($\mathfrak{F}$) auf einer anderen (auf $\mathfrak{F}$ wälzbaren) entwickelbaren Fläche ($\mathfrak{F}'$) zu finden, sucht man die Verwandelte (M_3) von M der Fläche $\mathfrak{F}$, und dann die Curve (M') auf $\mathfrak{F}'$, deren Verwandelte (unter der Voraussetzung, dass die Verwandelte des Grats von $\mathfrak{F}'$ auf die des Grats von $\mathfrak{F}$ fällt) M_3 ist.

Anm. Hat man zwei einander entsprechende Punkte der Curven M und M' und nennt die entsprechenden Krümmungshalbmesser ρ und ρ', die entsprechenden Winkel der Krümmungsebene mit den Tangentialebenen der Flächen φ und φ' und r den entsprechenden Krümmungshalbmesser der Verwandelten (M_3), so ist (nach 358):

$$r = \rho \cos\varphi = \rho' \cos\varphi' \text{ also}$$

$$\rho' = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \cdot \rho.$$

Ist also $\rho = 0$ oder ∞, so ist es auch in der Regel ρ'. Für $\cos\varphi = 0$ ist gewöhnlich $\rho' = 0$ und für $\cos\varphi' = 0$, $\rho' = \infty$ (wann finden Ausnahme statt?).

371. Wenn wir auch bekanntlich eine windschiefe Fläche ($\mathfrak{W}\mathfrak{F}$) nicht abwickeln können, da deren Elemente nicht eben

sind, so kann man sich doch vorstellen, daß man je zwei benachbarte Elemente der Fläche um deren gemeinschaftliche gerade Erzeugende drehen, und dadurch eine 𝔚𝔉 in eine andere umwandeln kann. Demnach wird es unter Umständen möglich sein, eine 𝔚𝔉 auf einer anderen abzuwickeln; es soll nun untersucht werden, wann dies ausführbar ist.

Soll nun eine windschiefe Fläche (𝔄) auf einer anderen (𝔄') abgewickelt werden, so müssen die beiden Flächen zunächst so gelegt werden, dass ein Element AB (A und B sollen zwei benachbarte Erzeugende der 𝔄 bedeuten) der Fläche 𝔄 ein Element A'B' der Fläche 𝔄' deckt. Sodann dreht man 𝔄' um B', bis das nächste Element B'C' (der Fläche 𝔄') das Element BC (der Fläche 𝔄) deckt u. s. w. Dieses Verfahren ist aber offenbar nur dann ausführbar, wenn die Elemente AB, AC, CD etc. den Elementen A'B', B'C', C'D' etc. kongruent sind. Wir müssen daher vor Allem untersuchen, wann zwei windschiefe Elemente AB, A'B' sich decken können.

Denken wir uns zu dem Ende das Element AB so gelegt, dass A in der $\mathfrak{T}_1$ und B parallel zur $\mathfrak{T}_1$ und im positiven Raume dieser Tafel liegt, so ist der Schnitt a_1 der ersten Risse (A_1, B_1) von A und B das Centrum (s. 283) von A. Sieht man nun von a_1 in die Richtung A_1, so liegt der Theil von B_1, den man sieht entweder rechts oder links von A_1. Je nach dieser Lage wollen wir das Element AB ein rechtes, linkes, oder auch ein positives, negatives nennen. Hieraus geht nun zunächst hervor:

> Sollen zwei windschiefe Elemente einander decken können, so müssen sie gleiche Vorzeichen haben (beide rechts oder beide links sein).

372. Da ein windschiefes Element aus zwei windschiefen (geschränkten) Geraden besteht, so bestimmt sich seine Gestalt, durch die Entfernung beider Geraden und durch ihren Winkel. Wir wollen erstere die Höhe und letzteren die Schränkung des Elementes nennen. Setzen wir nun ein- für allemal voraus, daß wir alle 𝔚𝔉 so in Elemente theilen, dass die Höhen der Elemente gleich sind, so unterscheiden sich die Elemente nur durch die Grösse der Schränkung und durch das Vorzeichen. Da aber die Schränkung unmessbar klein ist, so geben wir zur Bestimmung der Gestalt eines wind-

schiefen Elementes das Verhältniss seiner Höhe und Schränkung an, d. h. einen Bruch, dessen Zähler die Höhe und dessen Nenner die Schränkung ist. Diesen Bruch nennt man den Parameter des Elementes, und giebt ihm das Zeichen + oder —, je nachdem das Element ein rechtes (positives) oder linkes (negatives) ist. Wie man nun die Grösse dieses Parameters, trotzdem Zähler und Nenner desselben unmassbar klein sind, finden kann, werden wir in der nächsten Nummer sehen. Wir erkennen aber an dem eben Gesagten folgenden Satz:

Zwei windschiefe Elemente sind kongruent, wenn sie (der Grösse und dem Vorziehen nach) gleiche Parameter haben.

373. Wir wollen uns darauf beschränken, den Parameter einer solchen windschiefen Fläche zu finden, deren Elemente alle unter einander gleich sind, z. B. der flachen und scharfen (auch der allgemeinen windschiefen) Schraubenfläche und des einfachen Drehungs-Hyperboloides.

Bei der flachen Schraubenffäche hat sich die Erzeugende gegen ihre Anfangsstellung um 360° (oder um 2π) gedreht, sobald sich dieselbe um die Ganghöhe gehoben hat. Lässt man nun die Erzeugende um $\frac{h}{n}$ sich heben, während dessen sie sich um $\frac{2\pi}{n}$ dreht, so bildet sie mit ihrer Anfangsstellung ein Element, wenn n unendlich gross vorausgesesetzt wird. Dann ist aber $\frac{h}{n}$ die Höhe und $\frac{2\pi}{n}$ die Schränkung und demnach $\frac{2\pi}{h}$ (mit Zeichen + oder —, je nachdem das Element ein rechtes oder linkes ist) der Parameter.

Bei dem Drehungshyperboloid findet sich nach Anleitung der Nr. 283 das Centrum einer Erzeugenden auf dem Aequator und ist demnach dieser selbst der Hals der Fläche. Theilt man nun den Hals in n (n unendlich gross) gleiche Theile (Elemente) und zieht durch die Endpunkte a, b eines solchen Elementes Erzeugende A, B, so ist die Höhe des Elements AB, kleiner als ab, da ab nicht senkrecht auf A steht, sondern mit der Senkrechten zu A den $\wedge\alpha$ bildet, den die Erzeugenden des

Hyperboloids mit seiner Axe einschliessen. Es ist leicht zu erkennen, dass demnach die Höhe des Elements $AB = \overline{ab} \cos \alpha$ $= \frac{2\pi r \cos\alpha}{n}$ ist, wenn r den Halbmesser des Aequators bezeichnet. Was die Schränkung des Elements AB betrifft, so ist sie gleich dem Winkel, den die beiden zu A, B parallelen Erzeugenden des asymptotischen Kegels einschliessen. Dieser Winkel aber ist der n^te Theil des Winkels β, in welchen der asymptotische Kegel übergeht, wenn er nach einer Erzeugenden aufgeschnitten und abgewickelt wird. Man kann sich leicht überzeugen, dass $\beta = 2\pi \sin \alpha$ und demnach der Parameter unseres Hyperboloids $= r \cot \alpha$ ist.

Heisst demnach der Halbmesser des Aequators eines einfachen Drehungshyperboloids r, der Winkel seiner Axe mit den Erzeugenden α, so ist sein Parameter $= r \cot \alpha$.

374. Hat man zwei einander nach einer Erzeugenden berührende windschiefe Drehungshyperboloide, das eine mit den Elementen r, α und das andere mit den Elementen r', α', so muss $r \cot \alpha = r' \cot \alpha'$ sein. Stehen nun die Axen beider Flächen auf einander senkrecht, so ist $\alpha' = 90^0 - \alpha$ und demnach $r \cot \alpha = r' \operatorname{tg} \alpha$ oder $r = r' \operatorname{tg}^2 \alpha$. Zugleich ist aber die Entfernung δ der beiden Axen $= r \pm r'$ (je nachdem die beiden Flächen ihre konvexen Seiten einander zuwenden oder nicht gilt das Zeichen $+$ oder $-$). Nehmen wir an, es seien $\delta = r + r'$, so stellt sich heraus $r = \delta \sin^2 a$ und $r' = \delta \cos^2 \alpha$.

Ist aber in der That $r = \delta \sin^2 a$ und $r' = \delta \cos^2 \alpha$, so dass die Parameter beider Flächen einander gleich sind, und hat man die beiden Flächen, so gelegt, dass sie einander nach einer Erzeugenden berühren, oder (wenn wir die aufeinanderfolgenden Erzeugenden von 𝔄 mit A, B, C etc., die von 𝔄′ mit A′, B′, C′ etc. bezeichnen), dass ein Element AB der Fläche 𝔄 auf einem Elemente A′B′ der Fläche 𝔄′ liegt, und will man nun die Flächen auf einander abwickeln, so muss man die 𝔄′ um B′ (das auf B der Fläche 𝔄 liegt) drehen, bis C′ auf C fällt. Dies ist aber nur möglich, wenn wir erst B′ auf B verschieben, bis das Centrum von B′ auf das von B fällt, und dann erst

die 𝔄′ um B′ drehen, bis C′ auf C fällt. Nun müssen wir C′ auf C verschieben, bis das Centrum von C′ auf das von C zu liegen kommt, und dann 𝔄′ um C′ drehen, bis D′ auf D fällt etc.

Man sieht daher, dass zwei einfache Drehungshyperboloide, deren Axen auf einander senkrecht stehen, auch wenn ihre Elemente gleiche Parameter haben, eine eigentliche Wälzung auf einander nicht zulassen, wohl aber dieselbe gestatten, wenn man die einander berührenden Erzeugenden auf einander verschiebt. Bei näherer Untersuchung würde man finden, dass diese Verschiebung während der Wälzung für eine Umdrehung der Fläche 𝔄 (vom Halbmesser r) betrüge die Strecke $2\pi r$ $(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

Hätte man aber eine 𝔚𝔉, deren Hals (H) so beschaffen ist, dass die Erzeugenden A, B, C etc. in den Punkten a, b, c etc., wo sie H schneiden, auf H senkrecht stehen, dann eine zweite 𝔚𝔉 mit gleicher Eigenschaft und zugleich so, dass die Parameter ihrer Elemente denen der ersten gleich sind, so würde, wenn A′B′ auf AB läge, auch das Centrum von B′ auf dem von B liegen u. s. w. und eine Verschiebung beim Wälzen nicht nöthig sein. Solche 𝔚𝔉 lassen sich also auf einander abwickeln.

§. 22.

Ueber Krümmungen von Flächen.

Fig. 145. 375. Hat man auf einer Fläche (𝔉) einen beliebigen Punkt a und die ihm entsprechende Normale N der 𝔉 und legen wir durch N eine Ebene, welche die 𝔉 nach einer Curve A schneidet, so wird dieser Curve in a ein bestimmter Krümmungskreis (Schmiegungskreis) entsprechen. Legt man nun durch N alle möglichen Ebenen, und sucht für jede den entsprechenden Krümmungskreis im Punkte a, so soll untersucht werden, in welcher Beziehung die Halbmesser dieser Kreise zu einander stehen.

Irgend zwei solcher Krümmungskreise werden in der Regel ungleich sein, und daher ausser dem Punkte a nichts gemein haben; es geben daher sämmtliche Krümmungskreise in a eine

Fläche, die uns nicht bekannt ist, und das Gesetz, nach welchem die verschiedenen Krümmungshalbmesser in a sich richten, nicht leicht erkennen lässt. Ersetzen wir aber jeden Krümmungskreis durch eine Schmiegungsellipse in a, die in diesem Punkte denselben Krümmungshalbmesser (ρ) hat, wie der entsprechende Krümmungskreis, so können wir die eine Halbaxe (α) dieser Ellipse, etwa die, welche auf der Normale N liegt, beliebig wählen, während die andere Halbaxe (β) so gross genommen werden muss, dass $\frac{\beta^2}{\alpha} = \rho$ ist. Man kann daher für alle durch die Normale N zu legenden Ebenen Schmiegungsellipsen wählen, deren in N liegende Axen gleiche Länge haben, so dass alle diese Ellipsen zwei gemeinsame Scheitel besitzen, und eine Fläche geben, die anscheinend eine Art Ellipsoid ist.

Nehmen wir nun (Fig. 145) die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie den Punkt a der Fläche ($\mathfrak{F}$) enthält, und mit der Tangentialebene der Fläche für den Punkt a zusammenfällt, so dass die Gerade a_1 die Normale N ist, und setzen wir zunächst voraus, dass die Fläche im Punkte a konvex ist, d. h. dass alle dem Punkte a benachbarten Flächen-Punkte und daher auch alle Schmiegungsellipsen oberhalb der $\mathfrak{T}_1$ liegen. Ist nun c (dessen erster Riss in a_1) der Mittelpunkt aller Schmiegungsellipsen, so ist der erste Riss ($\overline{d_1 e_1}$) der mit der $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ellipse gleich der Axe $\overline{de}$ derselben. Zeichnet man nun die ersten Risse aller der Ellipsen, so erhält man als ersten Umriss der $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Curve M_1 von der Art, dass wenn man $d_1 e_1$ als X-Axe und a_1 als Anfangspunkt nimmt, die Gleichung der Curve M_1 wahr bleibt, wenn man für x und y gleichzeitig entgegengesetzte Zeichen setzt. Denn jedem Punkt f_1 entspricht ein Punkt g_1, der mit ihm gleichweit von a_1 entfernt ist, so dass das x und y für f_1 die entgegengesetzten Zeichen derselben Koordinaten für g_1 haben. Es muss also jedes Glied der Gleichung für M_1 von gerader Ordnung sein.

Schneidet man nun M_1 durch eine Gerade $f_1 a_1 g_1$ nach den Punkten f_1, g_1, so ist $\overline{a_1 f_1} = \overline{a_1 g_1} = \beta$ die Halbaxe einer Schmiegungsellipse, und ist für den Punkt g_1, wenn man den Winkel $g_1 a_1 e_1 = \varphi$ setzt, $x = \beta \cos \varphi$ und $y = \beta \sin \varphi$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung für die Curve M_1, so nimmt sie (weil

alle ihre Glieder von gerader Ordnung in Bezug auf x und y sind) folgende Form an:

I. $A + B\beta^2 + C\beta^4 + \ldots = 0$, oder wenn man alle Glieder dieser Gleichung mit α dividirt und berücksichtigt, dass $\rho = \frac{\beta^2}{\alpha}$, die Form:

II. $a + b\rho + c\rho^2 + \ldots = 0.$

Da man aber für jeden Winkel φ unter allen Umständen ein einziges ρ erhält, so kann man vermuthen, dass die Gleichung II in Bezug auf ρ linear, also von der Form $a + b\rho = 0$ und demnach die Gleichung I von der Form $A + B\beta^2$ sein müsse, und demnach die Gleichung der Curve M_1 vom zweiten Grade und M_1 (weil eine geschlossene Curve) eine Ellipse ist. Diese Vermuthung bestätigt sich auch (s. de la Gournerie, 3. Partie). Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn man für einen konvexen Punkt a einer beliebigen Fläche (𝔉) die Normale N zieht, durch N alle möglichen Ebenen legt, welche die Fläche nach Curven schneiden, so giebt es unzählige Ellipsen, die a und einen beliebigen zweiten Punkt b von N zu Scheiteln haben, und welche in a für die genannten Schnittcurven der 𝔉 Schmiegungsellipsen sind, die ein Ellipsoid bilden. Man nennt ein solches Ellipsoid ein **Schmiegungsellipsoid** der 𝔉 für den Punkt a, die Aequatorialellipse (M) in Bezug auf die Hauptaxe ab die **Indikatrix** des Punktes a, und a einen **elliptischen** Punkt.

Anm. Geht in besonderen Fällen die Indikatrix M in einen Kreis über, so nennt man den Punkt a einen Kreis- oder Nabelpunkt, und die ihm entsprechenden Krümmungshalbmesser der Fläche sind alle einander gleich.

376. Die elliptische Indikatrix M für einen Punkt a einer Fläche 𝔉 hat zwei Axen, denen zwei Schmiegungsellipsen P und Q (für den Punkt a) entsprechen, welche die Hauptschnitte des Schmiegungsellipsoides vorstellen. Nimmt man auf P (oder Q) einen dem a benachbarten Punkt p an und sucht die Normale der 𝔉 für p, so liegt sie in der Ebene von P und

schneidet daher die Normale N für den Punkt a. Für jede andere Schmiegungsellipse, die kein Hauptschnitt des Ellipsods ist, liegt die einem benachbarten Punkte von a entsprechende Normale der Fläche nicht in der Ebene der Ellipse; sie schneidet also die Normale N nicht. Da noch von beiden Axen der Indikatrix M die eine den grössten, die andere den kleinsten Durchmesser von M vorstellt, und demnach von den diesen Axen entsprechenden Krümmungshalbmessern der eine der grösste und der andere der kleinste von allen dem Punkte a entsprechenden Krümmungshalbmessern ist, so erhält man folgende Sätze:

1) Legt man durch einen elliptischen Punkt a einer Fläche $\mathfrak{F}$ unzählige Normalebenen der $\mathfrak{F}$ im Punkte a, welche die $\mathfrak{F}$ nach unzähligen Curven schneiden, so giebt es im Allgemeinen unter den Krümmungshalbmessern dieser Curven für den Punkt a einen grössten (ρ_1) und einen kleinsten (ρ_2). Nur für den Kreispunkt sind alle ρ einander gleich;

2) die den beiden Halbmessern ρ_1, ρ_2 entsprechenden Ebenen stehen aufeinander senkrecht;

3) nimmt man auf $\mathfrak{F}$ einen Nachbarpunkt p von a und legt durch p eine Normale zu $\mathfrak{F}$, so schneidet sie in der Regel die Normale N (für Punkt a) nicht. Liegt aber p auf einem Hauptkrümmungshalbmesser (grössten oder kleinsten), so schneiden sich die beiden benachbarten Normalen. Ist a ein Kreispunkt und daher das entsprechende Ellipsoid eine Drehfläche, so wird N von allen benachbarten Normalen geschnitten.

377. Ist M die Indikatrix für einen elliptischen Punkt a einer Fläche, und sind β_1 und β_2 die Halbaxen (β_1 die grosse, β_2 die kleine) von M, während α die senkrecht zur Indikatrix stehende halbe Hauptaxe des Schmiegungsellipsoids bezeichnet, und zieht man durch den Mittelpunkt c von M eine Gerade db, die mit X einen $\measuredangle\, \varphi$ bildet, und setzt $\overline{dc} = \overline{bc} = \beta$, so ist: Fig. 146.

$\frac{x^2}{\beta_1^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} = 1$ und für den Punkt b: $x = \beta \cos\varphi$, $y = \beta \sin\varphi$.

Hieraus ergiebt sich: $\frac{\beta^2 \cos^2\varphi}{\beta_1^2} + \frac{\beta^2 \sin^2\varphi}{\beta_2^2} = 1.$

oder $\frac{\cos^2\varphi}{\beta_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta_2^2} = \frac{1}{\beta^2}.$

Dividirt man jeden der Nenner der letzten Gleichung mit α und erwägt, dass $\frac{\beta^2}{\alpha} = \rho$, $\frac{\beta_1^2}{\alpha} = \rho_1$, $\frac{\beta_2^2}{\alpha} = \rho_2$ ist, wenn ρ, ρ_1, ρ_2 die den Halbmessern β, β_1, β_2 der Indikatrix M entsprechenden Krümmungshalbmesser im Punkte a bezeichnen, so erhält man: $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$, wodurch man im Stande ist, aus ρ_1 und ρ_2 (dem grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser für den Punkt a der Fläche) ρ zu finden, d. h. den Krümmunghalbmesser im Punkte a für den Schnitt einer die Normale N (für den Punkt a) enthaltenen Ebene, die mit der Ebene des grössten Krümmungskreises für a den $\wedge \varphi$ bildet. Die letzte Gleichung drückt einen Satz aus, den man den Euler'schen Satz nennt.

378. Wir haben den Eulerschen Satz zunächst für den Fall angegeben, dass der Punkt a der Fläche ein elliptischer Punkt ist, d. h., dass alle Krümmungskreise Halbmesser von endlicher Länge haben, und auf einer Seite der dem Punkte a entsprechenden Tangentialebene liegen. Der Satz gilt aber für alle Fälle, in welchen im Punkte a eine einzige Normale möglich ist, und findet sich durch Discussion der Gleichung: $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$ wie sich der Satz für die verschiedenen Fälle modifizirt.

Ist nemlich der Punkt a so beschaffen, dass zwar alle Krümmungskreise auf einer Seite der Tangentialebene liegen, aber der Halbmesser ρ_1 des grössten Krümmungskreises ∞ ist, in welchem Fall man den Punkt einen parabolischen Punkt nennt, so erhält man die Gleichung $\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$, während die Gleichung der Indikatrix: $y^2 = \pm \beta_2$ wird, also zwei mit der X Axe parallele Gerade in der Entfernung β_2 bedeutet.

Ist der Punkt a von der Art, dass die Krümmungskreise auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene in a liegen — man nennt dann Punkt a einer hyperbolischen Punkt — so

dass man die Halbmesser dieser Kreise auf der einen Seite jener Ebene mit $+$, auf der anderen mit $-$ bezeichnet, so ist dann ρ_1, positiv ρ_2 negativ und unsere Gleichung geht über in:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}, \text{ die der Indikatrix in:}$$

$$\frac{x^2}{\beta_1^2} - \frac{y^2}{\beta_2^2} = 1, \text{ also in die einer Hyperbel.}$$

In diesem wird $\frac{1}{\rho} = 0$, wenn $\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$ ist, wodurch man die Lage derjenigen Krümmungskreise erhält, die in eine Gerade übergehen, und den Asymptoten der Hyperbel entsprechen.

In ähnlicher Art findet man die Modifikation, welche der Euler'sche Satz erleidet, wenn $\rho_1 = \rho_2$ oder $\rho_1 = \rho_2 = \infty$, $\rho_2 = 0$, $\rho_2 = \rho_2 = 0$.

Ist ρ_1 gegeben und $\rho_2 = 0$, so ist offenbar $\rho = 0$ (für jeden $\wedge\ \varphi$ nur für $\varphi = 0$ ist der Krümmungshalbmesser der gegebene ρ_1). Dies gilt, wie man sich leicht überzeugen wird für den Grat einer entwickelbaren Fläche.

379. Nimmt man auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ einen Punkt a an, so entsprechen im Allgemeinen, wie wir oben gesehen haben, den Nachbarpunkten (auf $\mathfrak{F}$) von a Normalen, welche die Normale N im Punkte a kreuzen; nur zwei Nachbarpunkte (b, b′) von a giebt es, deren Normalen N schneiden, und die so liegen, dass die Ebenen Nb und Nb′ Hauptebenen des Schwingungsellipsoids, also von den in diesen Ebenen liegenden Krümmungshalbmessern der eine (etwa der b entsprechende) der grösste, der andere, dem b′ entsprechende, der kleinste ist. Geht man nun von a nach b, von b nach demjenigen Nachbarpunkte c von b, der dem grössten Krümmungshalbmesser von b entspricht, u. s. w. so bilden die Punkte a, b, c etc. eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass von den Normalen der $\mathfrak{F}$ die man in den einzelnen Punkten dieser Curve errichtet, je zwei benachbarte sich schneiden. Eine solche Curve der $\mathfrak{F}$ nennt man eine Krümmungslinie der $\mathfrak{F}$. Geht man vom Punkt a zum Punkte b′ (der dem kleinsten Krümmungshalbmesser für a entspricht) von diesem zu dem benachbarten Punkte c′, der dem kleinsten Krümmunghalbmesser von b′ entspricht u. s. w., so erhält man

eine zweite durch a gehende Krümmungslinie, die im Punkte a zur ersten Krümmungslinie senkrecht steht. Ebenso giebt es durch jeden Punkt zwei Krümmungslinien, die sich in dem Punkte rechtwinkelig schneiden. Wir sehen also:

1) Es gibt auf jeder Fläche zwei Systeme von Krümmungslinien; die Curvenelemente des einen (ersten) Systems sind Elemente der den entsprechenden Stellen angehörigen **grössten** Krümmungskreise; die des **zweiten** entsprechen den **kleinsten** Krümmungskreisen;
2) jede solche Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass die in ihren Punkten errichteten Normalen der Fläche eine **entwickelbare** Fläche bilden.
3) jede Krümmungslinie des einen Systems schneidet alle Krümmungslinien des anderen Systems **rechtwinkelig**.

Da man eine Curve die ein System von anderen Curven unter konstantem Winkel schneidet, ein Trajektorie, und wenn der konstante Winkel ein rechter ist, eine rechtwinkelige Trajektorie des Systems nennt, so könnnen wir sagen:

4) Jede Krümmungslinie des einen Systems ist eine rechtwinkelige Trajektorie des anderen.

Anm. Die Fugen einer Gewölbfläche sollen so beschaffen sein, dass sie sich rechtwinkelig schneiden, und daher das System der einen Fugen Trajektorien für das der anderen sind. Ausserdem ist es auch erwünscht, dass die einer Fuge der Gewölbflächen entsprechenden Normalen der Fläche eine entwickelbare Fläche bilden. Man sieht also, dass bei Gewölbconstructionen die Krümmungslinien zur Anwendung kommen. Wir wollen deshalb in der folgenden Nr. die Lagen der Krümmungslinien der Flächen so weit sich dieselben leicht ergeben, auszumitteln suchen.

380. Jede gerade Erzeugende A einer entwickelbaren Fläche (𝔄) ist offenbar eine Krümmungslinie der 𝔄; denn die dieser Geraden entsprechenden Normalen der 𝔄 liegen in einer Ebene (also schneidet jede ihre Nachbarin). Die andere Krümmungslinie (B) eines Punktes a von 𝔄 ist eine rechtwinkelige Trajektorie aller geraden Erzeugenden. Wickelt man die 𝔄 ab,

so wird B eine Trajektorie der geraden Erzeugenden nach der Abwickelung, demnach für den Kegel ein Kreis, für die entwickelbare Schraubenfläche eine Kreisevolvente.

Für eine Drehfläche ist offenbar jeder Meridian eine Krümmungslinie, da die ihm entsprechenden Normalen wieder in einer Ebene liegen; ferner jeder Parallelkreis, da alle in seinen Punkten errichteten Normalen der Fläche einen Kegel bilden.

Aus demselben Grunde ist für eine Simsfläche jeder Meridian eine Krümmungslinie und jede Parallele, da die in ihren Punkten errichteten Normalen der Fläche eine Böschungsfläche (also eine entwickelbare Fläche) bilden.

Eben darum sind auch die kreislinigen Erzeugenden einer Röhrenfläche Krümmungslinien der Fläche.

381. Hat man auf einer Fläche ($\mathfrak{F}$) eine Normale A, ihren Fig. 147.
Fusspunkt a, in a eine Tangente der Fläche (die also auf A senkrecht steht) und durch diese Tangente zwei Ebenen, von denen eine die Normale A enthält, so nehme man die Tafeln so an, dass A in die Kante ($\mathfrak{K}$) fällt (Fig. 147), die beiden Ebenen welche die Tangente in a enthalten $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ stehen, hier die Ebenen B_2 (welche A enthält) und C_2, und daher auch die Tangente, hier die Gerade (a_2), senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ steht. Nennt man die beiden Curven, nach denen die Ebenen B_2 und C_2 die $\mathfrak{F}$ schneiden, B und C, und denkt man sich zwei Kreise (D, E) welche B und C in a berühren und ausserdem beziehungsweise durch die Punkte b und c der Curven B und C gehen, so kann man durch D und E eine Kugel legen, die also die Punkte a, b und c mit $\mathfrak{F}$ gemein hat. Nimmt man nun an, b und c lägen dem Punkt a unendlich nahe, so haben $\mathfrak{F}$ und die Kugel in a die Tangentialebene (abc) also auch die Normale A gemein, so dass der Mittelpunkt der Kugel auf A liegt. Dann ist aber auch D der Krümmungskreis von B, E der von C im Punkte a, und ist offenbar D ein grösster Kreis der Kugel. Hieraus geht der folgende Satz, nach seinem Entdecker der Meusnier'sche Satz genannt, hervor:

1) Alle Schnitte einer Fläche mit einer Ebene, die eine Tangente einer Fläche im Punkte a enthält, haben zu Krümmungskreisen Keise einer

Kugel, deren grösster Kreis derjenigen Schnittebene ($\mathfrak{C}$) entspricht, welche die Normale für a enthält. Hieraus sieht man:

2) Macht eine der Schnittebenen mit $\mathfrak{C}$ einen Winkel φ, so ist der Halbmesser ρ des entsprechenden Krümmungskreises $= r \cos\varphi$ (wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet), oder es ist ρ die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse r mit ρ den $\wedge \varphi$ bildet.

Fig. 148. 382. Um ein Beispiel zur Anwendung des Meusnier'schen Satzes zu geben sei A die Axe, B der Halbmeridian (mit dem Mittelpunkt a, der wie A und B in unserem Zeichnungsblatt liegen soll) eines Wulstes, b ein Punkt desselben, in welchem man sich eine Senkrechte zu unserer Bildebene denke, die eine Tangente des Wulstes für b vorstellt, während offenbar bd die Normale der Fläche für b ist. Da nun $\overline{bc}$ der Halbmesser des Parallelkreises in b ist, so wird, wenn man durch die Normale bd eine die genannte Tangente enthaltende, also auf der Bildebene senkrechte Ebene legt, der Krümmungshalbmesser der in dieser Ebene liegenden Schnittcurve für b die Länge $\overline{bd}$ sein. Denn setzt man $\wedge cbd = \varphi$, und berücksichtigt, das der Krümmungsmittelpunkt des Parallelkreises (bc) der Punkt c ist, so muss $\overline{bc} = \overline{bd} \cos\varphi$ sein, was in der That der Fall ist. Wir haben also hier mitteist des Meusnier'schen Satzes für den Punkt b ausser dem schon vorhandenen kleinsten Krümmungskreis B, auch den Halbmesser $\overline{bd}$ des grössten Krümmungskreises gefunden, und sehen zugleich, dass der Punkt b ein hyperbolischer Punkt ist.

Fig. 149. 383. Wenn eine Fläche ($\mathfrak{A}$) von einer entwickelbaren Fläche ($\mathfrak{B}$) berührt wird, und wir wollen für irgend einen Punkt der Berührungslinie eine Tangente konstruiren, so werden wir dazu vorläufig kein Mittel besitzen. Denn wenn wir, wie bei Schnittcurven zweier Flächen, in dem Punkte der Curve an beide Flächen Tangentialebenen legen, so fallen diese in eine zusammen. Nehmen wir aber zunächst an, der Punkt a sei ein elliptischer Punkt, und suchen wir das Schmiegungsellipsoid für den Punkt a, indem wir die $\mathfrak{T}_1$ (Fig. 149) so annehmen, dass sie mit der Tangentialebeue der $\mathfrak{A}$ in Punkte a zusammenfällt,

und nun aus dem grössten (ρ_1) und kleinsten (ρ_2) Krümmungshalbmesser die Indicatrix M_1 zeichnen (wobei wir wieder α (s. 377) beliebig wählen dürfen, also auch $= \rho_1$ setzen können), so können wir für unsere Aufgabe das Schmiegungsellipsoid ($\mathfrak{C}$) an die Stelle der Fläche $\mathfrak{A}$ setzen. Ist nun A die Erzeugende der Fläche $\mathfrak{B}$, die im Punkt a die Fläche $\mathfrak{A}$, also auch $\mathfrak{C}$ berührt, so können wir einen Cylinder ($\mathfrak{D}$) annehmen, der die entwickelbare Fläche $\mathfrak{B}$ nach A berührt, und diesen Cylinder $\mathfrak{D}$ an die Stelle von $\mathfrak{B}$ setzen. Suchen wir daher einen Cylinder $\mathfrak{D}$, der das Schmiegungsellipsoid ($\mathfrak{C}$) berührt, und $\parallel$ A ist, so berührt er $\mathfrak{C}$, als Fläche zweiter Ordnung, nach einer ebenen Curve B, deren erster Riss in eine Gerade B_1 übergeht, die mit A_1 in Bezug auf M_1 konjugirt ist. Es hat also die Tangente dieser Curve B im Punkte a (welche offenbar zugleich unsere gesuchte Tangente ist) B_1 zum ersten Riss, während ihr zweiter Riss auf A_2 fällt. Hat man also die Tafeln so, wie angegeben, gewählt (dass $\mathfrak{T}_1$ mit der Tangentialebene der $\mathfrak{A}$ im Punkte a zusammenfällt, und die gesuchte Tangente, ebenso wie die Erzeugende A in $\mathfrak{T}_1$ liegt) und zeichnet man in $\mathfrak{T}_1$ die Indicatrix M der $\mathfrak{A}$ für den Punkt a

> so sind die gesuchte Tangente B und (die die Fläche $\mathfrak{A}$ berührende) Erzeugende A konjugirte Durchmesser der Indicatrix M.

Diesen Satz nennt man, nach seinem Entdecker, den Dupinschen Satz von den konjugirten Tangenten.

Anm. Dieser Satz und die Konstruktion gilt auch, wenn der Punkt a ein hyperbolischer Punkt ist; nur ist dann die Indikatrix eine Hyperbel.

§. 23.

Tangentialebenen und Tangenten an Flächen, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist.

384. In diesem § sollen Tangentialebenen und Tangenten an Flächen gesucht werden, die

1) durch einen gegebenen Punkt gehen,
2) parallel einer Geraden sind,
3) parallel laufen mit einer Ebene,
4) eine gegebene Gerade enthalten.

Ist das Gesuchte eine Tangente, welche eine von den vier Bedingungen erfüllen soll, und denkt man sich dieselbe gefunden, so kann man durch sie in der Regel eine einzige Tangentialebene der Fläche legen, welche denselben Berührungspunkt wie die Tangente enthält, so dass man diese Berührungspunkte auch erhält, wenn man, statt der Tangente, eine Tangentialebene an die Fläche legt, welche die gegebene Bedingung erfüllt.

Ist die Fläche entwickelbar, so berührt sie jede Tangentialebene nach einer Geraden (Berührungslinie).

385. Aufg. Durch einen Punkt a an eine entwickelbare Fläche (𝔉) eine Tangentialebene legen.

Aufl. Denkt man sich die Tangentialebene und ihre Berührungslinie A gefunden, und zieht man in ihr eine beliebige durch a gehende Gerade B, die A in einem Punkte b schneidet, so ist B eine Tangente von 𝔉 im Punkte b, und die durch b gehende Erzeugende der 𝔉 ist die Berührungslinie. Legt man daher durch a eine beliebige Ebene, sucht ihren Schnitt C mit 𝔄 und legt von a an C eine Tangente, die C in b berührt, so erhält man dadurch die Berührungslinie A, und die Tangentialebene (A a).

Anm. Liegt der Punkt a in der Ebene der Schneidlinie der 𝔄, so kann man gleich die Schneidlinie als die Curve C ansehen, und an sie eine Tangente von a aus legen. — In allen Fällen erhält man so viele Tangentialebenen, als es von a aus an C Tangenten gibt.

Fig. 150. 386. Aufg. An eine Kegelfläche (A a) durch einen Punkt b eine Tangentialebene zu legen.

Aufl. Wir könnten natürlich diese Aufgabe der vorigen Nummer entsprechend lösen; allein dann müssten wir eine Hilfscurve C konstruiren, was wir hier vermeiden können, wenn A eben ist. Es ist nemlich bekannt, dass jede Tangentialebene eines Kegels durch sein Centrum (hier a) geht; demnach muss die gesuchte Ebene die Gerade a b enthalten, und jeder Punkt von a b kann als gegebener Punkt angesehen werden. Suchen wir daher den Punkt c, in welchem die Gerade a b die Ebene der Schneidlinie A (hier die Ebene A_2) trifft und legen von c aus ein Tangente (B) an A, so erhalten wir (ohne Construction

einer Hilfscurve) die Berührungslinie ad und die Tangentialebene adc.

Anm. Wäre die Gerade ab zufällig || Ebene A_2, also c ein unendlich ferner Punkt von 𝔈 (A_2), so wäre B_1 || $a_1 b_1$. — Ist b ein unendlich ferner Punkt (also statt b eine Gerade gegeben ist, mit der die Tangentialebene parallel sein soll) oder bleibt b, ist aber a in unendlicher Ferne (d. h. haben wir einen Cylinder statt eines Kegels) so haben wir eine ähnliche Auflösung; der Schüler wolle diese Beispiele machen. Ist aber a und b in unendlicher Ferne, so haben wir die Aufgabe der nächsten Nummer, deren Lösung wir geben wollen.

387. Aufg. Es sind gegeben ein Cylinder (AB) und eine Gerade C; man soll an ersteren eine Tangentialebene legen, die || C ist. Fig. 151.

Aufl. Da jede Tangentialebene unseres Cylinders || B sein muss, so ist die gesuchte Ebene || B und || C. Nehmen wir daher einen beliebigen Punkt a an und legen durch ihn eine Parallele zu B und eine Parallele zu C (in unserer Zeichnung haben wir den Punkt a so gewählt, dass von den vier Rissen dieser beiden Parallelen schon drei gezeichnet sind), also in unserer Zeichnung die Geraden B und D, so ist die Ebene BD also auch jede Gerade dieser Ebene parallel zur gesuchten Tangentialebene. Suchen wir nun, die gerade E nach welcher die Ebene BD die Ebene (A_2) der Schneidlinie schneidet, und legen dazu an A eine parallele Tangente F (es gäbe hier noch so eine Tangente) so ist F eine Gerade der gesuchten Ebene und G ihre Berührungslinie, also 𝔈 (FG) die verlangte Tangentialebene.

388. Ist der gegebene Cylinder auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so dass sein erster Riss eine Curve (A_1) ist, so ist, wie wir früher gesehen, jede Tangentialebene desselben eine erste Lothebene deren erster Riss A_1 berührt. Dadurch ist es leicht an einen solchen Cylinder eine Tangentialebene zu legen, die durch einen Punkt geht, oder parallel einer Geraden ist. Der Schüler wolle diese beiden Aufgaben zu lösen versuchen.

389. Aufg. An eine Böschungsfläche (A $\varkappa$) eine Tangentialebene zu legen, die parallel einer Geraden B ist. Fig. 152.

Aufl. Zeichnet man den Leitkegel dieser Fläche, d. h. einen Kegel (Ca), dessen Ezeugende mit der $\mathfrak{T}_1$ denselben Winkel bilden, wie die Böschungsfläche, und legt man || B an den Kegel (Ca) eine Tangentialebene, so ist sie parallel zur gesuchten Ebene. Legt man daher || B an den Kegel (Ca) eine Tangentialebene (DE), welche den Kegel nach E berührt, und zieht zur ersten Spur (D) dieser Ebene eine Parallele F_1 tangirend an A, so erhält man die erste Spur der gesuchten Ebene, während ihre Berührungslinie (G) || E ist.

Anm. Der Schüler wolle versuchen, an eine entwickelbare Schraubenfläche eine Tangentialebene zu legen.

Fig.153. 390. Aufg. An eine konische Drehfläche (A, a_1) eine Tangentialebene zu legen, die || B ist.

Aufl. Da unser Kegel als Drehfläche (durch seinen Halbmeridian A und seine Axe a_1) gegeben ist, so müssen wir, wenn wir seine Geraden als Erzeugende ansehen, eine Schneidlinie desselben, am Besten einen Parallelkreis, z. B. den Kreis C, suchen. Sollen wir nun nach Anleitung der vorletzten Nummer die Tangentialebene finden, so müssen wir die Spitze des Kegels haben; von dieser ist aber der zweite Riss nicht gezeichnet. Um nun dennoch zum Ziele zu kommen, denken wir uns die Ebene gefunden, und nebst dem Kegel so abwärts geschoben, dass alle Punkte der Ebene und des Kegels erste Lothe beschreiben (also die ersten Risse der Punkte bleiben, und alle Geraden sich parallel verschieben). Dann wird der erste Riss der Berührungslinie der Ebene nach und vor der Verschiebung derselbe sein. Verschieben wir nun den Kegel (A, a_1) bis seine Spitze in a liegt, und demnach sein Halbmeridian nach D (|| A) kommt, so dürfen wir nur an den Kegel (D, a_1) die Tangentialebene legen. Zu dem Ende suchen wir seine Schneidlinie E, legen durch a eine Gerade F parallel zu B und finden dann G_1 als ersten Riss der Berührungslinie G [es giebt hier noch eine solche Linie des Kegels (D, a_1) also auch des Kegels (A, a_1)]. Wollten wir den zweiten Riss von G, so dürften wir nur die bekannte Aufgabe lösen: eine Linie einer Fläche zu finden, von der ein Riss gegeben ist.

Anm. Ehe wir die entwickelbaren Flächen verlassen, wollen wir noch bemerken, dass, wenn wir statt einer Tangentialebene

eine Tangente einer solchen Fläche durch einen (in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden) Punkt legen sollen, wir finden werden, dass es unendlich viele solche Tangenten gibt, die alle zusammen, die an die Fläche von dem Punkte aus möglichen Tangentialebenen geben; die Berührungspunkte der Tangenten liegen auf den Berührungslinien der Ebenen. Die Aufgaben über Tangenten führen also wieder auf die über Tangentialebenen. — Dagegen könnte eine Tangente gesucht werden, die noch weitere Bedingungen zu erfüllen hätte, z. B.

1) eine Tangente eines Kegels durch einen Punkt und parallel einer Ebene;

2) eine Tangente an zwei Kegel durch einen Punkt.

Wir wollen die Lösungen dieser Aufgaben dem Schüler überlassen.

391. Aufg. An eine Drehfläche (A, a_1) eine Tangentialebene zu legen, die durch einen Punkt b geht. Fig. 154.

Aufl. Nehmen wir hier wieder, wie früher (s. 306) einen Kegel zu Hilfe, der die Drehfläche nach einem Parallelkreis (B) berührt, und legen an den Kegel eine Tangentialebene, welche ihn nach einer Geraden berührt, so ist der Schnitt dieser Geraden mit B der Berührungspunkt der Ebene mit der Drehfläche. Wir können also den Parallelkreis beliebig wählen, und demnach unzählige Tangentialebene finden (die einen Kegel umfüllen) deren unzählige Berührungspunkte eine Curve geben, von der wir so viele Punkte suchen, als wir zur richtigen Zeichnung derselben für nöthig erachten. Verbinden wir die Punkte der Curve mit b, so bekommen wir lauter Tangenten der Fläche, die einen berührenden (umhüllenden, umschriebenen) Kegel der Drehfläche bilden. Die gegebene Aufgabe kann daher auch so ausgesprochen werden: man soll von b aus an die Drehfläche eine Tangente, oder einen berührenden Kegel legen.

Soll nun die gesuchte Berührungscurve gefunden werden, so legen wir, wie in unserer Zeichnung (Fig. 154) die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 (so dass b in der $\mathfrak{T}_1$) und nehmen einen Drehungskegel (B, a_1) an, der die Fläche (A, a_1) nach dem Parallelkreis C berührt. Um nun von b aus an diesen Kegel eine Tangentialebene zu legen, suchen wir seine erste Spur, nemlich den Kreis D

(in dessen Ebene also der Punkt b liegt) und ziehen von b aus an D Tangenten, die D in den Punkten c, d berühren (um diese Punkte genau zu finden dient der Hilfskreis M_1) und erhalten die ersten Risse a_1c_1 und a_1d_1 der Berührungslinien; wo diese vom ersten Riss des Parallelkreises C geschnitten werden, sind die ersten Risse zweier gesuchten Punkte (1, 2), deren zweite Risse auf C_2 liegen.

Um diese Punkte richtig zu finden muss man bemerken, dass die Gerade a_1c_1 den ersten Riss des Parallkreises C_1 in zwei Punkten schneidet, von denen nur eine richtig ist, — welcher? das lehrt folgende Betrachtung. Der Kegel (B, a_1) wird von seinem Centrum a in zwei Mäntel getheilt, von denen einer (hier der untere) die Spur des Kegels enthält; diesen wollen wir den positiven, den anderen den negativen Mantel nennen. Ebenso wird jede gerade Erzeugende des Kegels von a getheilt in zwei Theile deren einer (auf den + Mantel liegend) die + Erzeugende heissen soll. Es gehört also a_1c_1 dem ersten Riss der + Erzeugenden, $a_1 1$ dem der negativen Erzeugenden an. Liegt nun, wie hier, der Parallelkreis C_1, also auch die Berührungspunkte 1, 2 auf dem negativen Mantel, so schneiden wir mit dem ersten Riss des Parallelkreises negativ ab, d. h. wir sehen, wo die ersten Risse der negativen Erzeugenden geschnitten werden. Nachdem wir nun gezeigt haben, wie man für irgend einen Parallelkreis die auf ihm liegenden Punkte findet, wollen wir noch zeigen, wie man diejenigen Punkte findet, welche vor den übrigen etwas voraus haben, und die wir die Hauptpunkte nennen wollen.

Zunächst sieht man, dass wir auf einem Parallelkreis C so viele Punkte erhalten, als die Spur D des Kegels mit dem Konstruktionskreis Schnittpunkte enthält (hier c_1, d_1); also gar keine Punkte, wenn der Halbmesser von D_1 grösser als $\overline{a_1b_1}$ ist. Demnach erhalten wir einen Punkt, wenn der Halmesser von $D_1 = \overline{a_1}b_1$. Suchen wir den Kegel (E, a_1), dessen Spur einen Halbmesser $= \overline{a_1b_1}$ hat, so erhalten wir den Punkt 3 (es gibt noch einen zweiten solchen Kegel, der den Punkt 4 liefert). Die Punkte 3, 4 nennen wir ähnlich wie früher Grenzpunkte. Weitere Hauptpunkte sind die Profilpunkte. Suchen wir den Punkt auf einem Profil, z. B. auf dem zweiten, also auf dem

Hauptmeridian A, dessen zweiten Riss (A_2) der zweite Umriss ist, so benützen wir dazu den Lothcylinder A_2. Wir legen nemlich durch den Punkt a an diesen Cylinder eine Tangentialebene (F_2), wodurch wir den Punkt 5 erhalten. In ähnlicher Art erhalten wir die Punkte auf dem ersten Profil mit Hilfe von Tangenten die wir von b_1 aus an den ersten Umriss legen. Noch einen besonderen Punkt können wir erhalten, wenn wir denjenigen Kegel annehmen, dessen Spitze in dem Punkt e der $\mathfrak{T}_1$ liegt; wir wollen die Aufsuchung dieser Punkte dem Schüler überlassen.

Anm. Verbinden wir die gefundenen Punkte aus freier Hand durch eine Curve, so können wir beachten, dass in den Grenzpunkten diese Curve von den entsprechenden Parallelkreisen berührt wird; dass ferner der erste (zweite) Riss der Curve vom ersten (zweiten) Umriss berührt wird; endlich dass der erste Riss der ober dem Aequator liegenden Curve zusammenhängend gezogen, der unter demselben in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ unsichtbar ist. — Wollte man für einen Punkt der Berührungscurve eine Tangente konstruiren, so musste man dazu den Dupin'schen Satz (383) von den konjugirten Tangenten benützen, indem man sich vorher, nach Anleitung der Nr. 382, die beiden Axen der Indikatrix verschaffte, und dann hieraus mittelst des Dupin'schen Satzes die verlangte Tangente.

392. Hat man an eine Drehfläche zweiter Ordnung durch einen Punkt a einen berührenden Kegel zu legen, so macht man von dem Umstande Gebrauch, dass hier die Berührungscurve ein Kegelschnitt (also eine ebene Curve) ist. Man wählt dann die Tafeln am Besten so, dass wieder die Axe der Drehfläche senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ ist, dass aber zugleich die die Axe und den Punkt a enthaltende Ebene parallel zur $\mathfrak{T}_2$ liegt, und daher die gesuchte Berührungscurve in einer zur $\mathfrak{T}_2$ senkrechten Ebene sich befindet (d. h. deren zweiter Riss eine Gerade ist). Zieht man daher von a_2 aus an den zweiten Umriss Tangenten und verbindet ihre Berührungspunkte durch eine Gerade, so erhält man den zweiten Riss der verlangten Curve. Wie man den ersten Riss findet, und überhaupt die Zeichnung ausführt, wollen wir dem Schüler überlassen. In ähnlicher Art verfahren wir, wenn der Punkt a in unendlicher Ferne liegt. Von diesen

Aufgaben wollen wir aber in den folgenden Nummern ein Beispiel ausführen.

Fig. 155. 393. Aufg. An ein Drehungsellipsoid (A, a_1) einen berührenden Cylinder parallel zur Geraden B zu legen.

Aufl. Wäre die Gerade B | $\mathfrak{T}_2$, so wäre der Riss zwei unserer Berührungscurve eine Gerade; da dies nun hier nicht der Fall ist, so nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ an, die || B ist, und lösen die Aufgabe mittelst des Tafelsystems (1, 3). Wir wählen hier die $\mathfrak{T}_3$ am Bequemsten so, dass sie noch die Axe (a_1) enthält (so dass $\mathfrak{K}'_1$ durch a_1 geht und || B_1 ist) und klappen sie, wie früher bei ähnlichen Fällen, so um, dass der in der $\mathfrak{T}_3$ liegende Hauptmeridian (C) auf A_2 fällt (also $\mathfrak{K}'_3$ auf $\mathfrak{K}_2$ und der dritte Riss der Axe auf den zweiten kommt); dann findet man b_3 und B_3 wie aus der Zeichnung (Fig. 155) ersichtlich. Zieht man nun || B_3 Tangenten an C_3, welche dieses in c_3, d_3 berühren, so ist c_3d_3 der dritte Riss (D_3) unserer (elliptischen) Berührungscurve D. Wie man nun c_1 und d_1 aus c_3 und d_3 findet, ist bekannt und aus der Figur ersichtlich, ebenso wie e_1 und f_1 aus e_3 (mit welchem f_3 zusammenfällt). Hiemit sind aber die Scheitel der Ellipse D_1 und somit diese selbst bestimmt; sucht man noch auf bekannte Art die zweiten Risse der Punkte c, d, e, f, so erhält man dadurch zwei konjugirte Durchmesser von D_2 und kann diese Ellipse mit Hilfe der Nummer 210 (Fig. 93) konstruiren.

Fig. 156. 394. Aufg. An eine beliebige Drehfläche (A, a_1) einen berührenden Cylinder || B' zu legen.

Aufl. Um einen beliebigen Punkt der Berührungscurve zu finden, nimmt man wieder (wie 391) auf der Fläche einen Parallelkreis an, und einen Kegel der nach diesem Kreise berührt, legt die Tangentialebene (|| B) an den Kegel und sucht, wo ihre Berührungslinie den Parallelkreis schneidet; nur ist hier zu berücksichtigen, dass man (nach 300) den Kegel verschiebt, bis seine Spitze in einem Punkte a der Axe erscheint. Wir werden daher diesen Punkt a für alle Kegel gelten lassen, und nicht vergessen, dass wir zur Aufsuchung der Berührungserzeugenden (von denen wir nur die ersten Risse brauchen) der Tangentialebene und des Kegels den verschobenen Kegel (dessen Spitze in a) berücksichtigen, während der ursprüngliche

Kegel (dessen Meridian zu dem des ersteren parallel ist) die Drehfläche berührt. Bezüglich des positiven oder negativen Abschneidens (s. 391) werden wir daher zu berücksichtigen haben, ob nach der Verschiebung des Kegels der daraufliegende Parallelkreis auf dem + oder — Mantel des verschobenen Kegels liegt.

Hat noch, wie in unserem Beispiele, die Fläche einen Mittelpunkt, so können wir stets zwei (zum Aequator symmetrisch liegende) Parallelkreise zusammen behandeln, und es wird sich herausstellen, dass sich dieselben nur dadurch unterscheiden, dass man für den einen positiv, für den anderen negativ abschneidet.

Nimmt man den Parallelkreis C an und sucht (ganz nach 390) die Berührungslinien D, E (die zweiten Risse derselben sind nicht gezeichnet), so hat man nur noch mit dem Halbmesser von C aus a_1 darauf abzuschneiden (und zwar hier für C positiv, für den unterhalb des Aequators dem C gleichen Kreis negativ) die Punkte 1, 2, deren zweite Risse auf C_2 liegen. Nimmt man den Spur-Halbmesser des verschobenen Kegels $= a_1 b_1$ und sucht daraus den entsprechenden Parallelkreis, so erhält man die Grenzpunkte 3, 4, während man die Punkte 5, 6 durch Tangenten an $A_2 \parallel B_2$, die 7, 8 durch Tangenten an den ersten Riss des Aequators $\parallel B_1$ erhält.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass der erste Riss der gesuchten Curve in Bezug auf B_1 symmetrisch ist und daher von dem dem 5 entsprechenden Punkt 9 durch Symmetrie leicht der erste Riss gefunden werden kann, während der zweite Riss von 9 auf dem zweiten Riss des durch 5 gehenden Parallelkreises sich befindet.

395. Mit Hilfe der Aufgabe, an eine Drehfläche einen berührenden Cylinder zu legen, kann man auch die Aufgabe lösen, den ersten Umriss oder das erste Profil einer gegebenen Drehfläche zu konstruiren; denn um dieses zu erhalten, müssen wir alle möglichen tangirenden Lothe, also einen berührenden Cylinder, parallel zu einem ersten Lothe an die Fläche legen. Die Berührungscurve dieses Cylinders ist das Profil und sein Riss der Umriss der Fläche. Hieraus geht zugleich hervor,

dass das Profil und der Umriss einer Fläche zweiter Ordnung ein Kegelschnitt ist.

Ist nun eine Drehfläche beliebig im Raume gegeben durch ihre Axe A, durch die wahre Gestalt ihres Meridians, und durch den (auf A liegenden) Mittelpunkt eines bestimmten Parallelkreises, und man soll den ersten Umriss der Fläche finden, so hat man, um die Aufgabe nach Anleitung der beiden vorigen Nummern zu lösen, ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) so zu wählen, dass $\mathfrak{T}_4 \perp$ A, und, der Bequemlichkeit wegen, $\mathfrak{T}_3 \mid$ A, und dann den dritten und vierten Riss eines Lothes eins, den vierten Riss der Axe A und den dritten und vierten Riss des Hauptmeridians (in Bezug $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) zu zeichnen, und nun in diesem Tafelsystem die verlangte Berührungscurve (also deren dritten und vierten Riss) zu zeichnen. Sucht man nun daraus den ersten Riss der Curve, so hat man den verlangten ersten Umriss. Wir rathen dem Schüler eine Aufgabe der Art zu versuchen, und wollen zu seiner Anleitung in der nächsten Nummer diese Aufgabe für ein Ellipsoid lösen. Hier sei nur noch bemerkt, dass man mitunter durch besondere Umstände dahin geführt wird, den ersten Umriss einer Drehfläche auf eine einfachere Art zu finden.

Ist nemlich der erste Umriss eines Wulstes, dessen Axe A und dessen Mittelpunkt (in A) a sei, zu suchen, von welchem der Halbmesser α der Mittellinie (der Wulst ist ja eine Röhrenfläche) und β des Halbmeridians gegeben sind, so wird man leicht einsehen, dass der erste Riss der Mittellinie eine Ellipse ist, und demnach der erste Umriss eine Parallele zu der Ellipse in der Entfernung β.

Fig. 157. 396. Aufg. Es sei (Fig. 157) A die Axe, a der Mittelpunkt eines Drehungs-Ellipsoids, von dem noch ausserdem die Gestalt seines Meridians (B_3) gegeben ist; man sucht seinen ersten Umriss.

Aufl. Nimmt man die Ebene (A_1) als $\mathfrak{T}_3$ (also A_1 als $\mathfrak{K}'$) an und klappt sie um $\mathfrak{K}'$ um, so erhält man a_3, A_3 als dritte Risse von a, A. Zeichnet man den Meridian B_3, so ist dieser in Bezug $\mathfrak{T}_3$ Hauptmeridian. Legt man mittelst Tafelsystem ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) an das Ellipsoid einen berührenden Cylinder $\parallel \mathfrak{G}$ (a_1), so berührt er nach einer Ellipse, deren dritter Riss eine Gerade (D_3) ist, die durch a_3 geht; einen Punkt (c_3) dieser Geraden finden

wir durch eine an B_3 gelegte Tangente die $\parallel C_3$ (dies ist der dritte Riss eines ersten Lothes). Sucht man nun von der Berührungsellipse D den ersten Riss (D_1), so ist dieser der gesuchte Umriss.

Anm. Wäre statt des Ellipsoids eine beliebige Drehfläche gegeben, so würden wir wieder in der $\mathfrak{T}_3$ den (als bekannt vorausgesetzten) Meridian zeichnen und noch eine $\mathfrak{T}_4$ annehmen, die $\perp \mathfrak{T}_3$ und $\perp$ A ist, so dass $\mathfrak{K}''$ (Schnitt von $\mathfrak{T}_4$ und $\mathfrak{T}_3$) $\perp A_3$ und a_4 enthält. Die Gerade a_1, mit welcher der berührende Cylinder parallel laufen soll (ein erstes Loth), und C_3 zum dritten Riss hat, liegt in der $\mathfrak{T}_3$, und ihr vierter Riss (C_4) liegt daher in $\mathfrak{K}''$. Man kann nun mit Hilfe des Tafelsystems ($\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) ganz so wie oben (394) die gesuchte Berührungscurve (d. i. ihren dritten und vierten Riss) finden, und hat dann nur noch die bekannte Aufgabe zu lösen, aus dem dritten und vierten Riss eines Punktes den ersten zu finden (und zu dem Ende nur die erste Ordinate des Punktes gleich der in der vierten Tafel zu machen).

Hätte man aber einen Wulst zu behandeln, so würde man zunächst denselben Gang einschlagen und den dritten Riss (E_3) der Mittellinie zeichnen, woraus sich leicht deren erster Riss (welcher eine Ellipse ist) konstruiren liesse. Man dürfte dann schliesslich noch zu dieser Ellipse eine Parallele konstruiren in der Entfernung des Halbmessers des Halbmeridians.

397. Aufg. An eine Drehfläche (A, a_1) eine Tangentialebene zu legen, die parallel einer gegebenen Ebene (bcd).

Aufl. Will man hier wieder einen Kegel zu Hilfe nehmen, der die Drehfläche nach einem Parallelkreise B berührt, so lässt sich an diesen nur dann eine Tangentialebene $\parallel$ (bcd) legen, wenn die Winkel der Erzeugenden des Kegels mit der $\mathfrak{T}_1$ gleich sind dem Winkel, den die Ebene (bcd) mit $\mathfrak{T}_1$ bildet. Suchen wir daher (auf die bekannte Art) den Winkel (α) der Ebene (bcd) mit der $\mathfrak{T}_1$ und zeichnen einen die Drehfläche (A, a_1) berührenden Drehungskegel, dessen Halbmeridian mit $\mathfrak{K}$ den Winkel α bildet, und legen an diesen Kegel eine Tangentialebene $\parallel$ Ebene (bcd), so ist das die Tangentialebene, welche den Kegel nach einer Geraden C berührt, die B nach dem gesuchten Berührungspunkte schneidet.

Fig. 158. 398. Aufg. An eine Drehfläche (A, a_1) eine Tangentialebene zu legen, die eine gegebene Gerade B enthält.

Aufl. Die gesuchte Ebene muss || B sein, und einen Punkt von B enthalten. Wir könnten also zuerst || B eine Tangentialebene, also einen berührenden Cylinder an die Fläche legen und an diesen Cylinder eine Tangentialebene durch B. Diese Auflösung ist besonders geeignet, wenn die Drehfläche zweiter Ordnung ist (wobei wir die $\mathfrak{T}_2$ parallel B annehmen). Wir können in diesem Falle die Lösung zu Stande bringen, ohne eine Hilfscurve konstruiren zu müssen (der Schüler wolle es an einem Ellipsoid probiren). — Wir können auch von zwei beliebigen Punkten aus (von denen einer auch in unendlicher Ferne liegen kann) berührende Kegel (nach 391) an die Fläche legen, und den Schnitt der Berührungscurven suchen. Endlich gibt es noch einen Weg, zu welchem wir durch folgende Betrachtung geführt werden. Denkt man sich die Tangentialebene gefunden, und dreht sie gemeinschaftlich mit B um die Axe (a_1), so beschreibt B ein einfaches Drehungshyperboloid (dessen Hauptmeridian C eine Hyperbel ist, welche a zum Mittelpunkt, B_2 zur Asymptote und die Entfernung von a_1 bis B_1 zur reelen Halbaxe hat), das während der Drehung von der Tangentialebene, weil sie eine Erzeugende dieser windwiefen Fläche enthält, stets berührt wird. Demnach berührt diese Ebene während der Drehung die beiden Drehflächen (A, a_1) und (C, a_1) und beschreibt einen Kegel, der beide Drehflächen berührt, und dessen Halbmeridian die Gerade D ist, welche A und C gemeinschaftlich berührt. Legt man an diesen Kegel eine durch B gehende Tangentialebene, so ist ihr Berührungspunkt (e oder f) mit der Drehfläche der verlangte.

399. Soll man an eine windschiefe Fläche eine Tangentialebene legen, so benützt man zu deren Aufsuchung die Eigenschaft der windschiefen Fläche, dass sie von einer Ebene berührt wird, sobald sie eine gerade Erzeugende mit ihr gemein hat (s. 280). Wir legen also durch eine Erzeugende A eine Ebene ($\mathfrak{E}$), die den gegebenen Bedingungen für die Tangentialebene entspricht, so haben wir eine Tangentialebene. Um aber den Berührungspunkt einer solchen Tangentialebene zu finden, suchen wir, wenn die gegebenen Schneidlinien Gerade sind, wo zwei

beliebige Erzeugende der Fläche die Ebene schneiden, und verbinden die beiden Schnittpunkte, so erhalten wir die Schneidlinie (s. 280), deren Schnitt mit der Erzeugenden der verlangte Berührungspunkt ist. Sind aber die gegebenen Schneidlinien (A, B, C) krumm, so legen wir (s. 304) in den Punkten, wo die Schneidlinien von der angenommenen Erzeugenden M geschnitten werden, Tangenten (D, E, F) an diese Schneidlinien, und lösen die Aufgabe in Bezug auf die windschiefe Fläche D, E, F indem wir wieder die Punkte a, b suchen, in denen zwei Erzeugende dieser Fläche, die Tangentialebene treffen; wo dann die Gerade ab die M schneidet, ist der Berührungspunkt. Unterscheiden wir nun folgende Fälle.

1) Soll die gesuchte Tangentialebene durch einen Punkt a gehen, und nehmen wir eine Erzeugende A an, so ist Ebene (Aa) eine Tangentialebene, deren Berührungspunkt in der eben beschriebenen Art gefunden wird. Wiederholen wir das Verfahren und verbinden die gefundenen Berührungspunkte durch eine Curve, so haben wir die gesuchte Berührungscurve. — Ist die Fläche zweiter Ordnung (also die Berührungscurve eben), so suchen wir drei Punkte b, c, d der Curve, und diese ist dann der Schnitt der Ebene bcd mit der Fläche.

2) Soll die Tangentialebene parallel einer Geraden B sein, so verfahren wir in ähnlicher Art.

3) Soll die Ebene parallel einer Ebene (𝔈) sein, so müssen wir nur diejenige Erzeugende A annehmen, die parallel der 𝔈 ist, und die wir dadurch finden, dass wir durch die Spitze des Leitkegels (oder bei einem Planoid durch einen beliebigen Punkt) eine Ebene ∥ 𝔈 legen und ihren Schnitt mit dem Leitkegel (oder der Leitebene) suchen.

4) Soll die Ebene durch eine Gerade B gehen, so muss die Erzeugende A die B schneiden in einem Punkt a, der ein Punkt der Fläche ist. Man findet also A, wenn man den Schnitt (a) von B mit der windschiefen Fläche sucht, und durch a eine Erzeugende legt; Ebene (AB) ist dann die gesuchte.

400. Für eine Gesimsfläche verfahren wir ähnlich wie für Drehflächen; wir benützen nemlich zur Aufsuchung der Tangentialebenen (statt der für die Drehflächen benützten Kegel) Böschungsflächen (s. 312), die nach Parallelen berühren. Wir

legen dann die Tangentialebene an die Böschungsfläche, die sie nach einer Geraden berührt, und der Schnitt dieser Geraden mit der Parallelen ist der gesuchte Berührungspunkt. Hiebei kann man zuweilen von dem Umstande Gebrauch machen, dass der Leitkegel der Böschungsfläche (d. h. der Kegel, dessen Geraden mit denen der Böschungsfläche parallel laufen) eine Drehungsfläche ist. Wir wollen darüber ein Beispiel geben.

Fig. 159. Aufg. Eine Tangentialebene einer Gesimsfläche (A, B) zu finden, die parallel einer Geraden C ist.

Aufl. Man nimmt (Fig. 159) auf der Fläche eine (durch a gehende) Parallele D an und eine Böschungsfläche, welche die Fläche (A, B) nach D berührt (von der also die in a an den Meridian A gelegte Tangente E eine Erzeugende ist.) Um aber an diese Böschungsfläche eine Tangentialebene || C zu legen, zeichnen wir deren Leitkegel, dessen Centrum ein beliebiger Punkt b (den wir am Besten auf C annehmen), und dessen Halbmeridian || E ist. Dieser Kegel vertritt die Stelle des verschobenen Kegels (394) bei den Drehflächen. Legt man durch C (da b in C angenommen ist) eine Tangentialebene an den Kegel, so bekommen wir hier zwei solche, deren Spuren F und G sind, deren Berührungslinien H_1, J_1 zu ersten Rissen haben. Ziehen wir nun an D oder an die damit Parallele B eine Tangente || F, welche B in c berührt, so erhalten wir dadurch den ersten Riss (K_1) der Berührungslinie, und der Punkt d_1, wo D_1 und K_1 sich schneiden (um d_1 zu finden, macht man $\overline{c_1 d_1} = \overline{a_1 e_1}$, man braucht also D_1 gar nicht zu zeichnen, also keine Hilfscurve zu konstruiren) ist der erste Riss des Berührungspunktes. Hiebei ist zu bemerken, dass es hier, entsprechend F, zwei Tangenten gibt (bei anderer Gestaltung der Curve B kann es auch mehrere Tangenten geben), nemlich noch eine, die B in f berührt.

Allein man wird leicht durch Anschauung erkennen, dass die Tangentialebene in f, da hier die Parallele D oberhalb des Aequators $\mathfrak{E}$ der Gesimsfläche liegt, mit der (F, H) des Kegels gleiche Neigung zur $\mathfrak{T}_1$ hat, aber nicht parallel damit ist. Nimmt man aber statt D die durch den Punkt g (des Meridians A) gehende Parallele, so werden wir alle Konstruktion

für D benützen können, nur wird hier der Punkt f gelten und der Punkt c nicht.

So wie bei der Drehfläche (394) können wir auch alle Hauptpunkte finden, wenn wir nur wieder die Böschungsfläche statt des Kegels und den Leitkegel statt des verschobenen Kegels setzen.

Anm. Alles was wir eben über die Gesimsfläche gesagt haben, gilt auch für Röhrenflächen mit ebenen Mittellinien, welche offenbar Gesimsflächen mit kreisförmigem Meridian vorstellen. Von den Röhrenflächen mit unebenen Mittellinien ist nur eine wichtig, nemlich die Serpentine; diese ist aber zugleich eine Schraubenfläche und kann in Verbindung mit dieser behandelt werden.

401. Hat man an eine Schraubenfläche eine Tangentialebene zu legen, so kann man auf ihr eine Schraubenlinie annehmen, und die Fläche suchen, die von allen Tangentialebenen der Schraubenfläche, die ihre Berührungspunkte in der Schraubenlinie haben, gebildet wird. Diese Fläche ist aber eine entwickelbare Schraubenfläche (und vertritt die Stelle der Böschungsfläche bei der Gesimsfläche) und ihr Leitkegel ist wie bei der Böschungsfläche ein Drehungskegel. Wir werden also auf ein ähnliches Verfahren kommen, wie in der vorigen Nummer. Machen wir darüber ein Beispiel.

Aufg. Es ist gegeben eine scharfe, rechte Schraubenfläche durch eine gerade Erzeugende A (Fig. 162), ihre Axe (a_1) und die Ganghöhe h, (von welcher der vierte Theil $= \overline{b_2 c_2}$ sein soll); man soll an diese Fläche eine Tangentialebene legen, die || B ist. Fig. 162.

Aufl. Man nimmt auf A einen Punkt b an, legt dadurch eine Schraubenlinie C, (von welcher blos der erste Riss gezeichnet zu werden braucht) und legt an die Fläche eine Tangentialebene in b. Eine Linie dieser Ebene ist A, eine zweite Gerade derselben ist die Gerade bc, welche die Schraubenlinie C in b berührt (vorausgesetzt nemlich, dass, weil $\overline{b_2 c_2} = \frac{h}{4}$, $\overline{b_1 c_1} =$ dem vierten Theil des Umfangs von C ist). Sucht man nun die erste Spur (D) der Tangentialebene, und betrachtet a als Spitze des oben genannten Leitkegels, so ist die die Spur D berührende Kreislinie E die erste Spur dieses Kegels. Dabei bemerkt man,

dass diese Ebene den Leitkegel nach ae berührt, und dass demnach dem e_1 ein auf C_1 liegendes b_1 (erster Riss des Berührungspunktes der Tangentialebene mit unserer Schraubenfläche) so entspricht, dass, von a_1 gegen e_1 gesehen, b_1 links liegt, und von e_1 um $\overline{b_1 e_1}$ entfernt ist. — Legt man nun auf die bekannte Art an den Kegel (Ea) eine Tangentialebene $\parallel$ B, so berührt sie nach einer Erzeugenden af und ist demnach g_1 der erste Riss des gesuchten Berührungspunktes (es gibt hier noch einen solchen). In derselben Art kann man für jede andere Schraubenlinie die entsprechenden Berührungspunkte finden.

Anm. Wäre die Erzeugende A krumm, so müsste man in b eine Tangente an sie legen, diese an die Stelle von A setzen, und ausserdem ganz wie oben verfahren.

402. Aufg. An eine Serpentine, deren Mittellinie die Schraubenlinie A, und deren Kreise die Halbmesser α haben, eine Tangentialebene zu legen, die parallel einer Geraden B ist.

Aufl. Wir nehmen auf der Fläche einen beliebigen erzeugenden Kreis C an und suchen diejenige Tangentialebene $\parallel$ B, deren Berührungspunkt auf C liegt. Zu dem Ende nehmen wir auf der Schraubenlinie A (deren Axe wir auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht voraussetzen) einen Punkt b an, konstruiren die Tangente (D) von A in b und legen durch b eine zu D senkrechte Ebene ($\mathfrak{E}$), so liegt in $\mathfrak{E}$ der Kreis C. Denken wir uns nun einen Cylinder (C, D) und legen an diesen eine Tangentialebene $\parallel$ B, so sind die Punkte, in denen die Berührungslinien dieser Tangentialebene und des Cylinders die C schneiden, die verlangten Punkte. Um nun die Zeichnung auszuführen (wir wollen das dem Schüler überlassen), betrachten wir die Ebene $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{T}_3$ und suchen nach deren Umklappung b_3, C_3 und B_3, legen Tangenten $\parallel$ B_3 an C_3, deren Berührungspunkte (c_3, d_3) die dritten Risse (aus denen man die ersten und zweiten Risse finden kann) der gesuchten Berührungspunkte sind.

Fig. 160. 403. Aufg. An eine Ovalfläche zweiter Ordnung einen berührenden Cylinder parallel einer Geraden zu legen.

Aufl. Es sei (Fig. 160) die gegebene Fläche ein Ellipsoid, von dem A und B zwei Hauptschnitte sind, und C die gegebene Gerade, so ist die gesuchte Berührungscurve (D) eine Ellipse, deren Risse ebenfalls Ellipsen sind. Suchen wir nun diejenigen

Punkte (b, c) von D, welche auf (dem ersten Profil) A liegen, so erhalten wir die ersten Risse derselben bekanntlich, wenn wir an A_1 Tangenten || C_1 legen; in ähnlicher Art bekommen wir die Punkte (d, e) auf B. Wir haben daher von dem ersten Riss der Berührungslinie D vier Punkte (b_1, c_1, d_1, e_1); dabei ist $b_1 c_1$ ein Durchmesser, dessen konjugirter die Richtung C_1 hat. Wir können daher (nach 209) die Länge dieses konjugirten Durchmessers und daraus (nach 210) die Axen der Ellipse finden. In ähnlicher Art finden wir die Axen des zweiten Risses von D.

404. Aufg. Es sei wieder ein dreiaxiges Ellipsoid, in der Art, wie in voriger Nummer, und eine Gerade C gegeben; man soll an die Fläche eine Tangentialebene legen, die $\perp$ C ist.

Aufl. Sucht man die Spuren (D, E) einer auf C senkrechten Ebene (DE), so hat man die Tangentialebene parallel Ebene (DE) zu legen. Sucht man nun einen berührenden Cylinder || D (erste Spur), welcher die Fläche nach einer Ellipse F berührt, dann einen solchen Cylinder || E, der die Fläche nach einer Ellipse G tangirt, so sind die Schnittpunkte (b_1 und c) von F und G die gesuchten Berührungspunkte. Da aber D in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist F_1 eine Gerade, die ein Durchmesser von A ist, und von welchem wir die Endpunkte durch Tangenten an A_1 || D_1 finden. Ebenso finden wir den Durchmesser von B_2, welcher den zweiten Riss von G vorstellt. Suchen wir nun den ersten Riss (G_1) von G, der eine Ellipse ist, deren Axen wir leicht finden können, so sind die Schnittpunkte von F_1 und G_1 die ersten Risse der gesuchten Berührungspunkte. Diese Schnittpunkte können wir aber (nach 209) finden, ohne die Ellipse G_1 zu zeichnen.

§. 24.

Gewundene Curven und ihre Berührungen.

405. Legt man an eine gewundene Curve A alle möglichen Tangenten, so bilden diese, wie wir schon wissen (s. 265), eine entwickelbare Fläche ($\mathfrak{A}$). Legt man durch einen beliebigen Punkt a zu allen den Tangenten Parallele, so erhalten wir den Leitkegel ($\mathfrak{B}$) der entwickelbaren Fläche. Ist daher

eine Tangente einer 𝔈 (A) verlangt, die eine gegebene Gerade B schneidet, so sucht man den Schnittpunkt (b) von B mit der Fläche 𝔄, und ist b ein Punkt der gesuchten Tangente. Soll die Tangente an A parallel einer Ebene (𝔈) sein, so legt man durch die Spitze a des Leitkegels (𝔅) eine Ebene (𝔇) parallel zu 𝔈, so schneidet sie den Kegel nach Geraden, die zu den gesuchten Tangenten parallel sind. Ist noch die 𝔈 (A) eine Schraubenlinie, so nimmt man die eine Tafel, z. B. $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Axe von A an, und ist dann der Leitkegel ein Drehungskegel, dessen Axe $\perp \mathfrak{T}_1$ ist.

406. Soll an eine Curve M eine Normalebene unter gegebenen Bedingungen gelegt werden, so hat man nur mit denselben Bedingungen an die Evolutenfläche (s. 359) eine Tangentialebene zu legen. Der Schüler wolle folgende Aufgabe versuchen.

Zu einer gegebenen Schraubenlinie (A) eine Normalebene zu errichten, die parallel einer gegebenen Geraden B ist.

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird man die Tafeln so wählen, daß $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Axe der Schraubenlinie A steht, und von dieser nur A_1 zeichnen, dann mittelst einer beliebigen (am Besten zur $\mathfrak{T}_2$ senkrechten) Normalebene von A den Leitkegel und eine Tangentialebene desselben $\parallel$ B suchen. Es wird dann nicht schwer sein, wenn man diese Ebene gefunden hat, mit Hilfe derselben den Fußpunkt der gesuchten Ebene auf A anzugeben.

407. Will man an eine Curve A eine Tangentialebene legen, die bestimmte Bedingungen erfüllt (z. B. eine Gerade enthält oder parallel zu einer Ebenen A) so denkt man sich die Ebene und ihren Berührungspunkt a gefunden, und fragt nach der Tangente in a; man wird dann leicht die Bedingungen, die diese zu erfüllen hat, aus den gegebenen ableiten können, und nach 405 verfahren. Soll z. B. die Tangentialebene an A eine Gerade B enthalten, so muss die in ihr liegende Tangente (C) die B schneiden. Demnach findet man den Berührungspunkt a der Tangentialebene, wenn man (nach Anleitung von 405) eine Tangente (C) an A legt, die B schneidet; die Ebene BC ist dann die gesuchte Tangentialebene. In ähnlicher Art verfahren wir, wenn die Tangentialebene parallel eine Ebene sein soll.

Anm. Steht die Gerade B senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, hat man also die Gerade b_1, so darf man nur von b_1 an A_1 eine Tangente legen, deren Berührungspunkt (a_1) der erste Riss des gesuchten Punktes (a) ist. — Steht die Gerade aber nicht senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$, so kann man die Aufgabe auch dadurch lösen, dass man B als Stral ansieht (so dass sein Stralenriss ein Punkt b′ ist) und den Stralenriss (A′) von A sucht. Zieht man von b′ an A′ eine Tangente, so erhält man als Berührungspunkt (a′) den Stralenriss von a, aus welchem sich a finden lässt.

408. Zum Schlusse dieses § wollen wir noch bemerken, dass alle Hauptnormalen, sowie alle Binormalen (s. 169) einer gewundenen Curve eine windschiefe Fläche geben, welche für die Schraubenlinie eine Schraubenfläche wird. Dass alle Krümmungsebenen einer Curve A die entwickelbare Fläche A umhüllen, geht aus früheren Sätzen (s. 277) hervor. Hier sei aber noch erwähnt, dass, wenn man in allen Punkten einer Curve A Ebenen errichtet, von denen jede die Tangente und die Binormale des betreffenden Punktes enthält, diese Ebenen eine entwickelbare Fläche umhüllen, für welche die Curve A geodätisch ist, durch deren Abwickelung daher A in eine Gerade übergeht (rektifizirt wird). Man nennt daher diese entwickelbare Fläche die rektifizirende Fläche von A.

§. 25.

Tangentialebenen an zwei und drei Flächen.

409. Hat man an zwei entwickelbaren Flächen ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) eine gemeinschaftliche Tangentialebene ($\mathfrak{E}$) zu legen, so muss die erste Spur von $\mathfrak{E}$ die ersten Spuren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ berühren. Zugleich müssen aber die dabei sich ergebenden Berührungserzeugenden von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Tangentialebene liegen, also sich schneiden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Man sieht also:

> die Aufgabe, an zwei entwickelbaren Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen ist im Allgemeinen unmöglich.

Wohl aber kann es zufällig sein, dass von den verschiedenen gemeinschaftlichen Tangenten an die Spuren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

eine (oder mehrere) auf zwei Berührungserzeugende führt, die sich schneiden. Ferner kann es sein, dass bei besonderen gegenseitigen Lagen der 𝔄 und 𝔅 sich voraussehen lässt, dass sie gemeinschaftliche Tangentialebenen zulassen. Wann dies der Fall ist, soll in Folgendem untersucht werden.

410. Haben wir wieder zwei entwickelbare Flächen 𝔄 und 𝔅 und soll an diese eine gemeinschaftliche Tangentialebene gelegt wurden, so sind wir sicher, dass die entsprechenden Berührungserzeugenden sich schneiden, wenn alle Geraden der 𝔄 alle Geraden der 𝔅 (in endlicher oder unendlicher Ferne) schneiden. Dies ist aber der Fall für zwei Kegel mit gemeinschaftlchem Centrum und für zwei parallele Cylinder. An zwei solchen Flächen gibt es demnach so viele gemeinschaftliche Tangentialebenen, als man an ihre ersten Spuren gemeinsame Tangenten legen kann. Wie man solche Tangentialebenen findet, ist im Obigen so weit angegeben, dass es dem Schüler nicht schwer fallen wird, die Aufgabe vorkommenden Falles zu lösen. Wir machen nur darauf aufmerksam, dass wir für zwei Cylinder die eine Tafel senkrecht zu ihnen wählen werden. In Folgemdem wollen wir aber einen Fall behandeln, der eine eigenthümliche Lösung zulässt.

Fig. 161. 411. Aufg. An zwei Drehungskegel mit gemeinschaftlicher Spitze (a) eine gemeinsame Tangentialebene zu legen.

Aufl. Wir wählen die Tafeln so, dass die eine, hier die $\mathfrak{T}_1$, auf der Axe (a_1) des einen Kegels (A, a_1) senkrecht steht, die andere ($\mathfrak{T}_2$) so, dass auch die Axe (B) des zweiten Kegels (CB) mit ihr parallel ist. Denkt man sich die Tangentialebene gefunden, so berührt sie auch jede in einen der Kegel eingeschriebene Kugel. Geht, umgekehrt, eine Ebene durch a und berührt eine dem Kegel (A, a_1) eingeschriebene Kugel, so berührt sie auch den Kegel. Nimmt man daher zwei Kugeln (mit den Mittelpunkten b, c) an, die den gegebenen Kegeln beziehungsweise eingeschrieben sind, und legt durch a an beide eine gemeinschaftliche Tangentialebene, so ist sie eine gesuchte Ebene. Diese berührt aber auch den Kegel, der beide Kugeln gemeinsam berührt (es gibt im allgemeinen zwei solche Kegel, deren Spitzen (d, e) auf der Geraden bc liegen, die eine (d) zwischen b und c, die andere (e) ausserhalb dieses Zwischen-

raumes) und geht daher durch die Spitze (d) dieses Kegels, demnach ist die Gerade ad eine Linie der gesuchten Tangentialebene. Sucht man daher die erste Spur von ad und legt von ihr aus an die erste Spur des Kegels (A, a_1), welche ein Kreis ist, eine Tangente, so ist das die Spur einer Tangentialebene, deren es daher vier geben kann.

In unserer Zeichnung haben wir b und c (oder f) so gewählt, dass die beiden entsprechenden Kugeln gleich sind und daher die Spitze e ins Unendliche fällt, d. h. der die beiden Kugeln berührende Kegel in einen Cylinder übergeht, dessen Axe bc ist, so dass die durch a zu bc gelegte Parallele D zweien gesuchten Tangentialebenen angehört. Die beiden anderen Tangentialebenen findet man in gleicher Art, wenn man den Punkt f (statt c) verwendet.

Anm. Durch das eben angeführte Verfahren kommt man zum Ziele ohne Konstruktion von Curven. Wollte man aber die allgemeine Regel befolgen, so müsste man die erste Spur des Kegels (CB) suchen, also eine Curve (Ellipse) konstruiren.

412. Es gibt noch einen Fall, in welchem man sofort erkennt, dass zwei Kegel gemeinschaftliche Tangentialebenen zulassen. Wenn nemlich beide kongruente Drehungskegel sind mit parallelen Axen. Denn in diesem Falle darf man nur die $\mathfrak{T}_1$ so annehmen, dass sie auf den Axen (a_1, b_1) der Kegel senkrecht steht, um sich zu überzeugen, dass Tangenten der ersten Spuren beider Kegel auf zwei Berührungslinien führen, die parallel sind, und zwar die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten, wenn beide Kegelspitzen auf einer die inneren, wenn sie verschiedenen Seiten der $\mathfrak{T}_1$ liegen. Will man nun die gemeinschaftlichen Tangentialebenen zweier solcher Kegel finden, so nimmt man am besten die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ auf beiden Kegelaxen (a_1, b_1) senkrecht steht, und die Spitze (a) des einen Kegels enthält. Legt man nun von a an die erste Spur (B) des anderen Kegels (Bb) eine Tangente (welche die Spur einer Tangentialebene vorstellt) die B in c berührt, so ist bc die Berührungslinie auf Kegel (Bb) und eine durch a $\parallel$ bc gelegte Gerade die auf dem anderen Kegel.

413. Hat man zwei Kreiscylinder, die nicht parallel sind, und eine gemeinsame Tangentialebene besitzen, so werden

sich in der Regel die Axen (A, B) dieser Cylinder kreuzen, und ist offenbar die Entfernung von A und B gleich der Differenz der beiden Halbmesser (die mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden, wenn die Cylinder auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene liegen). Die in der Tangentialebene liegenden Berührungslinien der Cylinder (wie zweier entwickelbarer Flächen überhaupt) schneiden sich in einem Punkte, in welchem die Ebene beide Flächen, also diese sich selbst, berühren. Sind beide Cylinder gleich, so schneiden sich ihre Axen, und gibt es offenbar noch eine (zur ersteren parallele) gemeinschaftliche Tangentialebene, also auch noch einen gemeinsamen Berührungspunkt. In diesem Falle haben also die beiden Cylinder zwei Berührungspunkte, und werden sich demnach, als Flächen zweiter Ordnung, nach zwei Ellipsen schneiden.

Anm. Ist der Halbmesser des einen Cylinders $= 0$, so haben wir eine Tangentialebene an einen Cylinder durch eine Gerade, und stellt sich daher heraus, dass diese den Cylinder berührt, und von seiner Axe um seinen Halbmesser entfernt ist.

414. Hat man zwei Kreiskegel (mit den Axen A und B, den Spitzen a und b, und den Winkeln der Axen mit den Erzeugungen α und β) die eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben, so berührt diese auch zwei den Kegeln eingeschriebene gleiche Kugeln (von Halbmesser ρ und mit den auf A und B beziehungsweise liegenden Mittelpunkte m und n), also auch den diese Kugeln berührenden Cylinder (dessen Axe mn und dessen Halbmesser $= \rho$ ist). Es muss demnach (s. vorige Anmerkung) die Entfernung der beiden Geraden ab und mn gleich ρ sein.

Soll man also untersuchen, ob zwei Kreiskegel (Aaα, Bbβ) eine gemeinschaftliche Tangentialebene zulassen, so nehme man auf A und B die Punkte m und n so an, dass $\overline{am} . \mathrm{tg}\,\alpha = \overline{bn} . \mathrm{tg}\,\beta = \rho$ ist, und suche die Entfernung der beiden sich kreuzenden Geraden ab und mn, welche $= \rho$ sein muss, wenn die Tangentialebene möglich sein soll.

Anm. Diese Regel kann auch verwendet werden, wenn statt des einen Kegels (z. B. Bbβ) ein Cylinder mit dem Halbmesser ρ gegeben ist. Die vorzunehmende Modifikation wird der Schüler wohl herausfinden.

415. Sind die A und B die ersten Spuren zweier Böschungsflächen, die beide mit der $\mathfrak{T}_1$ denselben Winkel (α) bilden, und legt man an A und B eine gemeinschaftliche Tangente C (die A in a und B in b berührt), so sind die in a_1 und b_1 zu A_1 und B_1 gezogenen Normalen (C_1, D_1), welche zugleich die ersten Risse der Berührungserzeugenden (C, D) vorstellen, zu einander parallel. Da aber noch C und D mit ihren ersten Rissen gleiche Winkel (α) bilden, so ist C ‖ D. Hieraus ersieht man, dass der oben (414) für Kreiskegel (welche auch Böschungsflächen sind) entwickelte Satz auch allgemein für Böschungsflächen gilt und folgendermassen lautet:

Zwei Böschungsflächen, die mit einer Ebene gleiche Winkel bilden, lassen gemeinschaftliche Tangentialebenen zu.

Anm. Wie bei zwei Kegeln, so auch hier, sind je nach Umständen, die der Schüler leicht schon durch Anschauung finden wird, die äusseren oder die inneren gemeinschaftlichen Tangenten von A und B als Spuren der Tangentialebenen anzusehen.

416. Soll man an zwei Flächen ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$), von denen eine ($\mathfrak{A}$) entwickelbar ist, die andere ($\mathfrak{B}$) nicht, eine gemeinschaftliche Tangentialebene ($\mathfrak{C}$) legen, so ist $\mathfrak{C}$ eine Ebene, die $\mathfrak{B}$ berührt und mit einer Tangentialebene an $\mathfrak{A}$ parallel ist. Suchen wir daher alle Ebenen, die $\mathfrak{B}$ berühren, und mit Tangentialebenen an $\mathfrak{A}$ parallel sind (diese Ebenen umhüllen eine entwickelbare Fläche $\mathfrak{C}$), so ist die gesuchte Ebene diejenige Ebene, welche die Fläche $\mathfrak{A}$ und die Hilfsfläche $\mathfrak{C}$ gemeinsam berührt. Zur Ausführung der Zeichnung nimmt man die Tafeln so an, dass eine Schneidlinie (A) der entwickelbaren Fläche $\mathfrak{A}$ in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so dass A die erste Spur von $\mathfrak{A}$ ist.

Ist nun B die erste Spur einer Tangentialebene von $\mathfrak{A}$ (B muss natürlich A berühren) und sucht man deren Berührungslinie C, so kann man an $\mathfrak{B}$ eine Ebene ‖ $\mathfrak{C}$ (BC) legen und ihre erste Spur (D) suchen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man so viele D finden, als man nöthig zu haben glaubt, um die Umhüllungscurve (E) dieser D (d. h. eine Linie, die alle D berührt) gut zu zeichnen. Legt man nun an A und E eine gemeinschaftliche Tangente (ob die äussere oder innere,

lässt sich durch Anschauung erkennen), so ist sie die erste Spur der gesuchten 𝔈.

Anm. Wollte man auch den Punkt finden, in welchem 𝔈 und 𝔅 sich berühren, so müsste man von den Tangentialebenen an 𝔅 die Berührungspunkte suchen und durch eine Curve verbinden, und dann suchen, wo diese von der Geraden geschnitten wird, nach welcher 𝔈 und 𝔈 sich berühren.

417. Die Lösung der eben besprochenen Aufgabe ist im Allgemeinen sehr mühsam und zeitraubend. In besonderen Fällen aber vereinfacht sie sich sehr, oder kann in anderer Art durchgeführt werden. Wir wollen darüber einige Beispiele machen.

Ist die entwickelbare Fläche (𝔄) ein Cylinder, so wird die obengenannte Hilfsfläche (𝔈) ebenfalls ein (die Fläche 𝔅 berührender) Cylinder der || 𝔄 sein. Wir haben daher an 𝔅 einen berührenden Cylinder 𝔈 || 𝔄 zu legen und dann an 𝔄 und 𝔈 eine gemeinsame Tangentialebene.

Ist 𝔄 ein beliebiger Kegel (Aa), so schlagen wir ein anderes Verfahren (als in 416) ein, das auf eine einfachere Lösung führt. Wir legen nemlich von der Spitze a des Kegels Aa einen berührenden Kegel an 𝔅, und legen dann an die beiden Kegel eine gemeinsame Tangentialebene. Ist dabei 𝔅 eine Fläche zweiter Ordnung, so berührt der Kegel die 𝔅 nach einem Kegelschnitt, und ist die erste Spur dieses Kegels ebenfalls ein Kegelschnitt. Einen noch einfacheren Fall wollen wir in folgender Nummer geben.

418. Aufg. An eine Drehfläche und einen Drehungskegel, wenn beide Flächen parallele Axen haben, eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu den Axen (a_1, b_1) der Flächen ist, und dass $\mathfrak{T}_2$ die beiden Axen enthält. Legt man nun an die Drehfläche (Aa_1) einen berührenden Kegel (Ca_1), der mit dem gegebenen Kegel (Bb_1) kongruent ist, und die Fläche (Aa_1) nach einem Parallelkreis (D) berührt, so darf man nur (nach 412) an diese beiden Kegel eine gemeinschaftliche Tangentialebene legen (indem man die $\mathfrak{T}_1$ durch b legt, und von b aus an die erste Spur des Kegels Ca_1 eine Tangente legt, welche die erste Spur der Tangentialebene vor-

stellt), so berührt sie den Kegel Ca_1 nach einer Geraden (F), deren Schnitt mit D der Berührungspunkt auf der Fläche Aa_1 ist.

419. Aufg. An einen Drehungscylinder ($\mathfrak{A}$) und einen Wulst ($\mathfrak{B}$) eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen. Fig. 163.

Aufl. Denkt man sich die Ebene gefunden und parallel verschoben, bis sie die Mittellinie (A) des Wulstes berührt, so wird sie sich durch diese Verschiebung von der Cylinderaxe (um den Halbmesser α des Halbmeridians des Wulstes) entfernen oder ihr nähern. Sucht man daher eine Tangentialebene für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und denkt man sich dieselbe um α parallel verschoben, bis sie A berührt, so berührt sie nun einen Cylinder, der mit dem gegebenen gemeinsame Axe aber einen um α kleineren (oder grösseren) Durchmesser hat. Nimmt man daher die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ die Mittellinie A des Wulstes enthält, und $\mathfrak{T}_2 \parallel$ B (B soll die Axe des Cylinders sein) ist, so ziehe man E parallel zum Halbmeridian D des Cylinders so, dass E der B um α näher (oder ferner) ist als D, betrachte E als Halbmeridian eines Drehungscylinders (E, B), dessen Axe B ist, und lege an A und Cylinder (E, B) eine gemeinschaftliche Tangentialebene. Die erste Spur F dieser Tangentialebene berührt A und die erste Spur G des Cylinders (E, B), (welche eine Ellipse mit bekannten Axen ist); die Berührungslinie H dieser Ebene wird auf bekannte Art gefunden. Sucht man (nach 397) nun eine Ebene, welche $\parallel \mathfrak{E}$ (F H) ist, und den gegebenen Wulst berührt, so erhält man eine gesuchte Tangentialebene. Es giebt für unsere Zeichnung 8 solche Ebenen.

Anm. Ein ähnliches Verfahren lässt sich anwenden, wenn statt des Wulstes eine andere Röhrenfläche (deren Mittellinie A eine andere Gestalt, z. B. die einer Schraubenlinie hat) gegeben ist. Ebenso wenn statt des Cylinders ein Kreiskegel vorliegt.

420. Soll man an zwei nicht entwickelbare Flächen ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) eine gemeinschaftliche Tangentialebene legen, so kann man auf der einen ($\mathfrak{A}$) eine Erzeugende (A) annehmen und verlangen, dass der Berührungspunkt der gesuchten Ebene auf A liege. Denkt man sich nun in allen Punkten von A Tangentialebenen an $\mathfrak{A}$ gelegt, welche zusammen eine entwickelbare Fläche ($\mathfrak{C}$) umhüllen, so haben wir nur noch (nach 416) an B und $\mathfrak{C}$ eine gemeinschaftliche Tangentialebene (welche mitunter unmöglich

ist] zu legen, welches dann eine gesuchte Ebene ist. Man sieht also, dass es für jede Erzeugende A von 𝔄 (innerhalb gewissen Grenzen) gemeinsame Tangentialebenen an 𝔄 und 𝔅 giebt, also im Ganzen unendlich viele solche Ebenen, die eine die 𝔄 und 𝔅 gemeinsam umschriebene entwickelbare Fläche geben, welche im Allgemeinen nur sehr mühsam zu finden wäre. In einzelnen besonderen Fällen aber ist die Aufgabe leicht zu lösen. Wir wollen einige solche Fälle behandeln.

421. Aufg. An zwei Kugeln mit den Mittelpunkten a und b und den Halbmessern α und β eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen.

Aufl. Alle die gesuchten Ebenen bilden offenbar zwei Kegel, welche beide Kugeln gemeinschaftlich berühren, und deren einer sein Centrum (c) zwischen a und b hat, während das (d) des anderen ausserhalb $\overline{ab}$ liegt. Zugleich ist leicht einzusehen, dass sich verhält:

$$\alpha : \beta = \overline{ac} : \overline{bc} = \overline{ad} : \overline{bd},$$

wodurch c und d leicht gefunden werden können. Will man die beiden Kegel zeichnen, so nimmt man die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie a und b enthält, und demnach die Kugeln (aα und bβ) nach zwei grössten Kreisen (A und B) schneidet. Zieht man nun die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten an A und B, so geben sie den Meridian des einen umschriebenen Kegels, während die inneren den des anderen geben.

422. Aufg. An zwei Drehflächen (𝔄 und 𝔅) mit parallelen Axen eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen.

Aufl. Nimmt man auf 𝔄 einen Parallelkreis A an, so entspricht ihm ein die 𝔄 berührender Kegel; sucht man nun auf 𝔅 einen Parallelkreis B, dessen Berührungskegel mit dem für A kongruent ist, so lassen diese Kegel (s. 412) gemeinschaftliche Tangentialebenen (im Allgemeinen vier) zu. Sucht man die Berührungspunkte a und b der Tangentialebenen auf 𝔄 und 𝔅, so giebt deren Verbindungslinie eine Erzeugende der entwickelbaren Fläche, die 𝔄 und 𝔅 gemeinschaftlich berührt.

Zur Ausführung der Zeichnung nimmt man die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu beiden Axen, die $\mathfrak{T}_2$ so an, dass sie beide Axen enthält, und zeichnet die beiden Hauptmeridiane M und N (etwa Ellipsen) der Flächen. Legt man an M und N gemeinschaftliche Tan-

genten, so erhält man die Grenzpunkte der Curven, nach denen 𝔄 und 𝔅, von der umhüllenden entwickelbaren Fläche berührt werden. Sind die Flächen zweiter Ordnung, so gibt es im Allgemeinen zwei solche Curven.

423. Soll man an zwei windschiefe Flächen 𝔄 und 𝔅 eine gemeinsame Tangentialebene legen, und nimmt man wieder auf 𝔄 eine Erzeugende A an, so ist (s. 280) jede durch A gelegte Ebene Tangentialebene an 𝔄; man darf also nur durch A eine Tangentialebene an 𝔅 legen, um eine gesuchte Ebene zu erhalten. Zu dem Ende muss man aber nur den Schnitt (a) von A und 𝔅 suchen und durch a eine Erzeugende B der Fläche 𝔅 legen; die Ebene AB ist dann eine gemeinschaftliche Tangentialebene.

Ist die eine der beiden Flächen windschief, die andere krummlinig, so legt man wieder durch eine Erzeugende A der windschiefen Fläche eine Tangentialebene an die zweite Fläche, so ist sie eine gesuchte Ebene.

424. Aus den letzten Betrachtungen geht hervor, dass die Aufgabe an zwei nicht entwickelbare Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen, unendlich viele Lösungen zulässt, und demnach die Aufgabe gegeben werden kann:

An drei unentwickelbare Flächen (𝔄, 𝔅, ℭ) eine Tangentialebene zu legen.

Wie man diese Aufgabe löst, geht aus den letzten Betrachtungen hervor. Verlangt man nemlich zunächst eine Ebene, die nur 𝔄 und 𝔅 berührt, so entspricht diesen Bedingungen eine 𝔄 und 𝔅 umschriebene entwickelbare Fläche (𝔇). Lässt man aber die Ebene nur 𝔄 und ℭ berühren, so kommt man auf eine entwickelbare Fläche (𝔈), die 𝔄 und ℭ berührt. Legt man nun an 𝔇 und 𝔈 eine gemeinschaftliche Tangentialebene, so ist diese die gesuchte. Man sieht hieraus, dass die vorliegende Aufgabe im Allgemeinen auf sehr komplizirte Zeichnungsoperationen führt. Wir wollen aber in folgender Nummer ein Beispiel machen, das sehr einfach sich gestaltet.

425. Aufg. An drei Kugeln (𝔄, 𝔅, ℭ) mit den Mittelpunkten a, b, c und den Halbmessern α, β, γ eine gemeinschaftliche Tangentialebene zu legen. Fig. 164.

Aufl. Nimmt man die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass die 3 Mittelpunkte (a, b, c) in ihr liegen, also mit ihren ersten Rissen (a_1, b_1, c_1) zusammenfallen, so liegen auch in $\mathfrak{T}_1$ die drei grössten Kreise (A, B, C) der Kugeln. Legt man nun zunächst an $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine Tangentialebene, so umhüllt sie einen Kegel, dessen Centrum auf ab in d liegt, so dass $\overline{ad} : \overline{bd} = \alpha : \beta$. Lässt man aber die Ebene an $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ berühren, so erhält man einen Kegel mit dem Centrum e (auf ac), wenn $\overline{ae} : \overline{ce} = \alpha : \gamma$. Soll nun die Ebene $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ berühren, so muss sie durch d und e gehen und ist also Gerade de ihre erste Spur. Nimmt man $\mathfrak{K}_2 \perp$ de an und zeichnet a_2 und den zweiten Riss der Kugel $\mathfrak{A}$, so ist Ebene D_2, deren zweiter Riss (D_2) durch d_2 geht und den zweiten Umriss der Kugel $\mathfrak{A}$ berührt, die gesuchte Tangentialebene und g ihr Berührungspunkt. Zeichnet man die zweiten Umrisse von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, so erhält man in gleicher Art die Berührungspunkte auf diesen Kugeln.

Anm. Da es zwei Punkte d und zwei Punkte e gibt, so kann man vier solche Linien, wie de erhalten, und da durch jede derselben zwei Tangentialebenen gehen, so hat unsere Aufgabe hier acht Lösungen. Es können aber auch die Kugeln so liegen, dass es 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 und 0 Lösungen gäbe. Wann dies der Fall ist, wolle der Schüler untersuchen.

Da ferner die Ebenen D_2 alle drei Kugeln, also auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ berührt, so muss in de auch der Punkt f liegen, der die Spitze des an $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ berührenden Kegels vorstellt. Es liegen also in jeder ersten Spur einer Tangentialebene an $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ drei Kegelspitzen, woraus sich, wenn man die Zeichnung in der $\mathfrak{T}_1$ berücksichtigt, ein planimetrischer Satz ergiebt. Welcher?

§. 26.

Tangentialflächen an Flächen.

426. Die Aufgabe, eine krumme Fläche zu suchen, die eine oder mehrere Flächen berührt, ist so vielseitig, und in der Regel so schwierig, dass wir uns hier darauf beschränken müssen, einige allgemeine Regeln darüber zu geben, und mehrere besondere Fälle zu behandeln. Ist die gesuchte Fläche eine Kugel, so können zu deren Aufsuchung folgende Sätze benützt werden.

Hiebei wollen wir, um uns einfach ausdrücken zu können, den Halbmesser einer Kugel oder eines Drehungscylinders, sowie den Winkel der Erzeugenden eines Drehungskegels mit seiner Axe (Axenwinkel, Oeffnungswinkel) durch kleine griechische Buchstaben (α, β, γ) bezeichnen. Dann verstehen wir unter Kugel (a, α) oder 𝔎 (a, α) die Kugel, deren Mittelpunkt a und deren Halbmesser α ist; unter 𝔎 (a, $\alpha - \beta$) die Kugel mit dem Centrum a und dem Halbmesser $\alpha - \beta$; unter Cylinder (A, α) oder ℭ𝔍 (A, α) den Cylinder, dessen Axe A und dessen Halbmesser α ist; unter Kegel (a, A, α) oder 𝔎𝔍 (a, A, α) den Kegel, dessen Spitze a, dessen Axe A und dessen Axenwinkel α ist. Wir können nun sagen:

Der Ort des Mittelpunkts a einer 𝔎 (a, α), die

1) eine 𝔎 (b, β) berührt, ist eine 𝔎 (b, $\alpha \pm \beta$),
2) einen ℭ𝔍 (B, β) berührt, ist eine ℭ𝔍 (B, $\alpha \pm \beta$),
3) einen 𝔎𝔍 (b, B, β) berührt, ist eine 𝔎𝔍 (c, B, β), wobei $\alpha = \overline{bc} \sin \beta$ ist,
4) eine Ebene berührt, ist eine in der Entfernung α damit parallele Ebene (es giebt natürlich zwei solche Ebenen).

427. Aufg. Es sind gegeben drei Kugeln (aα, bβ, cγ); man sucht den Mittelpunkt (d) einer Kugel (dδ), welche die drei gegebenen Kugeln berührt.

Aufl. Man nimmt die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie a, b und c enthält, und sucht den Mittelpunkt d als Schnitt dreier Kugeln mit den Mittelpunkten a, b, c und den Halbmessern $\alpha \pm \delta$, $\beta \pm \delta$, $\gamma \pm \delta$. Nimmt man z. B. $\alpha + \delta$, $\beta + \delta$, $\gamma + \delta$, so ist d die Spitze einer Pyramide, deren Grundfläche abc in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und deren Spitze von a, b, c die Entfernungen $\overline{ad} = \alpha + \delta$, $\overline{bd} = \beta + \delta$, $\overline{cd} = \gamma + d$ hat. Es ist längst bekannt (aus dem Band I) wie man d findet, und dass es zwei solche Punkte (einen über und einen unter der $\mathfrak{T}_1$) gibt. Man hätte aber auch $\alpha - \delta$ nehmen können und dadurch zwei andere d erhalten. Es gibt also im Ganzen 16 Auflösungen für die Aufgabe.

Sollte man eine Kugel (a, α) finden, die eine 𝔎 (b, β), eine 𝔎 (c, γ) und ausserdem noch eine Ebene (𝔄) berührt, so würde man die Tafeln so wählen, dass b und c in der $\mathfrak{T}_1$ liegen und 𝔄 auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht und dass $\mathfrak{T}_2 \perp$ bc; dann wäre der Ort des gesuchten Mittelpunktes a eine 𝔎 (b, $\alpha \pm \beta$), eine

$\mathfrak{K}$ (c, $\alpha \pm \gamma$) und eine Ebene A_1, die || $\mathfrak{A}$ ist und eine Entfernung α von ihr hat. Sucht man nun den Schnitt der beiden Kugeln (b, $\alpha \pm \beta$) und (c, $\alpha \pm \gamma$) [wobei man eines von den beiden Zeichen ($\pm$) wählt], welcher ein Kreis (B) ist, dessen erster Riss eine Gerade (B_1) und dessen zweiter Riss ein Kreis (B_2), so liegt a_1 in A_1 und B_1 und ergiebt sich daraus a_2.

Anm. Soll die Oberfläche der gesuchten Kugel durch einen Punkt a gehen, so ist das so viel, als ob sie an einer Kugel berühren soll, deren Mittelpunkt a und deren Halbmesser = o ist.

428. Aufg. Eine $\mathfrak{K}$ (a, α) zu suchen, welche zwei Kugeln (bβ und cγ), und ausserdem noch einen $\mathfrak{CF}$ (Aδ) berührt.

Aufl. Man nimmt die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1 \perp$ A steht, (so dass der erste Riss von A ein Punkt d_1 und dass $\mathfrak{T}_2$ || bc ist, so ist der erste Riss des Kreises (B), nach welchem sich die beiden kugelförmigen Oerter des gesuchten Mittelpunktes a schneiden, eine Ellipse (B_1). Sucht man noch den ersten Riss des cylinderischen Ortes von a, welcher ein Kreis (C_1) ist mit dem Centrum d_1 und dem Halbmesser ($\alpha \pm \delta$), so ist a_1 der Schnitt von B_1 und C_1.

429. Aufg. Es soll ein Drehungsellipsoid gesucht werden, das eine $\mathfrak{K}$ (a, α) berührt, und dessen beide Brennpunkte (b, c) gegeben sind.

Aufl. Denkt man sich die Aufgabe gelöst, und bezeichnen wir den Berührungspunkt des Ellipsoids und der Kugel mit d, so ist ad die ihm entsprechende Normale der Kugel, also auch des Ellipsoids; es schneidet demnach ad die Axe bc des Ellipsoids und liegt demnach d in der Ebene abc. Nehmen wir daher diese Ebene als $\mathfrak{T}_1$ an, so liegt in ihr der Hauptmeridian A des Ellipsoids und ein grösster Kreis (B) der $\mathfrak{K}$ (aα), und ist der Punkt, in welchem sich A und B berühren, der gesuchte Punkt d.

Um nun d zu finden, nehmen wir auf dem Kreis B einen beliebigen Punkt m an und halbiren den Winkel bmc durch eine Gerade M. Denken wir uns diese Konstruktion für alle Punkte des Kreises wiederholt, so umhüllen die Geraden M eine Curve (Fehlercurve). Zieht man an diese eine Tangente von a aus, so ist ihr Schnitt mit B der verlangte Punkt d.

Anm. Ein etwas geübter Zeichner wird die Lage des Punktes nach Augenmass nahe erkennen. Nimmt man nun auf einem kleinen Bogen von B, auf welchem d vermuthlich liegt, drei Punkte m, n, o an und sucht die entsprechenden Halbirungslinien M, N, O, so ist das entsprechende Stück der Fehlercurve als ein Kreisbogen zu betrachten. Sucht man daher den Mittelpunkt des an M, N und O berührenden Kreises K und legt an diesen von a aus eine Tangente, so erhält man ohne viele Mühe und graphisch genau den Punkt d.

430. Wir haben früher (374) gesehen, dass sich zwei Drehungshyperboloide (𝔄 und 𝔄', deren Axen aufeinander senkrecht stehen, nur dann nach einer Erzeugenden berühren, wenn $r = \delta \sin^2 \alpha$ und $r' = \delta \cos^2 \alpha$ ist; hiebei bedeuten r, r' die Halbmesser der Aequatoren von 𝔄 und 𝔄', $\delta = r + r'$ die Entfernung der Drehaxen und α den Winkel, den die Erzeugenden von 𝔄 mit dessen Axe bilden. Ferner hat sich dort gezeigt, dass man diese Flächen aufeinander wälzen kann, wenn man sie zugleich in der Richtung der Berührungserzeugenden aufeinander entsprechend verschiebt.

Wälzt man nun die beiden Hyperboloide 𝔄 und 𝔄' unter gleichzeitiger Vornahme der entsprechenden Verschiebung aufeinander, und lässt man zugleich die beiden Leitkegel (𝔅 und 𝔅') der Flächen aufeinander rollen, und zwar so, dass in jedem Momente die Leitkegel sich nach einer Erzeugenden berühren, welche der Erzeugenden von 𝔄 und 𝔄', nach welcher diese sich berühren, parallel ist, so wird bei einer ganzen Umdrehung von 𝔄 auch 𝔅 eine ganze Umdrehung gemacht haben, und wenn dabei 𝔄 sich an dem n^{ten} Theil von 𝔄' abgewickelt hat, auch 𝔅 auf dem n^{ten} Theile von 𝔅' abgewickelt haben. Nennt man nun n, wie dies in der Anwendung geschieht, die Uebersetzungszahl, so ist diese offenbar gegeben durch das Verhältniss von $\cos \alpha : \sin \alpha$; es ist also $n = \cot \alpha$. Denn denkt man sich die beiden sich tangirenten Leitkegel durch eine Kugel geschnitten, deren Centrum in der Spitze des Leitkegels liegt, so schneidet sie die Kegel nach Kreisen (A, A'), deren Halbmesser a, a' heissen mögen. Wälzt man nun die Kegel (𝔅, 𝔅') aufeinander, bis 𝔅 eine Umdrehung gemacht hat, so hat sich 𝔅 auf einem Theile von 𝔅' abgewickelt, der sich zum ganzen 𝔅' verhält,

wie der Umfang des Kreises A zu dem von A', also wie a : a'; demnach ist $n = \frac{a'}{a}$. Es verhält sich aber offenbar a' : a = cos α : sin α; folglich ist n = cot α. Nun ist aber noch $r = \delta \sin^2 \alpha$ und $r' = \delta \cos^2 \alpha$, also $\frac{r'}{r} = \cot^2 \alpha = n^2$; hieraus ergiebt sich:

$$r = \frac{\delta}{1 + n^2} \text{ und } r = \frac{n^2 \delta}{1 + n^2}; \text{ ferner ist } \cot \alpha = n.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man also zwei sich nach einer Erzeugenden berührende windschiefe Drehungshyperboloide konstruiren, wenn die Uebersetzungszahl n und die Entfernung δ ihrer Axen gegeben sind, und diese aufeinander senkrecht stehen.

431. Stehen die Axen der beiden Hyperboloide (𝔄, 𝔄') nicht senkrecht aufeinander, so ist (nach 374) $r \cot \alpha = r' \cot \alpha'$ und ist offenbar $\alpha + \alpha' = \varphi$, wenn φ den Winkel bezeichnet, den die Axen der Flächen miteinander bilden. In unserem Falle finden wir dann $\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = n$, woraus sich ergiebt:

$$\cot \alpha = \frac{n + \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad \frac{r}{\delta} = \frac{1 + n \cos \varphi}{1 + n^2 + 2n \cos \varphi},$$

$$\frac{r'}{\delta} = \frac{n^2 + n \cos \varphi}{1 + n^2 + 2n \cos \varphi} \text{ und } \frac{r}{r} = \frac{n + \cos \varphi}{\frac{1}{n} + \cos \varphi}.$$

Fig. 165. 432. Aufg. Es sind gegeben zwei Drehungscylinder, jeder vom Halbmesser α, deren Axen (A, B) eine Entfernung 2α haben, (so dass sich die Cylinder berühren) und einen Winkel (= 2φ) miteinander bilden; man soll einen Wulst vom Meridianhalbmesser ρ suchen, dessen Axe durch den Berührungspunkt (a) der Cylinder geht, in einer zu A und B parallelen Ebene liegt, mit A und B gleiche Winkel (also den ∧ φ) bildet, und welcher Wulst selbst beide Cylinder berührt.

Aufl. Denkt man sich den Wulst gefunden, beide Cylinder mit der Axe des Wulstes fest verbunden und gedreht, so beschreiben die Berührungspunkte der Cylinder mit dem Wulste Parallelkreise (P, Q), und die Cylinder selbst eine Drehfläche (als Umhüllung), welche den Wulst nach P und Q berührt.

Demnach berührt der Halbmeridian des Wulstes den der Umhüllungsdrehfläche, und zwar in zwei Punkten.

Wir werden daher den Meridian des Wulstes finden können, sobald wir den Meridian der genannten Umhüllungsfläche zu konstruiren im Stande sind. Nun beschreibt aber die Axe eines jeden der beiden Cylinder, wenn wir die angegebene Drehung mit ihnen vornehmen, ein windschiefes Drehungshyperboloid (𝔄) und demnach die Cylinder selbst eine Umhüllungsfläche (𝔅), die zu 𝔄 in der Entfernung α parallel ist. Demnach ist der Meridian von 𝔄 eine Hyperbel (C) und der von 𝔅 eine Parallele (D) zu C in der Entfernung α.

Nehmen wir nun (Fig. 165) die Tafeln so an, dass die Axen (A, B) der Cylinder $\parallel \mathfrak{T}_2$ sind und gleiche Winkel (φ) mit der $\mathfrak{T}_1$ bilden, ferner so, dass die Axe des gesuchten Wulstes (es giebt offenbar zwei solche) auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist der zweite Riss des Hauptmeridians von 𝔄 eine Hyperbel (C_2) deren Asymptoten A_2, B_2 sind, und deren Scheitel (b_2) um α von a_2 entfernt ist. Denkt man sich nun diese Hyperbel gezeichnet, und in der Entfernung α eine dazu parallele Curve (D_2) konstruirt (es giebt zwei solche Curven, von denen aber, da wir voraussetzen, dass der Wulst die Cylinder berühren, aber nicht zugleich in sie eindringen soll, nur die zu nehmen ist, deren Scheitel von a_2 entfernter ist, als b_2), so muss der Halbmeridian des Wulstes ein Kreis (E vom Halbmesser ρ) sein, dessen zweiter Riss (E_2) den D_2 zweimal berührt, und auf a_2b_2 seinen Mittelpunkt (c_2) hat. Demnach ist aber c_2 von D_2 um ρ und von C_2 um $\alpha + \rho$ entfernt.

> Es ist also der Mittelpunkt c_2 von E_2 (dem zweiten Risse des Halbmeridians des gesuchten Wulstes) ein Punkt auf a_2b_2, der von der Hyperbel C_2 um $\alpha + \rho$ entfernt ist, und so liegt, dass ein aus c_2 mit dem Halbmesser $\alpha + \rho$ beschriebener Kreis die C_2 zweimal berührt.

Zeichnet man in der Entfernung α daher eine zu C_2 parallele Curve, so ist ihr Schnitt mit der Geraden a_2b_2 der Punkt c_2. Es lässt sich aber aus den bekannten Eigenschaften der Hyperbel die Strecke $\overline{a_2c_2} = \delta$ mit Hilfe folgender Gleichung finden und

konstruiren, so dass man gar keine Hilfscurve (auch die Hyperbel C_2 nicht) zu zeichnen braucht. Es ist nemlich

$$\delta = \frac{\gamma}{\beta} \sqrt{(\alpha + \rho)^2 + \beta^2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet β die immaginäre Halbaxe und γ die halbe Exzentrizität von C_2.

Will man daher den verlangten Wulst zeichnen, so sucht man blos auf bekannte Art mittelst der Asymptoten (A_2, B_2) und des Scheitels (b_2), wie in der Zeichnung angedeutet, β und γ; hieraus mit Hilfe obiger Gleichung δ (als vierte Proportionale). Macht man nun $\overline{a_2 c_2} = \delta$ und zeichnet mit dem Halbmesser ρ aus c_2 den Kreis E_2, so hat man den zweiten Riss des Halbmeridians (E) unseres Wulstes.

Zeichnet man aber noch aus c_2 mit dem Halbmesser $\alpha + \rho$ den Kreis F_2 und will man sehen, wo er die (nicht gezeichnete) Hyperbel C_2 berührt, so erhält man für diese Berührungspunkte (e_2, f_2) das $x = \overline{a_2 e_2}$, ebenfalls mittelst der Eigenschaften der Hyperbel, durch folgende Gleichung:

$$x = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \delta,$$

wodurch man x mittelst Konstruktion auf bekannte Art finden kann. Denkt man sich nun einen Berührungspunkt (d) des Wulstes (E, a_2) mit einem der Cylinder, z. B. Cylinder Aα, gefunden, so gibt es auf diesem eine eingeschriebene Kugel, die mit dem Wulst denselben Berührungspunkt (d) hat, und deren Mittelpunkt auf A liegt, also bei der oben verlangten Drehung einen Parallelkreis G beschreibt, dessen zweiter Riss offenbar durch e_2 (oder f_2) geht. Sucht man den Punkt, in welchem G und A sich schneiden, so erhält man den Mittelpunkt (g) der genannten umgeschriebenen Kugel und damit die Ebene H_1, in welcher der gesuchte Berührungspunkt (d) liegt. Dieser liegt aber noch auf dem Parallelkreis P, den d bei der oft erwähnten Drehung beschreibt, und dessen Lage aus unserer Figur hervorgeht. Den Grund dieser Konstruktion von P wird sich aber der Schüler selbst zu erklären wissen.

Abschnitt V.

Anwendungen.

§. 27.

Verschiedene Anwendungen.

433. In diesem Abschnitte wollen wir solche Aufgaben behandeln, wie wir sie im ersten Buche vorgenommen haben, nemlich Aufgaben, in welchen die gegebenen und gesuchten Dinge Punkte, Gerade und Ebenen sind, bei welchen aber die Hilfsmittel, die wir zur Lösung der Aufgaben anwenden, auf Schnitte oder Berührungsebenen von krummen Flächen führen. Wie dies möglich ist, geht aus folgenden Sätzen hervor, deren Beweise so leicht gefunden werden, dass wir sie nicht beizufügen nöthig haben:

1) ein Punkt, der von einem gegebenen Punkte a eine Entfernung α hat, liegt auf einer Kugel aα (d. h. einer Kugel mit dem Centrum a und dem Halbmesser α);

2) ein Punkt, der von einer Geraden A eine Entfernung α hat, liegt auf einem Drehungscylinder Aα;

3) eine Gerade, die von einem Punkt a eine Entfernung α hat, berührt eine Kugel aα;

4) eine Gerade, die von einer Geraden A eine Entfernung α hat, berührt einen Drehungscylinder Aα;

5) eine Ebene, die von einem Punkte a eine Entfernung α hat, berührt eine Kugel aα;

6) eine Ebene, die von einer Geraden A eine Entfernung α hat, berührt einen Cylinder Aα;

7) eine Gerade, die durch einen Punkt a geht und mit einer Geraden A einen Winkel α bildet, ist die Erzeugende eines Drehungskegels mit der Spitze a, dem Winkel (der Er-

zeugenden mit der Axe) α und einer zu A parallelen Axe, also eines Kegels (a, $\parallel$ A, α);

8) eine Gerade, welche durch den Punkt a geht und mit einer gegebenen Ebene ($\mathfrak{E}$) einen Winkel ($90 - \alpha$) bildet, ist Erzeugende eines Kegels (a, $\perp \mathfrak{E}$, α);

9) eine Ebene, die durch einen Punkt a geht und mit einer Geraden A einen Winkel α bildet, ist Tangentialebene eines Kegels (a, $\parallel$ A, α);

10) eine Ebene, die durch einen Punkt a geht, und mit einer Ebenen $\mathfrak{E}$ einen Winkel ($90 - \alpha$) bildet, berührt einen Kegel (a, $\perp \mathfrak{E}$, α);

11) ein Punkt, von dem aus zwei Punkte a und b unter einem Winkel α gesehen werden, (d. h. dessen Verbindungslinien mit a und b einen Winkel α bilden), liegt auf einem Wulst (wenn $\alpha = 90^0$ auf einer Kugel), dessen Axe ab und dessen Halbmeridian ein (von a nach b gehender) Kreisbogen ist, für welchen alle Peripheriewinkel, deren Schenkel beziehungsweise durch a und b gehen, $= \alpha$ sind;

12) eine Gerade, die drei Gerade (A, B, C) schneidet, ist eine Erzeugende einer windschiefen Fläche (ABC).

Mittelst dieser Sätze können wir eine Menge Aufgaben lösen, in denen ein Punkt, eine Gerade oder Ebene gesucht sind, die zu Punkten, Geraden und Ebenen in gewissen Beziehungen stehen. Wir wollen darüber in folgenden Nummern einige Beispiele ausführen.

Fig. 166. 434. Aufg. Einen Punkt zu finden, der von drei Punkten (a, b, c) gegebene Entfernungen (α, β, γ) hat.

Aufl. Man nimmt die Tafeln so an, dass die eine, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, die Punkte (a, b, c) enthält, und sucht den Schnitt dreier Kugeln, deren Mittelpunkte a, b, c und deren Halbmesser α, β, γ sind. Beschreibt man nun mit den Halbmessern α, β, γ in der $\mathfrak{T}_1$ aus den Mittelpunkten a, b, c die Kreise A, B, C (welche die Schnitte der drei Kugeln mit der $\mathfrak{T}_1$ vorstellen), so schneiden sich die Kugeln A und B nach einem Kreise (D), dessen erster Riss (D_1) die Verbindungslinie ($d_1 e_1$) der beiden Schnittpunkte (d_1, e_1) von A_1 und B_1 ist; auf diesem ersten Risse liegt der erste Riss (f_1) des gesuchten Punktes (f). Sucht man ebenso den ersten Riss des Kreises,

nach welchem sich die Kugeln A und C schneiden, so erhält man dadurch f_1, während f_2 im zweiten Riss von D liegt, der ein Kreis ist, wenn man, wie hier, die $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zur Geraden ab annimmt.

Anm. Man kann offenbar den Punkt f auch als Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche abc betrachten, die von den Punkten a, b, c um α, β, γ entfernt ist. Sucht man aber diese Spitze nach den früher (im ersten Bande) gegebenen Regeln auf, so wird man auf dieselben Zeichnungsoperationen geführt, wie oben. — Der Schüler wolle noch die Aufgabe versuchen: Einen Punkt zu finden, der von zwei Punkten und einer Ebene gegebene Entfernungen hat.

435. Aufg. Man soll eine Gerade suchen, die zwei gegebene Gerade so schneidet, dass die Entfernung der beiden Schnittpunkte eine gegebene Länge (α) hat, und dass sie mit der einen Geraden einen gegebenen Winkel φ bildet. Fig. 167.

Aufl. Man nimmt die Tafeln so an, dass die eine Gerade, die mit der gesuchten den $\wedge \varphi$ bildet, senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, und die andere $\| \mathfrak{T}_2$ ist, so dass Gerade a_1 (Fig. 167) die erste und Gerade A die zweite der gegebenen Geraden ist. Nehmen wir nun auf der Geraden a_1 einen Punkt a an, und betrachten ihn als den Schnittpunkt mit der gesuchten Geraden, so ist diese die Erzeugende eines Kegels (B, a_1), dessen Halbmeridian B durch a geht und mit der Geraden a_1 den $\wedge \varphi$ bildet, während dann der Schnittpunkt von A mit der gesuchten Geraden auf eine Kreislinie C fällt (es gibt zwei solche Kreise, einer unter und einer über a), die ein Parallelkreis des Kegels (B, a_1) ist, und für welche $\overline{ab} = \alpha$ ist. Nimmt man statt a einen anderen Punkt der Geraden a_1, so erhält man einen anderen Kreis C, aber alle diese Kreise C bilden offenbar den Drehungscylinder C_1, auf diesem liegt also der Schnittpunkt der gesuchten Geraden mit A. Demnach ist dieser Schnitt der Punkt c, nach welchem Gerade A und Cylinder C_1 sich schneiden (es gibt hier zwei solche Punkte). Will man noch den Punkt d (dessen erster Riss in a_1), nach welchem die gesuchte Gerade die a_1 schneidet, so wird man leicht einsehen, dass d eben so hoch über oder unter c liegt, als b unter a. Demnach ist Gerade cd (es gibt hier offenbar vier solche Linien) die gesuchte Gerade.

436. **Aufg.** Man sucht eine Ebene, die durch einen Punkt a geht, und mit einer Geraden A und einer Ebene die Winkel α und $90-\beta$ bildet.

Aufl. Man nimmt am Zweckmässigsten die Tafeln so an, dass die $\mathfrak{T}_1$ mit der gegebenen Ebene zusammenfällt, und die $\mathfrak{T}_2 \parallel A$ ist. Die gesuchte Ebene berührt einen Kegel (a, $\alpha \parallel A$) und einen Kegel (a, β, $\perp \mathfrak{T}_1$); sucht man diese gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Kegel (es kann vier solche Ebenen geben), so hat man die gesuchte Ebene.

437. Soll man eine Gerade suchen, die vier Gerade (A, B, C, D) schneidet, so wird man zunächst nur eine Gerade verlangen, die drei von den Geraden, etwa A, B, C, schneidet; dann ist die verlangte Gerade eine Erzeugende der windschiefen Fläche (ABC). Sucht man daher den Schnittpunkt a dieser Fläche mit D und legt durch a eine Erzeugende (E) der Fläche (ABC), so ist E die gesuchte Linie.

438. **Aufg.** Man soll eine rechtwinkelige dreiseitige Ecke so schneiden, dass der Schnitt einem gegebenen Dreiecke abc kongruent ist.

Aufl. Wir nehmen die Tafeln so an, dass das Dreieck abc in der $\mathfrak{T}_1$ liegt. Nennen wir nun die Spitze der Ecke d, so liegt dieser Punkt, da der Winkel adb ein rechter ist, auf einer Kugel, deren Durchmesser ab ist; aber auch aus ähnlichen Gründen auf einer Kugel vom Durchmesser ac und auf einer vom Durchmesser bc. Der Punkt d ist also der Schnitt dreier Kugeln.

Die graphischen Operationen zur Aufsuchung von d, sowie der wahren Gestalten der Seiten unserer Ecke, wolle der Schüler selbst zu finden versuchen.

Anm. Wäre die Ecke nicht rechtwinkelig, so wären die Oerter des Punktes d keine Kugeln, sondern Wulste (s. 434); wir müssten daher den Schnitt dreier Wulste aufsuchen.

§. 28.

Vierkant.

439. Streng genommen, gehören in den vorliegenden Abschnitt die früher behandelten Aufgaben über das Dreikant (drei-

seitige Ecke). Denn hat man z. B. aus drei Seiten (AB, BC, CA) ein Dreikant zu konstruiren, und legt man die $\mathfrak{T}_1$ durch die Kanten A, B, welche den gegebenen Winkel miteinander bilden, so ist C die Erzeugende eines Kegels, der die Spitze s der Ecke zum Centrum hat, mit der Axe A und dem $\wedge$ (CA); C ist aber auch eine Erzeugende des Kegels mit der Spitze s, der Axe B und dem Winkel (BC). Also erscheint C als Schnitt zweier Kegel.

Da wir aber alle Aufgaben über das Dreikant schon früher gelöst haben, und die neue Lösungsart auf dieselben Zeichnungsoperationen führt, wie die alte, so wollen wir über das Dreikant hier nicht weiter sprechen. Wohl aber wollen wir die Aufgaben, welche über ein Vierkant (vierseitige Ecke) gegeben werden können, in diesem § zu lösen suchen.

Die Aufgaben über das Vierkant gehen dahinaus, ein solches Gebilde zu konstruiren, wenn von demselben bekannt sind alle Stücke (Seiten und Winkel) bis auf drei. Demnach können folgende Aufgaben vorkommen.

Ein Vierkant zu konstruiren, von dem alle Stücke gegeben sind bis auf

1) drei Winkel,
2) zwei Winkel und eine Seite,
3) ein Winkel und zwei Seiten,
4) drei Seiten.

Diese Aufgaben wollen wir in den folgenden Nummern lösen, und nur hier ein für allemal bemerken, dass wir die vier Kanten unserer Ecke mit A, B, C, D, die Spitze mit s bezeichnen. Ferner bezeichnen wir die Winkel des Vierkants mit denselben Buchstaben, wie die Kanten, an denen sie gebildet sind, die Seiten aber nennen wir AB, BC, CD, DA. Aehnlich wie beim Dreikant, ist jede Kante des Vierkants eine Gerade, die von dem Scheitel s aus nach einer Richtung in's Unendliche fortgeht (ein Halbstral), während wir die von s aus in entgegengesetzter Richtung ins Unendliche fortgehende Gerade, welche dem Vierkant nicht angehört, die negative Kante nennen können. Jede Seite des Vierkants ist wieder eine von zwei Halbstralen begrenzte Ebene (also ein ebener Winkel) und je zwei zusammenstossende Seiten bilden wieder einen einzigen Winkel, (während

zwei unbegrenzte Ebenen vier Winkel bilden, (von denen je zwei gegenüberliegende einander gleich sind). Soweit verhält sich alles, wie beim Dreikant.

Fig. 168. 440. Für das Vierkant ist noch zu bemerken, dass es zwei Ebenen (AC, BD) gibt, die es in zwei Dreikante theilen, und die wir Diagonalebenen nennen. Ferner bilden zwei Seiten einer Ecke allerdings nur einen einzigen Winkel, aber dieser Winkel kann als hohler oder erhabener (grösser oder kleiner als 180°) aufgefasst werden. Beim Dreikant sind entweder alle Winkel hohl oder erhaben, und misst man der Einfachheit wegen alle Winkel als erhabene; anders beim Vierkant. Hier können erhabene und hohle Winkel gleichzeitig auftreten, wie dies ja schon beim ebenen Viereck (z. B. abcd der Fig. 168, wo a, b, c erhabene Winkel sind, aber dann d ein hohler ist) vorkommt. Man muss sich für jede körperliche Ecke vorstellen, dass die Seiten derselben eine Materie einschliessen oder ausschliessen (es steht uns frei, ob wir das eine oder andere annehmen), und dass alle Bögen, welche die Winkel messen, im leeren Raume (nicht in der Materie) liegen. Nehmen wir an, dass die Seiten die Materie ausschliessen, so bekommen wir für das Dreikant lauter erhabene Winkel, für ein Vierkant häufig auch, aber für ein solches von ähnlicher Beschaffenheit, wie unser Viereck abcd, wird der Winkel bei d ein hohler werden.

In allen folgenden Aufgaben über das Vierkant genügt es uns, dasselbe zu zeichnen, d. h. die Risse aller Kanten darzustellen. Will man dann noch fehlende Stücke (Seiten, Winkel) des Vierkants, so darf man sich nur erinnern, dass eine Seite nichts anders als der Winkel zweier Geraden, und ein Winkel der Winkel zweier Ebenen ist; beide Winkel haben wir aber im ersten Bande dieses Buches finden gelernt.

441. Aufg. Von einem Vierkant sind gegeben die vier Seiten (AB, BC, CD, DA) und ein Winkel (A); man soll es konstruiren.

Aufl. Man nimmt die Tafeln so an, dass die Kante $A \perp \mathfrak{T}_2$ ist, und dass eine Seite, welche A enthält, z. B. AB, in der $\mathfrak{T}_1$ liegt; dann kann man die Kanten A, B und C (nach früheren für das Dreikant gegebenen Regeln) zeichnen, da von dem

Dreikant ABC die Seiten AB, BC und der von ihnen eingeschlossene Winkel A gegeben sind. Um nun noch die Kante D zu finden, bedenke man, dass die Winkel, welche D mit A und C bildet (nemlich die Seiten CD und DA) gegeben sind. Es liegt also D auf einem Kegel mit der Axe A, der Spitze s und dem Winkel AD, ferner auf einem Kegel mit der Axe C, der Spitze s und dem Winkel CD; sucht man nun den Schnitt der beiden Kegel, so erhält man D. Wir können die Ausführung der Zeichnung dem Schüler überlassen, und bemerken nur, dass wir die Erzeugende jedes dieser Kegel (da D ein Halbstral ist) nicht rückwärts über s verlängern dürfen; ferner, dass es zwei Gerade C gibt (eine über und eine unter $\mathfrak{T}_1$), welche beide C zu symmetrischen Dreikanten führen; endlich dass wir zur Aufsuchung des Schnittes beider Drehungskegel (wozu man sich bekanntlich einer Hilfskugel bedient, die ihr Centrum in s hat) die Ebene AC als $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe nehmen müssen.

442. Aufg. Von einem Vierkant sind gegeben drei Seiten AB, BC, CD und zwei Winkel; man soll dasselbe zeichnen.

Aufl. Es sind hier offenbar verschiedene Fälle möglich, denn es können die zwei gegebenen Winkel unmittelbar aufeinander folgen und

1) beide von den gegebenen Seiten eingeschlossene sein, so dass gegeben sind die Winkel B und C;
2) kann ein Winkel eingeschlossen sein, der andere nicht, so dass gegeben sind die Winkel A, B;
3) können beide nicht eingeschlossen sein, so dass gegeben sind die Winkel A, D;
4) können die Winkel einander gegenüberliegen, z. B. die Winkel A und C.

Was nun den ersten Fall betrifft, so nehmen wir die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ die Seite BC (an der die gegebenen zwei Winkel anliegen) enthält (also B und C unmittelbar gezeichnet werden können) und dass die $\mathfrak{T}_2$ auf B (oder C) senkrecht steht; dann können wir auf bekannte Art mittelst der Winkel B und C und der Seiten AB und CD die Kanten A und D zeichnen und demnach ist das Vierkant vollständig dargestellt. — Die übrigen drei Fälle wollen wir in den folgenden Nummern behandeln.

Fig. 169. **443. Aufg.** Von einem Vierkant sind gegeben die drei Seiten AB, BC, CD und die Winkel A und B; man sucht das Vierkant.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ die Seite AB (an der die gegebenen Winkel anliegen) enthält, die $\mathfrak{T}_1$ so, dass sie auf B senkrecht steht; dann kann man zunächst, da die Seite AB gegeben ist, die Kanten B und A (Fig. 169) zeichnen. Ist ferner die Seite BC durch ihre Umklappung (B_1C_3) gegeben, so kann man auf bekannte Art c_2 und c_1 und c_3 finden, und man hat die Kante C. Da ferner A die erste Spur der vierten Seite (AD) ist und der Winkel (A) der Ebene (AD) mit der $\mathfrak{T}_1$ gegeben ist, so kann man auf bekannte Art die zweite Spur (E) der Ebene AD (in welcher D liegt) finden. Nun ist aber noch der Winkel (CD) bekannt, den D und C mit einander einschliessen; demnach ist D die Erzeugende eines Kegels mit der Spitze s, der Axe C und dem Winkel (CD). Sucht man den Schnitt dieses Kegels mit der Ebene (AE), so erhält man D. Die Aufsuchung dieses Schnittes wollen wir dem Schüler überlassen und nur bemerken, dass er dazu am Besten eine Tafel $(\mathfrak{T}_4)$ anwendet, die auf C (in irgend einem Punkte, z. B. im Punkte e) senkrecht steht. Diese Tafel schneidet den Kegel nach einem Kreis, die Ebene AE nach einer Geraden, und wo diese den Kreis schneidet (was durch Umklappen von $\mathfrak{T}_4$ leicht ausführbar ist), da ist ein Punkt der gesuchten D.

Fig. 170. **444. Aufg.** Von einem Vierkant sind gegeben die drei Seiten AB, BC, CD und die beiden Winkel A, D; man sucht das Vierkant.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ die Seite AD, an welcher wieder die beiden gegebenen Winkel anliegen, enthält, und $\mathfrak{T}_2$ auf A (oder D) senkrecht steht; und zeichne zunächst s uud A (Fig. 170), so erhält man dadurch, in der Art, wie bisher, aus der Umklappung (A_1B_3) der Seite AB und dem Winkel A, einen Punkt b von B und daraus B selbst. Nimmt man ferner D_1 beliebig an, so findet man in gleicher Art aus der Umklappung (D_1C_4) und dem (gegebenen) Winkel D einen Punkt c von C. Dieser Punkt c gilt aber nur, wenn wir zufällig D_1 so gewählt haben, dass der Winkel A_1D_1 gleich der (noch nicht bekannten) Seite AD ist, was wahrscheinlich nicht

der Fall ist. Allein es ist leicht einzusehen, dass die gesuchte Kante C auf einem Kegel liegt mit der Spitze s, dass die Gerade s_1 seine Axe ist, und dass sein Winkel derjenige ist, den die schon gefundene Gerade sc mit der Geraden s_1 einschliesst. Ausserdem liegt aber C auch auf einem zweiten Kegel mit der Spitze s, der Axe B und dem Winkel gleich der Seite BC. Sucht man daher den Schnitt dieser beiden Kegel (mit Hilfe einer Tafel, die mit der Ebene B_1, welche die beiden Kegelaxen enthält, zusammenfällt), so erhält man C (daraus das definitive c und hieraus das definitive D).

445. Aufg. Ein Vierkant zu zeichnen, von dem gegeben sind die Seiten AB, BC, CD und die Winkel A, C.

Aufl. Durch die Diagonalebene BD wird das Vierkant in zwei Dreikante ABD und BCD zerlegt. Von dem Dreikant BCD sind aber zwei Seiten (BC, CD) und der eingeschlossene Winkel C bekannt, man kann also die Seite BD finden. Demnach hat man vom Dreikant ABD die Seiten AB, BD und den Winkel A; hieraus lässt sich die Seite AD erhalten. Hat man aber nun von dem Vierkant alle Seiten und den Winkel C, so kann man es (nach 441) konstruiren.

446. Soll man ein Vierkant zeichnen, von dem gegeben sind drei Winkel A, B, C und zwei Seiten, so sind hier wieder, je nach Lage der beiden Seiten, vier Fälle zu unterscheiden; es sind nemlich die gegebenen Seiten

1) AB, BC;
2) AB, AD;
3) AD, DC;
4) AB, CD.

Was nun den ersten Fall betrifft, so nimmt man die Tafeln so an, dass die Kanten A und B in der $\mathfrak{T}_1$ liegen, und die $\mathfrak{T}_2 \perp B$ ist, dann kann man zunächst die Kanten A und B zeichnen; ferner mittelst der Winkel A und B die Ebene ($\mathfrak{A}$) der Seite AD und die Ebene ($\mathfrak{B}$) der Seite BC. Hierauf sucht man in $\mathfrak{B}$ die Kante C, welche mit der Kante B den Winkel B einschliesst. Endlich legt man durch C eine Ebene ($\mathfrak{C}$), die mit der Ebene BC den Winkel C bildet; der Schnitt der Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ ist dann die Kante D.

447. Aufg. Ein Vierkant zu zeichnen, von dem gegeben sind die Winkel A, B, C und die Seiten AB, AD.

Aufl. Nimmt man die Tafeln so an, dass $\mathfrak{T}_1$ die Seite BC (also diejenige unbekannte Seite, an der zwei gegebene Winkel anliegen) enthält, und zeichnet in ihr s und B, so kann man mittelst der Seite AB und des Winkels B die Kante A finden. Legt man nun durch A eine Ebene, die mit der Seite AB den Winkel A einschliesst, und sucht in dieser Ebene eine (durch s gehende) Gerade D, die mit A den Winkel AD bildet, so erhält man die Kante D. Schliesslich legt man noch durch D eine Ebene, die mit der in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Seite BC den $\wedge$ C bildet, so ist der Schnitt dieser Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$ die Kante C.

448. Aufg. Ein Vierkant zu zeichnen, von dem gegeben sind die Winkel D, A, B und die Seiten BC, CD.

Aufl. Nimmt man die Tafel so an, dass eine von den unbekannten Seiten, z. B. Seite AD, in $\mathfrak{T}_1$ liegt, und $\mathfrak{T}_2$ auf A (der Kante, nach der sich die nicht gegebenen Seiten schneiden) senkrecht steht, so kann man in derselben Art, wie oben (444) einen Kegel (mit der Spitze s der Axe s_1 und einem Winkel gleich dem von den Geraden s_1 und sc gebildeten) finden, auf welchem die Kante C liegen muss. Aber ganz in derselben Art findet sich (mit Hilfe des Winkels B und der Seite BC) ein zweiter Kegel mit der Spitze s, dessen Axe auf der Seite AB (die man als $\mathfrak{T}_4$ betrachten wolle) senkrecht steht. Der Schnitt dieser beiden Kegel ist die Kante C, aus welcher wir die Kanten D und B erhalten können.

449. Aufg. Ein Vierkant zu finden, von welchem gegeben sind die Winkel A, B, D und zwei Gegenseiten, z. B. AB und CD).

Aufl. Nimmt man die Tafeln so an, dass die $\mathfrak{T}_1$ die unbekannte Seite AD (an welcher zwei bekannte Winkel anliegen) enthält, und die $\mathfrak{T}_2$ auf A senkrecht steht, und zeichnen wir s und A, so können wir uns mit Hilfe von Winkel A und Seite AB die Kante B verschaffen und durch B eine Ebene ($\mathfrak{E}$) legen, die mit AB den Winkel B einschliesst; in dieser Ebene liegt die Kante C. Auf der anderen Seite können wir ganz in derselben Art, wie oben (444, Fig. 170) einen Kegel (mit der Spitze s, der Axe s_1 und dem Winkel gleich dem der Geraden s_1

und der Geraden sc) finden, in welchem C liegen muss. Der Schnitt dieses Kegels mit der 𝔈 ist dann die Kante C.

450. Aufg. Ein Vierkant zu zeichnen, von welchem gegeben sind vier Winkel (A, B, C, D) und eine Seite, z. B. AB. Fig. 171.

Aufl. Wir verfahren mit unserem Vierkant ähnlich wie mit dem Viereck ABCD (Fig. 171), an welchem wir das einzuhaltende Verfahren auseinander setzen wollen; wir verlängern nemlich die an die gegebene Seite AB anstossenden Seiten BC und AD, bis sie sich in E schneiden.

Sind nun (wie in Fig. a) alle Winkel kleiner als 180°, so bilden die Kanten CDE ein Dreikant, dessen Winkel E mittelst des Dreikants ABE (von welchem A, B und AB bekannt sind) gefunden wird, während die beiden anderen Winkel von CDE, nemlich die Winkel ECD und EDC, die Winkel C, D unseres Vierkants zu 180° ergänzen. Man kann demnach das Dreikant CDE, dessen Winkel bekannt sind, konstruiren, und daraus seine Seiten finden. Es lassen sich aber auch die Seiten AE und BE des Dreikants ABE konstruiren. Dadurch erhält man (wie aus Fig. a hervorgeht) BC = BE — CE und AD = AE — DE.

Ist aber (wie in Fig. b) der Winkel C grösser als 180°, und verfährt man wie vorhin, so stellt sich aus der Figur heraus, dass hier die Winkel E der Dreikante ABE und CDE nicht gleich sind, sondern sich zu 180° ergänzen, dass beide Dreikante gleiche Winkel D haben, während der Winkel ECD = C — 180° (wenn C den hohlen Winkel unseres Vierkants bedeutet). Endlich sieht man, dass hier AD = AE + CD und BC = BE — EC ist.

Mit Hilfe einer Figur, ähnlich der unsrigen (Fig. 171) können wir also erkennen, wie wir mittelst der beiden Dreikante (ABE und CDE) BC und AD finden. Haben wir ausser den schon bekannten Stücken A, B und AB noch BC und AD, so nehmen wir die Tafeln so an, dass AB in der $\mathfrak{T}_1$ liegt und die $\mathfrak{T}_2$ auf A (oder B) senkrecht steht, und suchen dann auf bekannte Art die Kanten des Vierkants.

§. 29.

Vielkante (körperliche Ecken).

451. Hat die körperliche Ecke mehr als vier Seiten, in welchem Falle wir sie als **Vielkant** bezeichnen wollen, so ist sie wieder bestimmt, wenn alle Stücke desselben bis auf drei gegeben sind. Demnach lassen sich in Bezug auf ein Vielkant folgende Aufgaben unterscheiden. Ein Vielkant zu konstruiren, von welchem gegeben sind alle Stücke (Seiten und Winkel) bis auf:

1) drei Winkel;
2) zwei Winkel und eine Seite;
3) zwei Seiten und ein Winkel;
4) drei Seiten.

Alle diese Aufgaben lassen sich nur dann lösen, wenn man folgende Aufgabe, die wir daher voranstellen, zu lösen im Stande ist.

Fig. 172. 452. Aufg. Ein Vielkant zu zeichnen, von welchem alle Stücke, bis auf eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Aufl. Wir wollen ein Fünfkant ABCDE als Beispiel nehmen, von welchem gegeben sind die Seiten AB, BC, CD, DE durch ihre Umklappungen (A_1B_1, B_1C_3, C_3D_4, D_4E_5, Fig. 172) und die Winkel $\beta = B$, $\gamma = C$, $\delta = D$ (diese Winkel sind in unserer Figur an den passenden Stellen eingezeichnet). Wir nehmen die Tafeln so an, dass die $\mathfrak{T}_1$ die Seite AB enthält, und die $\mathfrak{T}_2$ auf B senkrecht steht, und zeichnen das Netz des Vielkants, wie in unserer Figur, indem wir BC als $\mathfrak{T}_3$, CD als $\mathfrak{T}_4$, DE als $\mathfrak{T}_5$ ansehen. Nehmen wir nun auf E einen beliebigen Punkt e (dessen fünfter Riss e_5 ist) und suchen seine Risse, wenn die Seiten des Vielkants die verlangten Neigungen gegeneinander haben, so stellt sich zur Aufsuchung von e ein Verfahren heraus, das in unserer Zeichnung klar angedeutet ist (die einander gleichen Strecken, z. B. ee_4 und $ee_{4'}$, sind mit einer **gleichen** Anzahl von kleinen Querstrichen versehen, oder es ist ihre Gleichheit, z. B. bei d_4e_5 und d_4e, durch einen Kreisbogen angedeutet). Hat man e_2 und c_1 mittelst e_4 und e_3 aus e_5 gefunden, so ist damit die Gerade se oder E erhalten. In

gleicher Weise kann man d_2 und d_1 aus d_4 und damit D, in ähnlicher Art C erhalten, so dass man alle Kanten des Vielkants und damit dieses selbst bestimmt hat.

Anm. Man wird leicht einsehen, dass das angegebene Verfahren dasselbe bleibt, wie viele Seiten auch das Vielkant hat, und wie gross auch die Winkel desselben sind. Ferner bleibt das Verfahren dasselbe, auch wenn irgend zwei Seiten des Vielkants sich gegenseitig durchschneiden (wir nennen das Vielkant dann ähnlich wie beim Vieleck ABCD [Fig. 172. a)], in welchem die Seiten AB und CD sich durchschneiden, überschlagen). Sowie beim Vieleck ABCDE sich dessen Gestalt ergibt, wenn man die gegebenen Seiten und Winkel der richtigen Ordnung und Grösse nach aufträgt, und sich dabei von selbst ergibt, ob ein Ueberschlagen stattfindet oder nicht, ebenso verhält es sich mit dem Vielkant.

Nachdem wir nun die vorliegende Aufgabe zur Vorbereitung erledigt haben, wollen wir in den folgenden Nummern die oben angeführten Aufgaben über das Vielkant durchgehen, und stets zur Verdeutlichung des Ganzen der Auflösung ein Vieleck an die Stelle des Vielkants setzen, aber so, dass das erstere überall da einen hohlen Winkel oder eine Ueberschlagung hat, wo das Vielkant solche haben soll.

453. Aufg. Ein Vielkant zu zeichnen, von welchem alle Stücke bis auf drei Winkel gegeben sind. Fig. 173.

Aufl. Sind A, C, F (Fig. 173) die fehlenden Winkel, und denkt man sich die Kanten A und C, A und F, C und F durch Diagonalebenen verbunden, so wird dadurch das Vielkant in verschiedene Partialecken (hier in AFGH, ABC, CFED und ACF) zerlegt, von dem das letztere Eck stets ein dreiseitiges ist, dessen Seiten mit Hilfe der Aufgabe in voriger Nummer durch die übrigen Partialecken gefunden werden können. Bildet man nun das Dreikant ACF (mittelst seiner drei Seiten) und setzt die übrigen Partial-Vielkante entsprechend an, so erhält man das Gesuchte.

Anm. Ob man ein solches Partial-Vieleck, z. B. das AFGH in der in Fig. a oder in Fig. b angegebenen Art ansetzen muss, ergibt sich aus allem Gegebenen. Es muss nemlich so angesetzt werden, dass die Stücke des gefundenen Vielkants mit den

gegebenen übereinstimmen. Ist dies nur für eine Art des Ansetzens der Fall, so kann nur diese benützt werden; ist es für beide der Fall, so gelten beide (bei dieser Untersuchung kann stets das Vieleck benützt werden). In unserem Falle können offenbar beide Arten des Ansetzens angewendet werden, und zwar für jedes der anzusetzenden Partial-Vielkante, so dass unsere Aufgabe je nach der Anzahl sich ergebender Combinationen, viele Lösungen zulässt.

Fig. 174. 454. Aufg. Ein Vielkant zu zeichnen, von dem alle Stücke bis auf zwei Winkel und eine Seite gegeben sind.

Aufl. Es sei durch das Vieleck AB . . . H (Fig. 174) das Vielkant versinnlicht, und seien A, C die fehlenden Winkel, EF die fehlende Seite, so betrachte man die vier Kanten A, C, E, F, (welche theils die Kanten der fehlenden Winkel, theils die Kanten in der fehlenden Seite sind) als Kanten eines Vierkants (ACEF). Von diesem lassen sich (mittelst der Aufgabe in Nr. 452) die Seiten FA, AC und CE (und nebenbei die Winkel AFE und CEF) finden. Ferner sind die Winkel dieses Vierkants bei F und E, nemlich $\wedge$ AFE und CEF bekannt; denn es ist in unserer Figur (wo AF zwischen GF und FE liegt) $\wedge$ AFE = GFE — AFG (lägen, wie in Fig. 173 b, GF und FE auf einer Seite von AF, so wäre AFE = GFE + AFG) und CEF = FED — CED. Konstruirt man nun (nach 444) das Vierkant ACEF und setzt die anderen Partial-Vielkante richtig an, so hat man das Gesuchte.

Anm. Hier kann man wieder ABC oberhalb und unterhalb AC ansetzen; dagegen kann AFGH nur so, wie in unserer Zeichnung (Fig. 174) angesetzt werden, da GFE = AFE + AFG sein muss.

Fig. 175. 455. Aufg. Ein Vielkant zu zeichnen, von dem alle Stücke bis auf zwei Seiten und einen Winkel gegeben sind.

Aufl. Sind ED und GH (Fig. 175) die fehlenden Seiten und A der fehlende Winkel, so ziehe man von A die beiden Diagonalebenen AH und AD, die von dem zu suchenden Vielkante zwei Partial-Vielkante (AHJ, ABCD) abschneiden, aus denen sich (nach 452) AH und AD finden lassen. Ferner verlängere man die beiden unbekannten Seiten (DE, HG), bis sie sich (in K) schneiden, so erhält man ein Vierkant ADKH, von

welchem man finden kann die Seiten AH und AD (wie schon gesagt); ferner die Winkel bei D und H (in ähnlicher Art, wie in der vorigen Nummer); endlich den Winkel K mittelst des Dreikants GEK, (von welchem die Seite GE und die Winkel bei E und G gefunden werden können). Man hat also von dem Vierkant ADKH drei Winkel und zwei Seiten in der Art, wie in Nr. 448, und kann es nach dieser Nummer finden.

456. Aufg. Ein Vielkant zu konstruiren, von dem alle Stücke bis auf drei Seiten gegeben sind. Fig. 176.

Aufl. Es seien AB, DE, GH (Fig. 176) die fehlenden Seiten, so denke man sich diese verlängert, bis sie sich nach den Kanten M, N, O schneiden; dann erhalten wir ein Dreikant MNO, von welchem wir die drei Winkel M, N, O (und daraus die drei Seiten) finden können. Denn zieht man die Diagonalebene EG, so kann man diese aus dem Partial-Vielkant EFG finden, dadurch aber auch die Winkel des Dreikants EMG bei E und G; hat man aber von dem Dreikant EMG eine Seite und zwei anliegende Winkel, so findet man auch den Winkel M (und nebenbei auch die Seiten ME und MG). Hat man nun vom Dreikant MNO die drei Winkel und daraus die drei Seiten gefunden, so erhält man in unserer Zeichnung die gesuchte Seite $AB = NO - AN - BO$; in ähnlicher Art erhält man DE und GH.

Druck von Bieling (Dietz). — Nürnberg.

Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

Friedr. Aug. Klingenfeld,

ordentl. Professor der darstellenden Geometrie und der mechanischen Technologie an der k. polytechnischen Schule zu München.



Nürnberg,

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

1876.

Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

F. A. Klingenfeld.

Band III.

Mit vier Tafeln.

Nürnberg.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

1876.

Vorwort.

Nachdem die beiden ersten Bände dieses Lehrbuches neue Auflagen erforderten, die dem Bedürfnisse technischer Hochschulen entsprechende Erweiterungen erleiden mussten, und an diesen Schulen auch die Schattenkonstruktion und Perspektive gelehrt werden, war ich von vornherein darauf angewiesen, den beiden ersten Bänden dieses Buches einen dritten Band — die Gesetze der Schattenkonstruktion und Perspektive enthaltend — anzufügen, und bedarf also die Herausgabe dieses Bandes keiner besonderen Rechtfertigung.

Wenn auch in diesem Buche nichts wesentlich Neues auftritt, so wird der sachkundige Leser doch vieles eigenthümlich behandelt, manche Bezeichnung übersichtlich und praktisch finden, besonders aber sich überzeugen, dass ich bestrebt war, Alles hieher Gehörige in logischer Ordnung und klarer Auseinandersetzung auf möglichst kleinem Raume zu geben.

In der Parallelperspektive habe ich die Axonometrie keiner näheren Auseinandersetzung für nöthig gehalten, da ich nicht einsehen kann, wozu man den Schüler noch mit der Axonometrie plagen soll, nachdem wir an der Hand des Pohlke'schen Satzes uns in der Parallelperspektive vollkommen frei bewegen können, d. h. die Mafsstäbe für X', Y', Z' und die Winkel dieser drei Richtungen unabhängig von

einander annehmen können, während uns die Axonometrie die Hände bindet, indem wir aus jenen Mafsstäben die genannten Winkel, oder umgekehrt erst suchen müssen. Ausserdem ist es ja für den Techniker am Zweckmässigsten die isometrische Projektion oder die Kavalierperspektive anzuwenden, oder mindestens die drei Mafsstäbe gleich zu machen, und die Winkel beliebig so anzunehmen, dass das erhaltene Bild möglichst hübsch ausfällt.

Als ich die Bearbeitung des ersten Bandes dieses Lehrbuches begann, nahm ich mir vor, in dem vorliegenden dritten Bande ein Verzeichniss der die darstellende Geometrie betreffenden Literatur zu geben. Dies ist aber gegenwärtig überflüssig geworden, nachdem Herr Fiedler in seinem vortrefflichen Werke über darstellende Geometrie, das seitdem erschienen, ein solches Literatur-Verzeichniss in höchster Ausführlichkeit gegeben hat.

Indem ich noch der Verlagshandlung für die hübsche Ausstattung dieses Bandes meine Anerkennung ausspreche; übergebe ich auch diesen letzten Band meinen Schülern als Leitfaden und meinen Fachgenossen zu wohlwollender Beurtheilung.

München, Juli 1875.

Der Verfasser.

Inhalt.

Sechster Abschnitt.

Schattenkonstruktion.

§ 30. Streifschattengrenzen.

§ 31. Schlagschatten.

§ 32. Schattenstriche.

§ 33. Höchstes Licht und Isophoten.

§ 34. Ausführung der Schattirung.

§ 35. Ausgeführte Schattenkonstruktionen.

Siebenter Abschnitt.

Parallelperspektive.

§ 36. Allgemeine Erklärungen darüber.

§ 37. Arten von Parallelperspektiven.

§ 38. Parallelperspektivische Aufgaben.

§ 39. Schattenkonstruktion an Parallelperspektiven.

Achter Abschnitt.

Centralperspektive.

§ 40. Allgemeine Erklärungen.

§ 41. Aufsuchung von Centralperspectiven.

§ 42. Aufgaben.

§ 43. Ueber praktische Aufgaben aus der Perspektive.

Darstellende Geometrie.

Sechster Abschnitt.

Schattenkonstruktion.

§ 30.

Streifschattengrenzen.

457. Die praktisch vorkommenden Körper sind meistens von mehreren Flächen begrenzt, die sich gegenseitig nach Linien (Kanten) schneiden. Wie wir von früher her wissen, haben wir zur graphischen Bestimmung eines solchen Körpers zu zeichnen:

1) Die Risse aller Körperkanten;
2) Die ersten und zweiten Umrisse *) aller den Körper begrenzenden Flächen.

Wenn wir nun, wie dies früher geschehen ist, die Linien des Körpers mit Buchstaben bezeichnen, und von den einzelnen Grenzflächen des Körpers die Namen nennen, und ihre Beziehungen zu den gezeichneten Linien angeben, so sind dadurch gewöhnlich die Gestalten dieser Flächen und damit die ganze Gestalt des Körpers bestimmt. Wie wir aber schon wissen, werden in der Praxis die einzelnen Linien eines Körpers nicht mit Buchstaben versehen; ausserdem werden gewöhnlich die Namen der gegebenen Flächen auch nicht angegeben. Somit

*) Wir wollen hier nochmals erklären, was wir unter einem Flächenumriss verstehen.

Denken wir uns an eine Fläche (𝔄) einen berührenden Cylinder (𝔅) gelegt, dessen Erzeugenden senkrecht zur ersten Tafel ($\mathfrak{T}_1$) stehen, so nennen wir die Berührungslinie von 𝔄 und 𝔅 das erste Profil von 𝔄, und den Schnitt von 𝔅 mit $\mathfrak{T}_1$, den ersten Umriss von 𝔄.

geht die Gestalt des Körpers, trotz der richtig ausgeführten Zeichnung desselben, aus dieser nicht klar hervor, und sind wir darauf angewiesen, durch weitere Mittel jene Gestalt genauer zu bestimmen. Ein solches Mittel bietet uns die Schattenkonstruktion.

458. Betrachten wir nemlich den graphisch dargestellten Körper als undurchsichtig, und von einem leuchtenden Körper aus, der nach allen Richtungen hin, Stralen aussendet, beleuchtet, und unterscheiden wir in der Zeichnung durch ein passendes Mittel die beleuchteten Theile der Körperoberfläche von den beschatteten, d. h. die Theile zu denen das Licht gelangen kann, von denen, zu welchen das Licht keinen Zutritt findet, so lässt sich aus dieser Lichtvertheilung auf die Gestalt der Oberfläche schliessen. Es kann dann kommen, dass diese Schattenkonstruktion, im Verein mit den gezeichneten Rissen der Körperkanten und mit den Umrissen, die Gestalt des Körpers vollkommen bestimmen. Desshalb ist zu empfehlen, wie dies in der That in der Praxis immer mehr geschieht, die Schattenkonstruktion in den technischen Zeichnungen zu verwenden.

459. Um die Schattenkonstruktionen möglichst zu vereinfachen, setzen wir in den technischen Zeichnungen einen leuchtenden Körper voraus, wie ihn uns die Natur in der Sonne oder dem Monde darbietet, einen leuchtenden Körper also, der von unseren dargestellten Körpern so weit entfernt ist, dass wir alle leuchtenden Stralen als parallel ansehen können. Demnach haben wir zur Bestimmung der Lichtstralen nur ihre Richtung zu geben, d. h. eine Gerade, mit der alle Stralen parallel laufen. Bezüglich dieser Stralen-Richtung aber hat man für technische Zeichnungen ein Uebereinkommen getroffen, dem auch wir uns anschliessen wollen. Wir nehmen daher diese Richtung in folgender Art an.

Denkt man sich zwischen den beiden positiven Tafeln ($\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$) einen Würfel so aufgestellt, dass zwei seiner Flächen mit der $\mathfrak{T}_1$ und zwei derselben mit der $\mathfrak{T}_2$ parallel laufen, und nennt man die Würfelecke, welche links liegt und von den beiden Tafeln am weitesten entfernt ist, a, dagegen die Ecke rechts, welche den beiden Tafeln am nächsten liegt, b, so gibt uns die körperliche Würfel-Diagonale ab, und zwar in

der Richtung von a nach b die gewöhnliche Richtung der Lichtstralen an.

460. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Lichtstralen, die wir bei der Schattenkonstruktion gewöhnlich anwenden, parallel sind zu einer Geraden ab, deren Risse so liegen, wie in unserer Zeichnung (Fig. 177), und demnach beide mit der Kante 𝔎 (dem Schnitte beider Tafeln) Winkel von 45⁰ einschliessen. Die den Rissen beigefügten Pfeile deuten an, dass die Richtung des Strales von a gegen b hin zu nehmen ist. Fig. 177.

461. Obgleich wir unsere Lichtstrahlen gewöhnlich parallel voraussetzen, so wollen wir doch, der Allgemeinheit wegen, bei den nächstfolgenden Betrachtungen voraussetzen, dass die Stralen von einem (in endlicher Ferne liegenden) leuchtenden Punkte ausgehen. Fig. 178.

Denken wir uns nun einen leuchtenden Punkt a und einen Körper und legen wir durch a eine Ebene, die den Körper nach der geschlossenen Figur A (Fig. 178) schneidet (hier wie in der Folge soll durch die schräge Schraffirung angedeutet werden, dass auf der Seite der Linie A, auf welcher die Schraffirung liegt, die Materie des Körpers sich befindet, wie dies ja bei Durchschnittszeichnungen üblich ist). Nehmen wir zunächst an, diese Figur sei so beschaffen, dass die sie einschliessende Linie A von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten wird und zeichnen eine Gerade B, welche A in den Punkten b, c schneidet, so wird ein in B liegender Lichtstral in b von der Materie des Körpers absorbirt, und daher nach c nicht mehr gelangen können. Ist also, wie wir voraussetzen, ausser dem Punkte a keine Lichtquelle vorhanden, so kann nach c gar kein Licht gelangen, und wird c daher im Schatten liegen, während der Punkt b, wo der Lichtstral B den Körper trifft beleuchtet ist. Denkt man sich nun von a aus nach A alle möglichen Stralen gezogen, so wird man sich leicht überzeugen, dass hier die beiden Stralen C und D, von denen jeder mit der Figur A einen einzigen Punkt gemein hat, ohne in die Materie des Körpers einzudringen, in unserer Ebene die äussersten Stralen sind, welche die Figur A noch treffen, und dass die Punkte d und e, in welcher A von C und D getroffen wird, die Grenzen bilden zwischen dem beleuchteten und beschat-

teten Theil der Linie A. In der That wird jeder Punkt von A der zwischen d und e auf der Seite von b sich befindet, Licht empfangen, während die auf der Seite von c liegenden Punkte von keinem Lichtstrale getroffen werden könnten. Wir nennen daher c und d Schattengrenzen (auf der Linie A). Würde man durch a andere den Körper schneidende Ebenen legen, so erhielte man andere Punkte als Schattengrenzen; und man sieht, dass alle diese Punkte, die man von sämmtlichen durch a möglichen und den Körper schneidenden Ebenen erhält, eine Linie bilden, die an der Grenze des Schattens und Lichtes liegt, und die wir daher die Schattengrenze des Körpers nennen.

Fig. 178. 462. Wir wollen von einem Strale, der wie C (oder D) einen Punkt d mit A gemein hat, aber so, dass die auf A zu beiden Seiten des Punktes d liegenden Nachbarpunkte von d auf einer Seite von C liegen, sagen, er streift den Körper. Wir nennen daher die Schattengrenzen, in denen die Lichtstralen den Körper streifen, die Streifschattengrenzen, (sie heissen auch Selbstschattengrenzen).

Wie man in unserer Zeichnung (Fig. 178) sieht, kann der streifende Stral, entweder, wie C, in dem gestreiften Punkte den Körper berühren, oder, wie D, durch einen Eckpunkt der Figur A gehen. Demnach besteht eine Linie einer Fläche, welche die Streifschattengrenze vorstellt, entweder aus lauter Punkten, in denen Lichtstralen berühren und ist also die Berührungslinie eines Kegels, der seine Spitze in a hat und den wir einen berührenden Stralenkegel (der natürlich, wenn a in unendlicher Ferne liegt, in einen Cylinder übergeht) nennen wollen; oder diese Grenze besteht aus lauter Punkten wie e, und sie ist demnach eine Kante des Körpers, d. h. eine Linie, in welcher sich zwei Flächen des Körpers schneiden (ausnahmsweise könnten auch diese Linie ein Grat, Rückkehrkante sein). Endlich kann die Schattengrenze auch zum Theile aus Punkten wie d, zum Theile aus solchen wie e bestehen, also zum Theile die Berührungslinie eines Stralenkegels, zum Theile eine Körperkante sein. Wir wollen nun festsetzen, dass wir jede Streifschattengrenze so weit sie Berührungslinie eines berührenden Kegels (oder Cylinders) ist, **Schattenlinie**, und

so weit sie eine Kante (oder ein Grat) des Körpers ist, Schattenkante nennen, und erfahren demnach Folgendes:

Es gibt zweierlei Streifschattengrenzen, nemlich **Schattenlinien** und **Schattenkanten.**

463. Die Schnittfigur in den beiden vorigen Nummern war so beschaffen, dass jede Tangente in einem Punkte der Linie A in der Nachbarschaft des Berührungspunktes ausserhalb der Materie des Körpers liegt. Es kann aber auch sein, dass die Schnittfigur A (wie in Figur 179) von einer Geraden in vier (oder mehr) Punkten geschnitten werden kann. In einer solchen Linie A gibt es dann Strecken, deren Punkte so beschaffen sind, dass eine Tangente an einem solchem Punkte, z. B. die Tangente D, rechts und links vom Berührungspunkte d, in der Nachbarschaft dieses Punktes, in der Materie des Körpers steckt. Innerhalb einer solchen Strecke der Linie A nennen wir die Figur konkav, während wir diejenige Strecke, für welche die Tangenten ihrer Punkte in der nächsten Nähe des Berührungspunktes ausserhalb der Materie liegt, konvex nennen. Fig. 179.

Zieht man nun vom leuchtenden Punkte a aus alle Streifstralen an A, so werden darunter solche Stralen sein, die an einer konkaven Stelle streifen, wie der Stral D im Punkte d. Dann kann aber der Stral nicht zum Punkte d gelangen, da er schon in dem Punkte f, wo er in die Materie eintreten will, absorbirt worden ist. Ein solcher Streifpunkt, wie d, liegt daher im Schatten, und ist daher keine wirkliche Schattengrenze. Wir wollen aber hier fest setzen, dass wir einen solchen Streifpunkt, zu welchen weil er an einer konkaven Stelle liegt, ein Lichtstral nicht gelangen kann, und der also keine eigentliche Schattengrenze ist, eine virtuele Schattengrenze nennen. Im Gegensatz dazu nennen wir alle wirklichen Schattengrenzen, reele Schattengrenzen.

Es ist demnach klar, dass wir nur die reelen Schattengrenzen, und nicht die virtuelen zu zeichnen brauchen. Weil wir aber den Körper, den wir mit Schatten versehen wollen, als undurchsichtig betrachten, so werden wir in seinem ersten (oder zweiten) Risse alle diejenigen Schattengrenzen weglassen, die in Bezug auf die erste (oder zweite) Tafel

unsichtbar sind, und die wir virtuel in Bezug auf die erste (oder zweite) Tafel nennen können.

464. Wollen wir nun einen Körper mit Schatten versehen, so müssen wir vor Allem seine Schattengrenzen angeben. Da aber zuvor der Körper vollständig gezeichnet sein muss, und demnach auch alle seine Kanten dargestellt sein müssen, so sind auch seine Schattenkanten schon gezeichnet, und haben wir nur zu untersuchen, welche der gezeichneten Kanten Schattenkanten sind. Was aber seine Schattenlinien anlangt, so sind diese, da sie zur Bestimmung des Körpers nicht gehören, zunächst nicht gezeichnet, sondern müssen erst, wenn man den Körper zu schattiren beabsichtigt, dargestellt werden. Wie dies aber geschieht, das geht aus dem oben Gesagten hervor. Denn wir haben oben gesehen, dass eine Schattenlinie die Berührungslinie einer Stralenfläche ist.

Setzen wir daher, wie schon oben gesagt, voraus, dass alle Stralen parallel laufen so finden wir:

1) die Schattenlinie auf einer entwickelbaren Fläche, wenn wir die Berührungserzeugenden aller mit dem Lichtstrale parallelen Berührungsebenen der Fläche aufsuchen. Es sind demnach die Schattenlinien von entwickelbaren Flächen (Cylinder, Kegel, Gratflächen) gerade Linien;

2) die Schattenlinie einer nicht entwickelbaren Fläche, wenn wir parallel zum Lichtstral an die Fläche einen berührenden Cylinder legen; die Berührungslinie dieses Cylinders, welche in der Regel eine Curve ist, stellt die Schattenlinie vor.

Sucht man für alle Begrenzungsflächen des Körpers auf die angegebene Art die Schattenlinien auf (die Art dieser Aufsuchung ist in § 23 des Band II. angegeben) so hat man alle möglichen Schattenlinien, von denen noch zu untersuchen wäre, welche von ihnen virtuel und daher unbrauchbar sind; von diesen wird man natürlich diejenigen gar nicht konstruiren, von denen man voraus weiss, dass sie zu den virtuelen gehören.

Fig. 180. 465. Hat man so alle Schattenlinien gefunden, nachdem schon voraus alle Körperkanten gezeichnet waren, so ist man im Besitze aller Linien des Körpers, auf denen die Streifschat-

tengrenzen liegen können, und ist nun zunächst die Frage zu beantworten, welche Körperkanten Schattenkanten sind?

Haben wir nun eine Körperkante und fragen wir, ob sie Schattenkante ist, oder nicht, so müssen wir uns sagen, dass sie ja auch möglicherweise zum Theile Schattenkante sein könnte, und zum Theile nicht. In diesem Falle aber muss es darauf Punkte geben, welche an den Grenzen beider Theile liegen. Sehen wir zu, wie wir diese Grenzpunkte einer Schattenkante finden.

Es sei die zu untersuchende Kante K der Schnitt zweier Flächen 𝔄, 𝔅 des Körpers und denken wir uns wieder eine Ebene angenommen, welche die Flächen 𝔄, 𝔅 des Körpers nach einer Linie AB (Fig. 180) schneidet, die in a ein (der zu untersuchenden Körperkante K angehöriges) Eck hat. Ist nun der in dieser Ebene liegende durch a gehende Lichtstral die Gerade C, so ist a ein Punkt der Schattenkante, da die Figur AB von C gestreift wird. Liegt aber für einen anderen Punkt der Kante der Lichtstral so wie D, der also nicht streift, so muss, wenn man vom ersten zum zweiten Punkte übergeht die verlangte Grenzstelle kommen, und für diese der Lichtstral so liegen, dass er die Linie A oder B im Punkte a berührt. Dann berührt aber auch dieser Grenzstral die Fläche 𝔄 oder 𝔅, und sein Berührungspunkt gehört der Linie an, in welcher alle 𝔄 (oder 𝔅) berührenden Stralen ihre Berührungspunkte haben, d. h. der Schattenlinie von 𝔄 (oder 𝔅). Man sieht also:

> Wenn eine Kante K (nach welcher sich zwei Flächen 𝔄, 𝔅 eines Körpers schneiden) zum Theile Schattenkante ist, so liegen die Grenzpunkte der Schattenkante da, wo K von den Schattenlinien auf den Flächen 𝔄, 𝔅 getroffen wird.

Wird demnach die K von den genannten Schattenlinien nicht getroffen, so gibt es auf ihr keine Grenzpunkte, woraus folgt, dass dann die ganze Kante K entweder Schattenlinie ist oder nicht. Wie man darüber entscheidet, wird die nächste Nummer lehren.

466. Will man bezüglich einer Kante K entscheiden, ob sie zwischen den gefundenen Grenzpunkten, (oder wenn sich solche nicht gefunden haben, ob sie ganz und gar) Schatten-

kante ist oder nicht, so darf man nur innerhalb der Grenzen (im letzteren Falle irgendwo auf ihr) einen Punkt a annehmen, und von diesem untersuchen, ob der Lichtstral an ihm streift oder nicht. Zu dem Ende legt man durch a (Fig. 180) einen Stral und durch diesen eine beliebige Ebene (am Besten eine Lothebene), sucht den Schnitt (AB) dieser Ebene mit dem Körper, nnd sieht zu ob der Lichtstrahl streift oder nicht (d. h. ob der Stral gegen AB wie C oder D liegt). Dabei braucht man von jeder der Linien A und B nur einen Punkt suchen, der dem a sehr nahe liegt, um die Untersuchung zu beenden. In den meistens vorkommenden praktischen Fällen aber können wir ohne eine solche Konstruktion zum Ziele kommen, wenn wir uns nur den Körper und den Lichtstral im Raume vorstellen, und dann (durch Anschauung) sehen, ob der Lichtstral an dem Punkte streift oder nicht, wie das später an Beispielen deutlich hervortreten wird.

Fig. 181. 467. Wir haben bisher die Wege angegeben, die man zu gehen hat, um sämmtliche Streifschattengrenzen (Schattenlinien und Schattenkanten) auszumitteln. Da aber von diesen nur diejenigen Geltung haben, welche reel sind, so ist noch anzugeben, wie man herausfindet, ob eine gefundene Streifschattengrenze reel oder virtuel ist, möglicherweise auch, ob sie theilweise reel ist, und wo die Grenzpunkte des reelen Theiles liegen. Allein darüber können und werden wir erst später Aufschluss geben. Sobald aber noch dieser Aufschluss gegeben ist, entsteht noch die Frage, auf welcher Seite der reelen Schattengrenze Schatten und auf welcher Licht ist. Hierüber aber bekommen wir vollständig Aufschluss, wenn wir auf einer der beiden Flächen, die sich nach der betrachteten Kante schneiden, einen Punkt a annehmen, und untersuchen ob dieser im Schatten oder Licht liegt. Darüber gibt uns aber meistens wieder die Anschauung Aufschluss; wenn nicht, so verfahren wir ähnlich wie in voriger Nummer. Wir legen nemlich durch den Punkt einen Stral und durch den Stral eine Ebene (am Besten wieder eine Lothebene), suchen in der Nähe des Punktes a den Schnitt der Ebene mit dem Körper und geben an, auf welcher Seite des Schnittes die Materie liegt. Je nachdem dann der Lichtstral (wie in Fig. 181 a) den Punkt a trifft ehe er in

die Materie eindringt, oder (wie in Fig. 181 b) nachdem er schon in die Materie eingedrungen war, ist der Punkt beleuchtet oder beschattet.

§ 31.

Schlagschatten.

468. Ist die Figur A, nach welcher der Körper von einer durch einen Stral B gelegten Ebene geschnitten wird, theilweise konkav (wie in Fig. 182), so kann es sein, dass der Stral B, welcher die Figur A in einem Punkte b streift, dieselbe noch in einem Punkte b′ trifft, an welchem der Stral absorbirt wird. Man wird sich dann leicht überzeugen, dass dieser Punkt b′ ebenfalls eine Schattengrenze ist. Denn nimmt man auf A in der Nachbarschaft von b′, oberhalb und unterhalb b′, einen Punkt an, so wird zum oberen ein Lichtstral gelangen können, zum unteren aber nicht (da der dem unteren Punkte entsprechende Stral schon in der Nähe von b absorbirt wird.) Die Erscheinung bliebe offenbar dieselbe, wenn wir zwei Körper hätten, und der Stral, der an dem einen in einem Punkte b streifte, den anderen in einem Punkt b′ träfe; auch hier würde b′ eine Schattengrenze vorstellen. Wir sehen demnach: Fig. 182.

Wenn ein Lichtstral, der einen Körper in b **streift**, denselben (oder einen anderen) Körper in einem Punkte b′ trifft, so ist b′ eine Schattengrenze. Man nennt eine solche Schattengrenze, so wie eine Linie einer Fläche, welche lauter solche Schattengrenzen enthält, **Schlagschattengrenze**.

469. Aus dem eben Gesagten geht hervor, dass man, um die Schlagschattengrenze auf einer Fläche 𝔄 zu erhalten, alle Streifstralen, annehmen muss, und dass der Schnitt, der (von sämmtlichen Streifstralen gebildeten) Stralenfläche mit der Fläche 𝔄 die auf ihr gesuchte Schlagschattengrenze ist.

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass wir die Aufgabe eine Schlagschattengrenze zu suchen, bereits lösen können; denn sie geht darauf hinaus den Schnitt zweier Flächen zu construiren — eine Aufgabe, die in § 20 abgehandelt ist.

469. Wollen wir nun den Schlagschatten eines Körpers auf der Oberfläche des Körpers selbst haben, so müssen wir

zunächst alle Streifschattengrenzen (Schattenlinien und Schattenkanten) mit Hilfe der oben angegebenen Mittel konstruiren, und dann von jeder solchen Schattengrenze den Schlagschatten auf dem Körper suchen. Zu dem Ende legen wir durch alle Punkte einer solchen Streifschattengrenze Stralen, wodurch wir eine streifende Stralenfläche erhalten, (welche für den Fall, dass die Schattengrenze eine Schattenlinie ist, eine berührende Stralenfläche wird). Diese Stralenfläche ist eine Ebene, wenn die Streifschattengrenze eine Gerade ist. In diesem Falle sucht man (nach § 20) den Schnitt der Stralenebene mit der Oberfläche des Körpers (wobei man natürlich auch, da die Gerade begrenzt ist, die Schnitte der durch ihre Endpunkte gehenden Stralen mit der Oberfläche zu suchen hat) und erhält die verlangte Schlagschattengrenze. Ist aber die Streifschattengrenze eine Curve, so ist die Stralenfläche in der Regel ein Cylinder, und hat man daher den Schnitt dieses Cylinders mit der Körperoberfläche (wieder nach § 20) aufzusuchen. Hiebei wird man in den gewöhnlich vorkommenden Fällen, wie man sich später überzeugen wird, sehr häufig von vornherein durch Anschauung entscheiden können, ob die fragliche Streifschattengrenze einen Schlagschatten auf den Körper wirft oder nicht.

470. Hat man nach den bis jetzt gegebenen Anleitungen für einen Körper alle Schattengrenzen (Streif- und Schlagschattengrenzen) konstruirt und zugleich ausgemittelt, auf welcher Seite einer jeden Schattengrenze Licht und auf welcher Schatten ist, so wird man dadurch, dass man alle beschatteten Stellen schraffirt oder mit einer schwachen Tuschlage bedeckt, den Gesammtschatten auf dem Körper erhalten. Hiedurch erfährt man aber auch zugleich, welche von den gefundenen Schattengrenzen reel, und welche virtuel sind. Denn da jede Schattengrenze die Grenze des Schattens und Lichtes ist, so wird jede Linie, so weit sie im Schatten liegt, d. h. so weit auf beiden Seiten derselben Schatten ist, keine wirkliche (reele) Schattengrenze sein und also entfernt werden müssen. Man sieht also:

Hat man von einem Körper den Gesammtschatten konstruirt, so ist nur der Umfang der Schattenfigur

die Schattengrenze. Ebenso ist in jedem Risse des Körpers nun der Umfang des Risses des Schattens als Schattengrenze des Risses anzusehen.

471. Aus dem bisher über Schattenkonstruktion Gesagten geht hervor, dass wir, um den ganzen Schatten eines durch Zeichnung dargestellten Körpers (von dem also alle Kanten und alle Umrisse gezeichnet sind) zu erhalten, in folgender Ordnung vorzugehen haben:

1) Man sucht für jede Begrenzungsfläche des Körpers die Schattenlinie, indem man, wenn sie entwickelbar ist, die Berührungserzeugenden von mit dem Lichtstral parallelen Tangentialebenen, wenn sie nicht entwickelbar ist, die Berührungslinie eines die Fläche berührenden Stralencylinders (nach § 23) aufsucht;
2) man sucht für jede Kante des Körpers wie weit sie Schattenkante ist;
3) man legt durch jede Streifschattengrenze eine Stralenfläche, und sucht deren Schnitt mit der Oberfläche des Körpers;
4) man sucht, auf welcher Seite der gefundenen Schattengrenze Licht und auf welcher Seite Schatten ist.

Anm. Bei der Ausführung dieser Operationen werden wir alle diejenigen Schattengrenzen gar nicht aufsuchen, von denen wir durch Anschauung von vorn herein sehen, dass sie virtuel sind, oder gar nicht gefunden werden können. So werden wir alle Schattenlinien, die an konkaven (s. 463) Stellen des Körpers liegen, weglassen. Ebenso werden wir bei der Aufsuchung des Schlagschattens, den der Körper auf sich selbst wirft, durch Anschauung zu ermitteln suchen, welche Streifschattengrenzen auf den Körper Schlagschatten werfen, und welche nicht; von den letzteren suchen wir dann den Schlagschatten gar nicht auf.

472. Um das bisher Gesagte verständlicher zu machen wollen wir ein Beispiel ausführen. Fig. 183.

Aufg. Eine runde Säule mit runder Deckplatte ist gegeben (in möglichst einfacher Stellung gegen die Tafeln); man soll die Schatten auf diesem Körper konstruiren.

Aufl. Die runde Säule ist (ebenso, wie die Deckplatte) ein Kreiscylinder, von zwei zu seiner Axe senkrechten Ebenen abgeschnitten; beide (Säule und Deckplatte) haben daher zwei

Kreislinien als Kanten, und wenn wir voraussetzen, dass unsere beiden Cylinder eine gemeinschaftliche Axe haben, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so sind die ersten Risse unserer beiden Cylinder zwei konzentrische Kreise A_1, C_1, und ist A_1 zugleich der erste Riss der beiden Grenzkreise (A, B) der Säule (die zweiten Risse dieser Kreise sind in unserer Zeichnung mit A_2, B_2 bezeichnet), so wie C_1 der erste Riss der beiden Kreise (C, D) der Deckelplatte ist. Im zweiten Riss (aus welchem man sich vorläufig die Linien a_2 b_2, c_2 d_2, h_2 k_2, sowie die Schraffirungen hinweg denken wolle) sind, ausser den zweiten Rissen der Kreise A, B, C, D, noch die Umrisse der beiden Cylinder gezeichnet.

Zur Ausführung der Schattenkonstruktion haben wir nun zunächst die Schattenlinien zu zeichnen. Diese sind aber (wenn wir dem Lichtstral die in Nr. 460 angegebene Richtung S geben, und die Schattenlinie nach den oben (464) angegebenen Regeln aufsuchen) die Geraden, deren zweite Risse a_2 b_2 und c_2 d_2 sind (die anderen beiden Geraden sind in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ unsichtbar und daher weggelassen). Stellen wir uns hier unseren Körper auf der $\mathfrak{T}_1$ stehend vor, und denken wir uns zugleich den Lichtstral im Raume so gerichtet wie oben (460) angegeben, so werden wir sofort durch Anschauung erkennen, dass rechts von den Schattenlinien Schatten ist (desshalb haben wir rechts von a_2 b_2 und c_2 d_2 schraffirt).

Suchen wir nun die Schattenkanten, so sehen wir, dass alle unsere Kanten (A, B, C, D), weil sie von den Schattenlinien geschnitten werden (s. 465) theilweise Schattenkanten sind, und dass die Grenzpunkte diejenigen sind, deren erste Risse mit den ersten Rissen (a_1, c_1, e_1, f_1) der Schattenlinien zusammenfallen. Welcher Theil einer der Kanten aber Schattenkante ist, lässt sich hier sehr leicht durch Anschauung ermitteln, wie dies für die Kante A hier gezeigt werden soll. Man wird nemlich leicht erkennen, dass der (in der $\mathfrak{T}_1$ liegende) Bogen a g e an der Grenze des Schattens und Lichtes liegt, also Schattenkante ist; denn die Linie A ist ja der Schnitt des Cylinders A_1 und der Ebene A_2, und letztere ist (wie aus der Anschauung hervorgeht) im Schatten, während der Theil $a_1 g_1 e_1$ des Cylinders A_1 beleuchtet ist. In derselben Art wird man die andern Schattenkanten finden.

Will man nun den Schlagschatten aufsuchen, den unser Körper auf sich selbst wirft, so wird man durch Anschauung erkennen, dass nur die Kreislinie C einen Schatten auf unseren Körper wirft, während die von den anderen Streifschattengrenzen ausgehenden Lichtstralen die Oberfläche unseres Körpers nicht treffen. Namentlich wird man sehen, dass für die Kreislinie B der Körper konkav ist, und daher die Schattenkante auf B virtuel ist (s. 471).

Soll nun der von C auf unseren Körper geworfene Schlagschatten konstruirt werden, so müssen wir uns (nach 469) durch C einen Stralencylinder gelegt denken und dessen Schnitt mit dem Cylinder A_1 suchen. Wie das im Allgemeinen geschieht und wie man also den Schlagschatten h_2 k_2 findet, ist aus Früherem (§ 20) bekannt; durch Anschauung werden wir erkennen, dass auf der oberen Seite von h_2 k_2 Schatten ist. Da sich nun aber herausstellt, dass k_2 b_2 im Schatten liegt, so ist dieses Stück Schattenlinie virtuel und muss daher weggelassen werden.

Anm. Hieraus geht hervor, dass man gut thut von der Curve, welche als Schlagschattengrenze erscheint, den Punkt k, in welchem diese die Schattenlinie trifft, aufzusuchen. Ferner wird man, wie früher, den Punkt (h_2) auf dem zweiten Umriss sich verschaffen und endlich sucht man auch gerne den höchsten Punkt g, der hier durch den Stral S gefunden wird, welcher die Axe unserer Cylinder schneidet.

473. Soll man den Schlagschatten, den ein Körper auf die Fläche eines anderen, z. B. auf $\mathfrak{T}_1$ wirft, suchen, so bestimme man zuerst, wie in voriger Nummer, sämmtliche Schattengrenzen auf dem Körper selbst, wodurch man zugleich alle reelen Streifschattengrenzen erhält. Nun ist aber der Schlagschatten, den ein Körper auf eine Fläche wirft, begrenzt von dem Schlagschatten seiner reelen Streifschattengrenzen. Man dürfte also nur von jeder Streifschattengrenze den Schlagschatten auf die $\mathfrak{T}_1$ (nach Anleitung der Nr. 469) aufsuchen. Um aber die Sache erschöpfend zu behandeln ist noch nöthig zu bemerken, dass jede Streifschattengrenze, soweit ihr Schlagschatten auf den Körper selbst fällt, in der Regel keine Schlagschattengrenze auf der $\mathfrak{T}_1$ liefert. Denn der

Schlagschatten dieser Linie auf die $\mathfrak{T}_1$ fällt offenbar, weil sie auf dem Körper liegt, in den Schlagschatten des Körpers auf $\mathfrak{T}_1$ und bildet nur dann eine Schattengrenze, wenn sie zugleich Streifschattengrenze des Körpers ist, was aber in der Regel nicht der Fall ist. Man sieht also:

Die Schlagschattengrenze eines Körpers auf die $\mathfrak{T}_1$ (oder auf eine andere Fläche) wird gebildet von allen Schlagschatten der reelen Streifschattengrenzen auf die $\mathfrak{T}_1$ (oder eine andere Fläche) so weit dieselben nicht schon ihren Schlagschatten auf den Körper selbst geworfen haben.

474. Wie aus dem oben gesagten hervorgeht, fällt der Schlagschatten, den eine Streifschattengrenze, die schon Schlagschatten auf den Körper geworfen hat, auf die $\mathfrak{T}_1$ wirft, in der Regel in den Schlagschatten des Körpers, ebenso wie der Schlagschatten, den eine virtuele Streifschattengrenze wirft. Würde man also von allen Streifschattengrenzen (reelen und virtuelen) des Körpers, auch so weit sie schon Schlagschatten auf den Körper selbst geworfen haben, die Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_1$ aufsuchen, und die ganze Schattenfigur auf $\mathfrak{T}_1$ schraffiren, so würde man doch ein richtiges Resultat erhalten, indem für alle virtuelen Schattengrenzen der Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_1$ in die Schattenfigur fielen und weggelassen würden. Man sieht also, dass

1) das Streben nur reele Schattengrenzen, soweit sie noch keinen Schlagschatten auf den Körper selbst geworfen haben, zur Aufsuchung des Schlagschattens auf $\mathfrak{T}_1$ zu benützen, nur dazu dient, um unnöthige Zeichnungsoperationen zu vermeiden;

2) dass durch den Schlagschatten auf die $\mathfrak{T}_1$ ein Mittel geboten ist, alle reelen Streifschattengrenzen zu erhalten, und alle viertuelen, so wie alle Kanten, die nicht Schattenkanten sind, auszumitteln, und zwar dadurch, dass nur die Schlagschatten der reelen Streifschattengrenzen auf $\mathfrak{T}_1$ den Umfang der Schattenfigur bilden, während von allen anderen Linien des Körpers die Schlagschatten in die Schattenfigur fallen. Ein Beispiel hierüber gibt folgende Aufgabe.

475. Aufg. Es ist gegeben ein Polyeder, z. B. der Körper abcd; man soll seine Streifschattengrenzen, und seinen Schlagschatten auf die $\mathfrak{T}_1$ suchen. Fig. 184.

Aufl. Da unser Körper nur von Ebenen begrenzt ist und demnach keine Schattenlinien auf ihm vorkommen, also auch keine Körperkante von einer Schattenlinie getroffen wird, so gibt es auf den Kanten keine solchen Grenzpunkte, wie sie oben (465) genannt sind, sondern es ist jede Kante entweder ganz Schattenkante, oder sie ist es ganz und gar nicht. Um dies nun für irgend eine Kante zu ermitteln, müssten wir entweder die Anschauung zu Hilfe nehmen, was aber hier bei der allgemeinen Lage unseres Körpers gegen die Tafeln nicht wohl zum Ziele führt, oder für die einzelnen Kanten die oben (466) angegebenen Konstruktion ausführen. Da aber auch der Schlagschatten unseres Körpers auf die $\mathfrak{T}_1$ verlangt ist, so wollen wir mit dessen Aufsuchung beginnen, indem wir die Schlagschatten aller Körperkanten auf die $\mathfrak{T}_1$ und demnach die Schlagschatten aller Ecken, (a, b, c, d) aufsuchen, und dem Körper entsprechend verbinden. Wir erhalten dann die ganze Schlagschattenfigur und finden daraus diejenigen Kanten, deren Schlagschatten den Umfang der Schattenfigur bilden, und welche demnach die reelen Streifschattengrenzen vorstellen. Führen wir die obengenannte Operation aus, so müssen wir durch a (Fig. 184) einen Stral legen und den Schnitt (a') dieses Strals mit der $\mathfrak{T}_1$ aufsuchen, wodurch wir den Schlagschatten (a'), den der Punkt a auf die $\mathfrak{T}_1$ wirft erhalten. In ähnlicher Art suchen wir b' c' und d'. Verbinden wir diese Schlagschattenpunkte (a', b', c', d') gerade so wie die Punkte (a, b, c, d) des Körpers selbst, so sehen wir, dass die ganze Schlagschattenfigur auf $\mathfrak{T}_1$ das Viereck a' b' d' c' a' ist, und dass demnach die Kanten ab, bd, dc, ca, deren Schlagschatten die Schlagschattenfigur begrenzen, (während die Schlagschatten von ad und bc in diese Figur fallen) die Streifschattengrenzen sind. Durch Anschauung kann man noch erkennen, dass zu einem beliebigen Punkt von ad der Lichtstral ungehindert gelangen kann, dass also die Flächen adc und adb beleuchtet, und demnach bdc und abc beschattet sind. Ist man aber in Bezug auf die Anschauung nicht sicher, so verfahre man, um sich Gewissheit über

die Beleuchtung des Körpers zu verschaffen, nach Nr. 467. Zu dem Ende nehmen wir auf dem Körper, etwa auf einer der Kanten, die nicht Schattengrenzen sind, z. B. auf bc, einen Punkt e an, legen dadurch einen Stral A und durch diesen eine Lothebene, z. B. die Ebene A_1, suchen den Schnitt efg dieser Ebene mit dem Körper, so sieht man (in der $\mathfrak{T}_2$) dass der Stral nach e nicht gelangen kann, da er schon vorher, in der Geraden fg, den Körper trifft. Es sind also die Flächen bcd und bca beschattet und demnach, da abdca Schattengrenze ist, die Flächen adc und adb beleuchtet. *)

476. Der Schüler wird gut thun zur Uebung noch ein Beispiel über Aufsuchung von Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_1$ zu machen. Wir empfehlen ihm dazu den oben (472, Fig. 183) besprochenen Körper zu benützen und die $\mathfrak{T}_1$ durch den Kreis A zu legen. Hat er hier die Schattenlinien gezeichnet, so suche er die Schlagschatten dieser Linien, und die der Kanten auf die $\mathfrak{T}_1$. Hiebei wollen wir zu seiner Anleitung Folgendes bemerken.

1) Der Schlagschatten einer begrenzten Geraden ab auf die $\mathfrak{T}_1$ ist eine begrenzte Gerade a′ b′. Sucht man also die Schlagschatten a′, b′ ihrer Endpunkte a, b so ist a′ b′ der Schlagschatten von ab.
2) Hat man den Schlagschatten einer mit der $\mathfrak{T}_1$ parallelen Kreislinie A auf die $\mathfrak{T}_1$ zu suchen, und legt man zu dem Ende durch A einen Stralencylinder, so ist dessen Schnitt A′ mit $\mathfrak{T}_1$ der Schlagschatten von A. Offenbar ist aber A′ ein mit A kongruenter Kreis, von dem man also blos den Mittelpunkt zu suchen hat. Diesen Mittelpunkt aber findet man, wenn man durch das Centrum von A einen Stral legt, und zusieht, wo dieser die $\mathfrak{T}_1$ schneidet.

Sucht man nun in Fig. 183 die Schlagschatten der vier Kreise (A, B, C, D) und die der vier Schattenlinien (von denen in jener Figur nur $a_2\,b_2$ und $c_2\,d_2$ gezeichnet sind, aber nicht die beiden unsichtbaren, die in e_1 und f_1 ihre ersten Risse haben,

*) So wie früher schon, müssen wir auch hier den Schüler in seinem Interesse daran mahnen, dass er stets die Zeichnungen (nach Anleitung des Textes und mit Zuhilfenahme unserer Zeichnungen) selber konstruirt.

und deren Schlagschatten auch konstruirt werden müssen), so erhält man die ganze Schattenfigur, und kann sich überzeugen, dass der Schlagschatten von B *in* diese Figur fällt, also nicht gezeichnet zu werden braucht; dass ebenso der Schlagschatten von jedem der übrigen Kreise die Hälfte (und von dem des Kreises C das Stück das dem Theile von C entspricht, der auf den Körper selbst schon Schlagschatten geworfen hat) in die Schattenfigur fällt, wie wir dies nach den oben (472) gemachten Auseinandersetzungen bereits wissen. Man überzeugt sich aber dadurch, dass man mit Hilfe des Schlagschattens auf $\mathfrak{T}_1$ erfahren kann, *welche* Schattengrenzen *reel* sind.

§ 32.
Schattenstriche.

477. In manchen Zeichnungen werden zu ihrer Verdeutlichung gewisse Striche *kräftiger* ausgezogen, als die übrigen und nennt man dann die stärkeren Striche *Schattenstriche*. Wie diese Schattenstriche zu verstehen sind ist nicht allgemein klar ausgesprochen, und wollen wir daher hier festsetzen, wie wir dieselben auffassen.

Wir erklären nemlich, dass für den Fall der Körper nicht schattirt werden soll, wir aber zur Verdeutlichung der Zeichnungen Schattenstriche anbringen wollen, *die ersten oder zweiten Risse aller Kanten*, so weit sie (ohne Rücksicht auf Schlagschatten, die der Körper auf sich *selbst* wirft) **reele Schattenkanten** *und in Bezug auf die* $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) *sichtbar* sind, **kräftiger** *gezogen werden, als die übrigen Linien*. Also blos *Kanten*, und nur *so weit sie Schattenkanten* sind werden mit kräftigeren Strichen, *Schattenstrichen*, gezeichnet, alle übrigen Linien, also *auch die Umrisse*, werden schwächer ausgezogen. Halten wir hieran fest, so geben sich in jedem einzelnen Falle die Schattenstriche mit aller Bestimmtheit, und wird dann, wie wir sehen werden, durch die Schattenstriche die Zeichnung deutlicher.

478. Suchen wir auf unsere Erklärung hin zunächst die Schattenstriche für ein Parallelopiped, dessen Seiten mit der $\mathfrak{T}_1$, Fig. 185.
$\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ (diese auf $\mathfrak{T}_1$ *und* $\mathfrak{T}_2$ senkrecht vorausgesetzt) beziehungsweise *parallel* sind. Nehmen wir den Lichtstrahl A in

der üblichen Richtung (s. 460) an, so sieht man durch Anschauung, dass nur die vordere, obere und linke Seite des Körpers beleuchtet und seine Schattenkanten daher (Fig. 185, in welcher wir im ersten und zweiten Riss an jeden Eckpunkt zwei Buchstaben geschrieben haben, weil jeder der Riss von zwei Punkten ist) die Kanten ab, bf, fg, gh, hd, da sind. Da aber im ersten Risse nur die in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren Linien, also die Risse von ef, fg, gh und he gezeichnet sind, so werden im ersten Risse fg und gh Schattenstriche; in ähnlicher Art im zweiten Risse ab und bf. Nehmen wir aber die $\mathfrak{T}_3$ (senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$) an und zwar rechts vom Körper so, dass sie die $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{K}'_1$ schneidet und klappen wir $\mathfrak{T}_3$ so um, dass $\mathfrak{K}'_3$ auf $\mathfrak{K}_2$ fällt, und $a_3 d_3 h_3 e_3$ der dritte Riss des Körpers wird, so sind hier die Kanten der linken Seite (adhe) sichtbar, also ad und dh Schattenstriche. Nimmt man aber eine neue Tafel ($\mathfrak{T}_4$) so an, dass sie wieder senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ist, aber links vom Körper liegt, so dass sie die $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{K}''_1$ schneidet, und klappt man diese $\mathfrak{T}_4$ so um, dass $\mathfrak{K}''_4$ auf $\mathfrak{K}_2$ fällt, so ist, da in Bezug auf $\mathfrak{T}_4$ die rechte Seitenfläche (bcgf) sichtbar ist, b_4 c_4 g_4 f_4 der vierte Riss des Körpers und demnach hier bf und fg Schattenstriche. In der durch Fig. 185 angegebenen Art müssen für die verschiedenen Risse die Schattenstriche ausgeführt werden, wenn sie richtig angebracht sein sollen.

479. Macht man die Schattenstriche wie eben angegeben, so hat man dadurch ein Mittel die verschiedenen in der Anwendung so oft gebrauchten Risse, die wir in voriger Nummer angewendet haben, zu unterscheiden. Denn man sieht ja, dass die Schattenstriche an den Rissen eines wie oben aufgestellten Parallelopipeds in $\mathfrak{T}_1$ rechts und hinten, in $\mathfrak{T}_2$ rechts und unten, in der $\mathfrak{T}_3$ (Seitentafel zur Rechten) links und unten, in der $\mathfrak{T}_4$ (Seitentafel zur Linken) links und oben erscheinen. Und da in practischen Fällen an fast jedem Körper Parallelopipede in der obigen Aufstellung vorkommen, oder als Unterlage beigefügt werden können, so würde man durch die Schattenstriche des Parallelopipeds wenigstens erreichen, die obengenannten verschiedenen Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) ohne beigegebenen Text zu unterscheiden. Denn nicht immer kann man die viererlei Risse

so wie die Fig. 185 anordnen (dass $\mathfrak{R}_1$ unten $\mathfrak{R}_2$, oben, $\mathfrak{R}_3$ rechts und $\mathfrak{R}_4$ links liegt), dass man schon an der Anordnung den entsprechenden Riss erkennt, sondern es muss oft, wegen Mangels an Raum die obige, sonst sehr empfehlenswerthe Anordnung verlassen werden.

Anm. Des Vergleiches wegen haben wir in Fig. 185 auch den dritten (A_3) und vierten (A_4) Riss des Lichtstrals angegeben. Wie man aber A_3 und A_4 aus A_1 und A_2 findet, ist bekannt.

480. Die Aufklärungen, welche wir durch die Schattenstriche erhalten, wollen wir in Folgendem an einigen Beispielen darthun. Fig. 186.

Es seien (Fig. 186a) zwei aufeinanderstehende Parallelopipede gegeben, das obere kleiner als das untere, (so dass der ganze hier dargestellte Körper gleich ist dem grossen Parallelopiped plus dem kleinen), während daneben (Fig. 186b) ein hohles Parallelopiped vorstellt, so dass hier der Körper gleich ist dem grossen Parallelopiped minus dem kleinem. Man sieht nun leicht, dass die ersten Risse beider Körper ganz gleich gestaltet sind. Macht man aber die Schattenstriche, so kann man in den ersten Rissen beider Figuren (a und b) den Unterschied der ihnen entsprechenden Körper erkennen.

481. Hat man einen auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Drehcylinder, der von zwei zu seiner Axe senkrechten Ebenen A_2, B_2, die ihn nach den Kreisen A, B (Fig. 187a) schneiden, abgegrenzt wird, so wird man finden, dass die Kreislinie A (welche in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sichtbar ist) theilweise Schattenkante ist, dass die Grenzpunkte auf ihr die Punkte b und c sind, (die ersten Risse dieser Punkte liegen in einer Geraden $b_1 c_1$ die unter 45° zur $\mathfrak{K}$ geneigt ist; der zweite Riss von c ist in der Zeichnung weggelassen, da c in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ unsichtbar ist) und dass der Theil von A dessen erster Riss als Schattenstrich behandelt ist, die Schattenkante auf A vorstellt. Man wird also den ersten Riss eines so gestellten Cylinders, wenn man ihn mit Schattenstrichen behandeln will, so ausziehen, wie in unserer Figur geschehen, und ist nur zu bemerken, dass man mit dem stärkeren Striche nicht an den Punkten b_1, c, plötzlich aufhört, was unschön aussehen würde, sondern, dass man über b_1 und c_1 ein Fig. 187.

Stückchen weit hinaus den starken Strich in den schwachen allmählig verlaufen lässt.

Was den (rechteckigen) zweiten Riss unseres Körpers anlangt, so sind die beiden vertikalen Seiten des Rechteks Umrisse des Cylinders, also keine Kanten, und werden dieselben daher schwach ausgezogen. Die beiden horizontalen Seiten des Rechtecks aber sind die Risse der Kanten (A und B) und wäre offenbar genau genommen A_2, zwischen b_2 und dem rechten Umriss stark auszuziehen. Man pflegt aber, da bei weitem der grösste Theil von A_2 schwach gezeichnet werden muss, das ganze A_2 schwach, und ähnlich so, das ganze B_2 (obgleich ein geringer Theil desselben schwach gezogen werden sollte) stark auszuziehen. Man kann dies auch gelten lassen; denn trotz dieser kleinen Unrichtigkeit, unterscheiden sich doch der zweite Riss dieser runden Säule von dem einer viereckigen Säule (Fig. 187 b). Ohne Schattenstriche wären die zweiten Risse (der Figuren 187 a und b) gleich; mit Schattenstrichen ist die rechte Vertikallinie des zweiten Risses in der Fig. a schwach in Fig. b stark ausgezogen.

Anm. Man sieht demnach, dass die oben aufgestellte Regel, wonach Umrisse nie mit Schattenstrichen gezeichnet werden, gut ist und dazu dient die Zeichnungen verschiedener Körper zu unterscheiden, die ohne Schattenstriche einander gleich gewesen wären.

Fig. 188. 482. Hat man einen Drehungskegel, dessen Axe auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, und der von einer auf dieser Axe senkrechten Ebene A_2 (Fig. 188), die ihn natürlich nach einem Kreise A schneidet, abgegrenzt wird, so findet man nach den früheren Regeln seine Schattenlinien ba, ca, wenn man parallel zum Lichtstral durch die Spitze a eine Gerade B legt, deren Schnitt mit der Ebene A_2 sucht und von ihm aus Tangenten an A legt, die diese Kreislinie nach den Punkten b, c berühren. b und c sind also auf der Kante A des Kegels die Grenzpunkte für die Schattenkante, welche, wie uns die Anschauung sagt, so liegt, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist. In dem Dreiecke, das den zweiten Riss unseres Kegels vorstellt, ist die Horizontallinie (als zweiter Riss der Schattenkante) stark zu zeich-

nen, während die anderen beiden Seiten, als Umrisse, schwach gezeichnet werden müssen.

Anm. Zeichnet man die Schattenstriche an dem Kegel so, wie wir es in unserer Figur gethan, und wie es aus unserer früher aufgestellten Regel hervorgeht, so unterscheidet sich der erste Riss des Kegels von dem eines Cylinders (Eig. 187 a) wesentlich dadurch, dass bei diesem rechts von b_1 und c_1, bei jenem links von b_1 und c_1, der Schattenstrich erscheint. Ausserdem geht für den Cylinder die Gerade b_1c_1 durch a_1 bei dem Kegel nicht, sondern es ist b_1c_1 um so weiter von a_1 entfernt, je niederer der Kegel ist (unter einer gewissen Höhe wird das ganze A zu Schattenkante). Kommt es, wie gewöhnlich, nicht darauf an, b_1 und c_1 genau anzugeben, so kann man diese Punkte ohne genaue Untersuchung durch eine beiläufige Konstruktion aus freier Hand bestimmen, oder man erlaubt sich das ganze A_1 als Schattenstrich darzustellen; der Zweck, diesen Riss von dem eines Cylinders zu unterscheiden, ist auch damit erreicht.

483. Hat man eine Kugel oder eine geschlossene Drehfläche, z. B. ein Ellipsoid, deren Axe auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist der erste Riss der Fläche ein Kreis, der den ersten Umriss derselben vorstellt, und deſshalb durchaus schwach gezogen wird. Demnach unterscheiden sich, nach unseren Regeln für Zeichnung von Schattenstrichen, die ersten Risse eines Cylinders, Kegels und einer Kugel (oder geschlossener Drehfläche mit vertikaler Axe) wesentlich von einander.

§ 33.

Höchstes Licht und Isophoten.

484. Wenn ein Stral auf eine spiegelnde (polirte) Fläche auffällt, so wird er nach einem bestimmten Gesetze zurückgeworfen. Ist aber die Oberfläche regelmässig matt geschliffen (und so wollen wir die Flächen, welche wir schattiren, voraussetzen), so werden die Lichtstralen zerstreut zurückgeworfen, d. h. es werden von jedem beleuchteten Punkte nach allen Seiten (zurückgeworfene) Stralen ausgesendet, die bei einer gewissen Regelmässigkeit des Schiffes, die wir voraussetzen wollen, gleichstark sind. Durch diese so zurückgeworfenen Stra-

len verhält sich der Körper wie ein leuchtender, und wird er dadurch an den beleuchteten Stellen unserem Auge sichtbar. Aber die Stärke der von den verschiedenen Punkten des Körpers ausgesendeten Stralen ist verschieden, und hängt, nach physikalischen Gesetzen ab theils von der Lichtstärke des leuchtenden Punktes, theils von der Entfernung dieses Punktes vom beleuchteten Punkte, theils von dem Winkel den der Lichtstral an der beleuchteten Stelle mit der Tangentialebene der Fläche an dieser Stelle bildet. Nehmen wir nur an, wie dies für unsere Schattenkonstruktionen der Fall ist, dass alle Punkte von derselben Lichtquelle beleuchtet werden, und dass der leuchtende Punkt in unendlicher Ferne sich befindet, demnach seine Entfernungen von allen beleuchteten Punkten als gleich betrachtet werden können, so ist die Stärke der Beleuchtung an einer bestimmten Stelle nur noch abhängig von dem Winkel (α) des Lichtstrals mit der Tangentialebene an dieser Stelle, und zwar ist die Beleuchtungsstärke proportional dem sinus dieses Winkels, also gleich $\sin \alpha$, wenn wir die Beleuchtungsstärke für den Winkel von 90^0 mit 1 bezeichnen. Unter unseren Verhältnissen bilden aber alle Stralen (weil parallel) mit einer Ebene gleiche Winkel, und ist demnach eine ebene Figur an allen Stellen gleich stark beleuchtet. Wir haben demnach für unsere Schattenkonstruktion folgende Sätze:

1) Die Beleuchtungsstärke $\mathfrak{B}$ an einem beleuchteten Punkte ist $\mathfrak{B} \doteq \sin \alpha$, wenn α den Winkel des Lichtstrals mit der Tangentialebene der beleuchteten Fläche in dem Punkte bedeutet;

2) eine ebene Figur ist an allen Punkten gleich stark beleuchtet.

Anm. Nehmen wir an, die Oberfläche des Körpers sei so weiss, wie unser Papier, so wird uns dieses weiss um so heller erscheinen, je mehr sich α dem rechten Winkel nähert. Jedem Winkel α wird also eine bestimmte Helligkeit der Farbe, oder, wie der hiefür gebräuchliche Ausdruck heisst, ein bestimmter Ton entsprechen. Diese Töne können wir erhalten, wenn wir an den Stellen für welche $\sin \alpha = 1$ ist, das Papier weiss lassen, während wir an den Stellen, wo $\sin \alpha < 1$ ist, die Fläche mit einer Tuschlage (oder feiner Bleistiftschraffirung) überziehen, die

um so schwächer gehalten wird, je grösser die Lichtstärke an der Stelle ist. Wir können uns also auf diese Art eine ganze Stufenreihe von Tönen, von weiss bis schwarz verschaffen, von welcher jeder Ton einer bestimmten Beleuchtungsstärke, einem bestimmten $\sin \alpha$, entspricht. Ist der Körper farbig, so bilden wir unsere Töne ebenso, nur überziehen wir sie noch mit einer durchsichtigen Farbe, die mit der unseres Körpers übereinstimmt. Wir wollen aber in Folgendem vorläufig voraussetzen, dass unsere zu schattirenden Körper weiss sind.

485. Die Stelle einer Oberfläche, an welcher der hellste Ton auf ihr vorkommt, nennt man ihr höchstes Licht. Ferner nennt man jede auf einer Fläche liegende Linie, deren Punkte alle gleichen Ton (gleiche Beleuchtungsstärke) haben, eine Isophote.

486. Haben wir eine beleuchtete ebene Figur $\mathfrak{A}$, die also an allen Punkten gleichen Ton hat, und denken wir unser Auge senkrecht vor der $\mathfrak{T}_2$ in unendlicher Ferne, so wirft jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ einen Stral (der $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ ist) in's Auge und bilden alle diese Stralen zusammen einen Stralenbündel von prismatischer oder cylindrischer Oberfläche der die $\mathfrak{T}_2$ nach einer Figur schneidet, welche den zweiten Riss von $\mathfrak{A}$ vorstellt. Der zweite Riss von $\mathfrak{A}$ macht also seiner Gestalt nach auf das Auge denselben Eindruck, wie $\mathfrak{A}$ selbst (weshalb man ja einen Riss auch Ansicht nennt). Soll aber auch bezüglich der Beleuchtung der Riss von $\mathfrak{A}$ denselben Eindruck machen, wie $\mathfrak{A}$ selbst, so muss man bedenken, dass, wenn wir dem Riss denselben Ton geben, den $\mathfrak{A}$ selbst hat, die vom Risse ausgehenden Strahlen, dieselbe Stärke besitzen, wie die von $\mathfrak{A}$ ausgehenden, demnach der vom Risse ausgehende Strahlenbündel mit dem von $\mathfrak{A}$ ausgehenden vollkommen identisch ist. Da wir nun wollen, dass auch in Bezug auf Beleuchtung der Riss einer Fläche denselben Eindruck auf das Auge machen soll, wie die Fläche selbst, so folgt:

1) Der Ton des Risses einer ebenen Figur (oder einer sehr kleinen, als eben zu betrachtenden Figur auf einer krummen Fläche) ist gleich dem Tone der Figur selbst;

2) der Riss des höchsten Lichtes einer Fläche ist das höchste Licht des Risses der Fläche;

3) die Risse der Isophoten einer Fläche sind Isophoten des Risses der Fläche.

Um also das höchste Licht oder eine Isophote des ersten (oder zweiten) Risses einer Fläche zu finden, darf man nur das höchste Licht oder resp. eine Isophote der Fläche selbst suchen und davon den ersten (oder zweiten) Riss zeichnen. Wir haben also nur zu untersuchen, wie man das höchste Licht und die Isophote einer Fläche findet.

487. Wie wir schon wissen, ist die Isophote einer Fläche eine solche Linie derselben, die an allen Punkten gleich stark beleuchtet ist, für die also an allen Punkten die Lichtstrahlen gleiche Winkel mit den Tangentialebenen an den betreffenden Punkten bilden. Da nun jede entwickelbare Fläche von einer Tangentialebene nach einer Geraden berührt wird, und daher alle durch Punkte dieser Geraden gehenden Lichtstralen, weil diese parallel sind, gleiche Winkel mit der Tangentialebene bilden, so ist jede solche Gerade eine Isophote, und diejenige Gerade, welche am stärksten beleuchtet ist, das höchste Licht der Fläche. Wir haben also die Sätze:

1) Die geraden Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche sind Isophoten derselben;

2) das höchste Licht einer entwickelbaren Fläche ist eine gerade Erzeugende derselben.

Fig. 189. 488. Wollen wir nun untersuchen, wie man das höchste Licht auf einer entwickelbaren Fläche findet, so müssen wir diejenige Erzeugende suchen, welche mit der ihr entsprechenden Tangentialebene einen möglichst grossen spitzen Winkel α bildet (damit $\sin\alpha$ möglichst gross werde) und die Fläche auf der beleuchteten Seite berührt. Machen wir zunächst unsere Untersuchung für einen Kegel.

Es sei also ein beliebiger Kegel gegeben, und sollen wir untersuchen, welche Tangentialebene desselben mit einem beliebigen Lichtstral, am bequemsten mit dem durch seine Spitze gehenden, einen möglichst grossen spitzen Winkel einschliesst. Wir nehmen zu dem Ende ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) so an, dass eine dieser Tafeln, z. B. $\mathfrak{T}_3$, auf dem Lichtstral senkrecht steht. Ist nun (Figur 189) A die Spur des Kegels auf der $\mathfrak{T}_3$ und a seine Spitze, also a_3 der dritte Riss des durch die

Spitze gelegten Lichtstrals, so sind die aus a_3 an A_3 gezogenen Tangenten die dritten Risse der Schattengrenzen und ist der Kegel rechts oder links von diesen Schattengrenzen beleuchtet, je nachdem der Lichtstral (welcher $\perp \mathfrak{T}_3$ ist) von oben herab, oder von unten hinauf gerichtet ist. Nehmen wir an, der Kegel sei links beleuchtet und zeichnen wir eine beliebige Tangentialebene des Kegels, z. B. die Ebene Ba, welche den Kegel auf der beleuchteten Seite berührt, so finden wir bekanntlich den Winkel α dieser Ebene mit dem Lichtstral durch ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen eine Kathete $\overline{a_3 b_3}$ (die Entfernung von a_3 nach B_3), und dessen andere Kathete $\overline{a_4 a'_4}$ (die Entfernung des Punktes a von der $\mathfrak{T}_3$) ist, und zwar wird der Winkel α von der Kathete $a_4 a'_4$ mit der Hypotenuse jenes Dreiecks gebildet. Der Winkel α wird daher am Grössten, wenn die Spur der Tangentialebene die Spur A in dem Punkte c berührt, den man erhält, wenn man aus dem Punkte a_3, als Mittelpunkt einen Kreis C (dessen vierter Riss in $\mathfrak{K}'_4$ liegt, während er selbst mit seinem dritten Riss (C_3) zusammenfällt) zeichnet, der A berührt und zwar in einem Punkte der natürlich auf der beleuchteten Seite des Kegels liegt. Dann ist die Gerade ac die Erzeugende, welche das höchste Licht vorstellt. Nach dieser Geraden ca berührt aber der Drehungskegel Ca den gegebenen Kegel Aa, folglich ist die in $c_3 a_3$ zur $\mathfrak{T}_3$ senkrechte Ebene die die Gerade ac enthaltende gemeinschaftliche Normalebene für beide Kegel. Da noch diese Ebene einen Lichtstral enthält, demnach zu allen Lichtstralen parallel ist, so hat man den Satz:

Das höchste Licht eines Kegels ist diejenige auf dem beleuchteten Theil des Kegels liegende Gerade desselben, für welche die Normalebene parallel zum Lichtstral ist.

Da dieser Satz für jeden Kegel passt, so gilt er auch wenn dessen Spitze in unendlicher Ferne liegt, also auch für den Cylinder.

489. Hat man eine beliebige entwickelbare Fläche $\mathfrak{A}$ und sucht man ihren Leitkegel $\mathfrak{B}$, indem man durch einen beliebigen Punkt zu allen Geraden von $\mathfrak{A}$ Parallele legt, so sind die beiden Tangentialebenen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die an zwei einander entsprechenden (parallelen) Erzeugenden dieser Flächen berühren,

einander parallel; ebenso die beiden diesen Erzeugenden entsprechenden Normalebenen. Hat man also auf dem Kegel das höchste Licht, so ist die entsprechende Erzeugende auf 𝔄 höchstes Licht für 𝔄. Da aber die diesen höchsten Lichtern entsprechenden Normalebenen parallel sind, und die für den Kegel parallel zum Lichtstral ist, so ist es auch die für die Fläche 𝔄. Demnach gilt obiger Satz für alle entwickelbaren Flächen, und wir können sagen:

Das höchste Licht einer entwickelbaren Fläche ist diejenige auf dem beleuchteten Theil der Fläche liegende Erzeugende, für welche die Normalebene der Fläche parallel zum Lichtstral ist.

Anm. Gibt es mehrere solche Erzeugende, so ist die das höchste Licht, für welche α am grössten ist.

490. Soll das höchste Licht auf einem Cylinder gefunden werden, so muss eine durch dasselbe gelegte Normalebene des Cylinders parallel zum Lichtstral, aber auch parallel zum Cylinder sein. Legt man daher durch einen beliebigen Punkt eine Parallele A zum Lichtstral und eine Parallele B zum Cylinder, so ist die Ebene AB parallel zur genannten Normalebene, und demnach senkrecht zur Ebene, die den Cylinder im höchsten Lichte berührt. Nimmt man also eine Gerade C senkrecht zur Ebene AB an und legt an den Cylinder eine Tangentialebene $\parallel$ C, welche ihn auf dem beleuchteten Theil nach der Geraden D berührt, so ist D das höchste Licht.

Der Schüler wird gut thun diese Aufgabe auszuführen.

Anm. Findet man hier mehrere Gerade D, so ist jede derselben ein höchstes Licht; denn da alle Tangentialebenen des Cylinders, die parallel zu C sind, unter sich parallel laufen, so bilden sie alle mit den Lichtstralen gleiche Winkel α, und wenn daher der $\sin \alpha$ für die eine Linie D möglichst gross ist, so ist er es auch für die andere.

491. Hat man von einem Drehungskegel 𝔄 das höchste Licht A zu finden, so ist die durch A gehende Normalebene des Kegels eine Meridianebene desselben, welche den durch seine Spitze gelegten Lichtstral enthalten muss. Legt man daher durch die Spitze von 𝔄 einen Lichtstral B und durch diesen und die Axe des Kegels eine Ebene, so schneidet diese Ebene

den Kegel nach zwei Geraden C, D, von denen diejenige, welche auf dem beleuchteten Theil von A liegt, oder wenn beide Gerade auf dem beleuchteten Kegel liegen, diejenige, welche mit dem Lichtstral einen grösseren Winkel bildet, als die andere, das höchste Licht ist.

Sollte der besondere Fall eintreten, dass C und D gleiche Winkel mit dem Lichtstral bilden, was nur möglich ist, wenn die Kegelaxe parallel zum Lichtstral ist, so würden offenbar alle Erzeugenden des Kegels gleichstark beleuchtet sein, da ja die Axe mit allen Erzeugenden gleiche Winkel bildet.

492. Will man das höchste Licht eines beliebigen (durch seinen ersten und zweiten Riss gegebenen) Kegels auffinden, so legt man nach der oben (488) gegebenen Anleitung durch die Kegelspitze einen Lichtstral A, nimmt eine zu diesem senkrechten Ebene an, die man als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet und umklappt, und sucht den dritten Riss (B_3) des Schnittes dieser Ebene mit dem Kegel, so wie den dritten Riss (a_3) des Schnittes der Ebene mit dem Lichtstral A. Zeichnet man nur aus a_3 den Kreis, der A_3 in einem auf der Lichtseite liegenden Punkt b_3 berührt, so ist b_3 der dritte Riss eines Punktes des höchsten Lichtes. Sucht man noch b_1 und b_2 (aus b_3) und verbindet b mit der Kegelspitze, so erhält man das höchste Licht.

493. Soll man für eine beliebige entwickelbare Fläche $\mathfrak{A}$ das höchste Licht finden, so legt man (nach 489) durch einen beliebigen Punkt zu allen Erzeugenden von $\mathfrak{A}$ Parallele, wodurch man den Leitkegel $\mathfrak{B}$ erhält (dieser ist für eine entwickelbare Schraubenfläche, so wie für eine jede Böschungsfläche ein Drehungskegel). Sucht man nun das höchste Licht (A) von $\mathfrak{B}$ und auf $\mathfrak{A}$ die Erzeugende B, welche $\parallel$ A ist, so ist B das gesuchte höchste Licht.

494. Für die meisten praktisch vorkommenden nicht entwickelbaren Flächen, gibt es Punkte, für welche $\sin \alpha$ den grösstmöglichen Werth erreicht, d. h. für welche $\sin \alpha = 1$ ist. Jeder solcher Punkt, der auf dem beleuchteten Theile der Fläche liegt, ist dann ein höchstes Licht, das wir absolutes höchstes Licht nennen wollen. Soll dieses daher gefunden werden, so sucht man denjenigen Punkt auf der Lichtseite der Fläche, in welchem der Lichtstral eine Normale der Fläche ist, oder,

was dasselbe sagt, in welchem die Tangentialebene der Fläche parallel ist zu einer auf dem Lichtstrale senkrechten Ebene. Nehmen wir daher eine zum Lichtstrale senkrechte Ebene an und legen (nach § 23. Nr. 397—404) parallel zu ihr Tangentialebenen an die Fläche, so sind diejenigen Berührungspunkte dieser Ebenen, welche auf dem beleuchteten Theile der Fläche liegen, die absoluten höchsten Lichter.

495. Wie wir schon wissen, nimmt die Beleuchtungsstärke des beleuchteten Theils einer Fläche vom höchsten Lichte gegen die Schattenlinie ab, und belegen wir daher die Lichtfläche mit Tönen, die um so stärker sind, je geringer die betreffende Lichtstärke ist. Für ein geübtes Auge genügt es meistens diese Töne vom höchsten Lichte bis zur Streifschattengrenze nach dem Gefühle zunehmen zu lassen. Will man aber genauer und sicherer zu Werke gehen, so benützt man zur Abschätzung dieser Töne die Isophoten (485). Wir wollen daher über die Aufsuchung von Isophoten das Wichtigste mittheilen, und gleich bemerken, dass wir nicht blos Isophoten überhaupt aufsuchen lernen wollen, sondern Isophoten bestimmter Qualität, das soll heissen, Isophoten in deren Punkten die Lichtstärke, der $\sin\alpha$, einen gegebenen Werth hat. Was hiebei die entwickelbaren Flächen anlangt, so wissen wir schon, dass deren Isophoten Gerade sind, und ist also blos noch zu zeigen, wie man solche Isophoten von bestimmter Qualität findet.

496. Aufg. Für einen Kegel 𝔄 eine Isophote zu finden für welche $\sin\alpha$, also auch α, gegeben ist.

Aufl. Soll die Isophote J, für welche der Winkel α eine gegebene Grösse hat, gefunden werden, so muss die Tangentialebene des Kegels in J (J geht jedenfalls durch die Kegelspitze a), mit dem Lichtstral den Winkel α bilden. Da aber alle durch α gehenden Ebenen, die mit dem Lichtstral den $\wedge\,\alpha$ bilden, Tangentialebenen eines Drehungskegels 𝔅 sind, der a zur Spitze, den durch a gelegten Lichtstral als Axe und α als Oeffnungswinkel hat, so darf man nur eine Ebene suchen, welche 𝔄 u. 𝔅 gemeinschaftlich berührt, und deren Berührungslinie mit 𝔄 aufsuchen, und man erhält die verlangte Isophote.

Obgleich die Ausführung dieser Auflösung nichts enthält, was uns nicht von früher her bekannt wäre, so wollen wir doch

bemerken, dass wir um die Auflösung auszuführen, wie oben zur Aufsuchung des höchsten Lichtes eines Kegels, ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) so annehmen, dass $\mathfrak{T}_3$ senkrecht zum Lichtstrahle steht, wodurch wir in gleicher Art, wie oben (488), auf die Fig. 189 geführt werden. Zeichnen wir nun aus dem Mittelpunkte a_3 einen Kreis D_3, dessen Halbmesser $(\overline{a_3 b_3})$ gleich der Kathete $\mathfrak{a}' b$ eines rechtwinkeligen $\triangle ab\mathfrak{a}'$ ist, an welchem die andere Kathete $a\mathfrak{a}' = a_4\mathfrak{a}'_4$ und der Winkel α von dieser Kathete und der Hypotenuse gebildet ist, so ist die Gerade B_3, welche A_3 und D_3 gemeinschaftlich berührt (und zwar A_3 in d_3) die dritte Spur der gemeinschaftlichen Tangentialebene beider obengenannter Kegel. Demnach ist der Punkt d (dessen dritter Riss d_3 ist, während d_4 in $\mathfrak{K}'_4$ liegt) ein Punkt der gesuchten Isophote. Sucht man daher noch d_1 und d_2 (aus d_3 und d_4) nach bekannten Regeln, so ist Gerade a d die verlangte Isophote.

Anm. Es gibt so viele Isophoten von der verlangten Qualität, als die Curven A_3 und D_3 gemeinschaftliche Tangenten zulassen. Sollen blos diejenigen Isophoten gesucht werden, welche auf der Lichtseite des Kegels liegen, so muss man natürlich nachsehen, welche der gefundenen Isophoten diese Eigenschaft haben.

497. Wie man die Isophoten eines Drehungscylinders oder Drehungskegels findet, wird später bei den Drehflächen gezeigt werden.

498. Will man die Isophote einer allgemeinen entwickelbaren Fläche $\mathfrak{A}$ finden, so sucht man sie für deren Leitkegel $\mathfrak{B}$, und zeichnet die Gerade auf $\mathfrak{A}$, welche zu der Isophote auf $\mathfrak{B}$ parallel ist.

499. Soll die Isophote bestimmter Qualität, also bei gegebenen $\wedge\alpha$, für einen beliebigen Cylinder gesucht werden, so ist sie die Berührungslinie einer Tangentialebene des Cylinders, die mit dem Lichtstral den $\wedge\alpha$ bildet. Nimmt man daher einen beliebigen Punkt a an und legt durch ihn eine Parallele A zum Lichtstral und eine Parallele B zum Cylinder, so wird eine Ebene, die B enthält und mit A den $\wedge\alpha$ bildet parallel zu jener Tangentialebene sein. Denkt man sich daher einen Drehkegel, der a zur Spitze, A zur Achse und α als Oeffnungswinkel hat, und legt man an diesen Kegel durch B eine Tangentialebene, die

ihn nach der Geraden C berührt (zur Aufsuchung von C wird man wieder ein rechtwinkeliges Tafelsystem $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ so annehmen, dass $\mathfrak{T}_4 \perp A$ ist), so ist jene Tangentialebene $\parallel$ C. Legt man daher an den gegebenen Cylinder eine Tangentialebene, die $\parallel$ C ist, so ist ihre Berührungslinie die verlangte Isophote. — Die Ausführung der Zeichnung wollen wir dem Schüler überlassen.

Fig. 190. 500. Aufg. Die Isophote einer Kugel zu finden, wenn wieder $\sin\alpha$, und damit auch α, gegeben ist.

Aufl. Es sei a (Fig. 190) das Centrum, A der in der $\mathfrak{T}_2$ liegende grösste Kugelkreis und B der durch a gehende Lichtstral. Betrachten wir nun die Kugel als Drehfläche mit der Axe a_1 und dem Hauptmeridian A, und die Ebene B_1 als $\mathfrak{T}_3$, die wir um die Axe (a_1) drehen, bis sie mit der $\mathfrak{T}_2$ zusammenfällt, und mit dieser umklappen, so fällt der dritte Riss des neuen (in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden) Hauptmeridians C auf A_2. Wie man den dritten Riss B_3 des Lichtstrales mittelst eines Punktes b desselben findet, ist bekannt. Benützen wir nun das Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ und nehmen auf B einen Punkt c so an, dass eine von c_3 an C_3 gezogene Tangente D_3 mit A_3 den Winkel α bildet, so wird der Drehungskegel DB (dessen Erzeugende D und dessen Axe B ist) die Kugel nach einem Kreise E berühren, welcher die Eigenschaft hat, dass alle Tangentialebenen der Kugel in den Punkten von E gleiche Winkel mit dem Lichtstral bilden (und zwar Winkel $= \bigwedge \alpha$). Demnach ist E die verlangte Isophote. Wie man E_2 findet ist sehr einfach, und aus der Figur zu ersehen; wie man aber von E_1, welches eine Ellipse ist, die Scheitel findet, dürfen wir sicher als bekannt voraussetzen. Noch ist zu bemerken, dass, weil die Risse des Lichtstrals, so wie die der Kugel gegen die durch deren Mittelpunkt gedachte Kante $\mathfrak{K}$ in der Zeichnung symmetrisch liegen, auch E_2 und E_1 in Bezug auf $\mathfrak{K}$ symmetrisch angeordnet sind und somit E_2 aus E_1 leicht erhalten werden kann.

Anm. Hieraus sieht man gleich an einem Beispiele, welchen Nutzen die gewöhnliche Annahme der Lichtstralenrichtung, wonach dieselbe mit beiden Tafeln gleiche Winkeln bildet, gewährt. Dadurch aber, dass noch die Risse des Lichtstrales Winkel von 45° mit $\mathfrak{K}$ einschliessen, bildet der Lichtstral auch mit derjenigen $\mathfrak{T}_3$, welche auf $\mathfrak{K}$ senkrecht steht, denselben Winkel, wie mit

$\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, und findet demnach die erwähnte Symmetrie auch in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$, sowie auf $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ statt.

501. Aufg. Eine Isophote von bestimmter Qualität für eine beliebige Drehfläche zu finden. Fig. 191.

Aufl. Suchen wir die Isophote der Fläche für einen $\wedge\alpha$, so muss eine Tangentialebene der Fläche in einem Punkte b der Isophote mit dem Lichtstrale den $\wedge\alpha$ bilden; dies muss aber auch die Tangentialebene einer Fläche thun, welche die gegebene in b berührt. Wir können also an die Stelle der gegebenen Fläche eine andere sie in b berührende Fläche setzen. Als eine solche Hilfsfläche wird sich, wie aus der vorigen Nr. hervorgeht, eine Kugel eignen, und zwar eine solche, welche die Drehfläche nach einem durch b gehenden Parallelkreis berührt.

Um also einen Punkt der Isophote einer Drehfläche $\mathfrak{A}$ zu finden, nehmen wir eine Kugel $\mathfrak{B}$ an, die $\mathfrak{A}$ nach einem Parallelkreis berührt und suchen den auf diesem liegenden Punkt der Isophote für $\mathfrak{B}$ auf. Für $\mathfrak{B}$ ist aber der Ort des Punktes (s. 500) ein Kreis E; wo nun E und der Parallelkreis sich schneiden, da ist der verlangte Punkt.

Für die Ausführung der Aufgabe sei a_1 der erste Riss der Drehaxe und A der halbe Hauptmeridian, und nehmen wir wieder (wie in 500) die Meridianebene B_1, welche parallel zum Lichtstral ist, und daher einen die Axe a_1 schneidenden Lichtstral B enthält, als $\mathfrak{T}_3$ und klappen sie so, wie in voriger Nummer, um. Nehmen wir nun einen Parallelkreis D an und zeichnen die Kugel, welche die Drehfläche nach D berührt (deren Mittelpunkt a also in der Drehaxe liegt), so erhalten wir (wenn wir den Lichtstral B durch a legen) in derselben Art wie oben (500) E_3; wo dann E_3 und D_3 (welches ja vermöge unserer Umklappung mit D_2 zusammenfällt) sich schneiden, ist der dritte Riss (b_3) des gesuchten Punktes b (wie man b_1 und b_2 aus b_3 findet, wobei sich ergibt, dass es zwei solche Punkte gibt, können wir wohl dem Schüler überlassen). In ähnlicher Art erhalten wir für die übrigen Parallelkreise, worunter wir auch den Aequator annehmen, wenn ein solcher vorhanden ist) die ihnen entsprechenden Punkte.

Zeichnen wir an dem Hauptmeridian eine Tangente F_3, die mit B_3 den $\wedge\alpha$ bildet, so ist der Berührungspunkt von F_3 und

B_9 der dritte Riss eines Punktes auf dem in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden Meridian, und der diesem Punkte entsprechenden Parallelkreis, der Grenzkreis. Wenn wir so alle Grenzkreise zuerst zeichnen, so erfahren wir, zwischen welchen Grenzen wir die Parallelkreise annehmen müssen, um wirklich Punkte der Isophote zu erhalten.

Anm. Ist die Axe der Drehfläche nicht senkrecht zu einer Tafel, so nimmt man ein neues Tafelsystem zu Hilfe, dessen eine Tafel senkrecht zur Drehaxe ist.

502. Ist die Drehfläche ein Cylinder oder Kegel, so suchen wir auch mit Hilfe einer Kugel, welche die Fläche nach einem Parallelkreise berührt, einen Punkt der Isophote. Mit diesem einen Punkt aber ist die Isophote, welche eine Gerade der Fläche ist, schon bestimmt.

503. Alle Flächen, deren Isophoten wir bisher nicht näher besprochen haben, führen auf so komplicirte Konstruktionen ihrer Isophoten, dass man diese lieber nicht konstruirt und die verschiedenen Töne, die man dem beleuchteten Theile zwischen dem höchsten Lichte und der Schattenlinie gibt, nach dem Gefühle feststellt. Gleichwohl wollen wir der Vollständigkeit wegen angeben, auf welche Art wir auch deren Isophoten erhalten können.

1) Wollen wir die Isophote einer windschiefen Fläche für einen gegebenen $\wedge\alpha$ erhalten, so geben wir die Punkte der Isophote auf den einzelnen Erzeugenden an, und verbinden diese Punkte durch eine Linie. Um aber einen solchen Punkt auf einer Erzeugenden A zu erhalten, müssen wir den Punkt der Erzeugenden bestimmen, in welchem die Tangentialebene mit dem Lichtstrahl den $\wedge\alpha$ bildet. Da aber bekanntlich jede durch A gelegte Ebene Tangentialebene der Fläche ist, so müssen wir durch A eine Ebene legen, die mit dem Lichtstral einen $\wedge\alpha$ bildet; diese Ebene ist dann die verlangte Tangentialebene, und ihr Berührungspunkt der verlangte Punkt der Isophote (wie man einen solchen Berührungspunkt findet, ist früher bei den windschiefen Flächen angegeben).

2) Will man für irgend eine andere Fläche von einer Isophote (mit dem $\wedge\alpha$) den Punkt, welchen sie mit einer Erzeugenden A gemein hat, finden, so denke man sich in allen Punkten von A Tangentialebenen an die Fläche gelegt, so umhüllen sie eine ent-

wickelbare Fläche 𝔄 (welche meistens einen Kegel oder Cylinder vorstellen). Sucht man nun (nach oben angegebenen Regeln) die Isophote B von 𝔄 für den $\wedge\alpha$, so ist der Schnitt von A und B der verlangte Punkt.

§ 34.

Ausführung der Schattirung.

504. Hat man für alle Grenzflächen eines gegebenen Körpers die Schattengrenzen und die höchsten Lichter aufgesucht und will man nun die Schattirung wirklich ausführen, so muss noch untersucht werden, wie man sowohl im Licht als im Schatten abtönt, d. h. wie man an den verschiedenen Stellen die richtigen Tonstärken findet.

Was nun zunächst die Abtönung des Lichts einer Fläche betrifft, so benützen wir dazu die Isophoten und zwar in der Art, dass wir zwischen dem absoluten höchsten Lichte (d. h. der Stelle wo $\sin\alpha = 1$ ist) und der Schattenlinie eine gewisse nicht zu kleine Anzahl von Isophoten bestimmter Qualität aufsuchen und dadurch die ganze Lichtseite in Zonen theilen, deren jede von zwei nächstliegenden Isophoten eingeschlossen ist. Wir geben dann jeder solchen Zone an allen Stellen denselben Ton, obgleich dies eigentlich nicht richtig ist (da doch der Ton gegen die Schattenlinie hin dunkler und gegen das höchste Licht schwächer gehalten sein sollte). Allein diese Zunahme des Tones einer Zone ist um so geringer in je mehr Zonen wir die Lichtseite theilen und der gemachte Fehler also nicht bedeutend, wenn wir viele Zonen annehmen. Man pflegt nun zwischen dem höchsten Licht und der Schattenlinie zehn Zonen also neun Isophoten anzunehmen, deren Qualitäten ($\sin\alpha$, s. Nr. 495) nach einander von der Schattenlinie anfangend die Werthe $\frac{1}{10}$ bis $\frac{9}{10}$ haben, während die Schattenlinie selbst eine Isophote mit dem Qualitätswerthe 0 vorstellt. Man gibt dann jeder Zone den Ton, welcher der (sie begrenzenden) Isophote von stärkerer Beleuchtung entspricht. Demnach erhalten die zehn aufeinander folgenden Zonen vom höchsten Lichte aus gezählt, die Lichtstärken 1 bis $\frac{1}{10}$.

Zur annähernden Hervorbringung dieser Töne verfährt man in folgender Weise, wobei wir annehmen wollen, dass wir die Zone

zwischen dem absoluten höchsten Lichte und der nächsten Isophote $\mathfrak{Z}_0$, die folgende Zone $\mathfrak{Z}_1$ u. s. w. nennen. Man lässt die Zone $\mathfrak{Z}_0$ weiss und bedeckt die übrigen neun Zonen mit einem schwachen Tuschton. Sodann überzieht man mit Ausnahme der Zone $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_1$, die übrigen acht mit einem etwas stärkeren Ton, dann die letzten sieben Zonen mit noch mehr verstärktem Ton u. s. w. bis man endlich nur noch die letzte Zone allein überzieht. Die Töne, welche auf diese Art schliesslich die aufeinander folgenden Zonen $\mathfrak{Z}_0$ bis $\mathfrak{Z}_9$ erhalten, wollen wir mit T_0 bis T_9 bezeichnen. Wie stark man die nacheinander anzuwendenden Tuschtöne machen soll, kann nur ein (durch Uebung zu erreichendes) richtiges Gefühl sagen. Allein auch ohne dieses Gefühl wird man durch das angegebene Verfahren ein brauchbares, wenn auch nicht immer gleich effektvolles Resultat erzielen.

505. Es kann kommen, dass die Lichtseite einer Begrenzungsfläche eines Körpers nicht alle die obengenannten zehn Zonen zulässt, indem entweder diese Begrenzungsfläche ein Theil einer Fläche ist, auf dem einige der Zonen fehlen, oder indem die Fläche ihrer Natur nach einige der Zonen nicht enthält. In diesem Falle zeichnet man natürlich nur die Zonen, die möglich sind, und belegt dann die ganze Lichtfläche mit den aufeinanderfolgenden Tönen so oft, als es der hellsten Zone entspricht und dann erst lässt man diese Zone frei und belegt die folgenden Zonen mit dem nächsten Ton etc. Steht z. B. ein Kreiscylinder senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so wird sein höchstes Licht eine Isophote von nahezu der Qualität $\frac{8}{10}$ vorstellen, so dass hier die zwei ersten Zonen fehlen. Demnach wird hier die ganze Lichtseite erst mit dem ersten Tone, dann mit dem zweiten Tone belegt, und nun die letzten sieben Zonen mit dem dritten, dann die letzten sechs mit dem vierten u. s. w. bedeckt.

506. Es ist leicht einzusehen, dass die Aufsuchung so vieler Isophoten eine mühsame Arbeit ist, die man gerne so viel als möglich entbehrlich macht. Man kann sich nun die Sache dadurch erleichtern, dass man zunächst nur fünf Zonen herstellt, indem man die Isophoten von den Qualitäten $\frac{8}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$ konstruirt und die übrigen Isophoten nach dem Augenmasse aus freier Hand einfügt. Aber auch die erstgenannten fünf Zonen kann man zum Theile oder ganz aus freier Hand bei einiger

Uebung zeichnen, wenn man sich namentlich eine Zeichnung zum Muster nimmt, in welchem eine Fläche derselben Art und in derselben Lage gegen die Tafeln dargestellt und die Isophoten dazu konstruirt sind.

507. Nicht blos auf der Lichtseite einer Fläche muss man nach den betreffenden Lichtstärken abtönen, sondern auch auf den beschatteten Stellen sind verschieden starke Töne zu sehen. Denn wenn wir auch voraussetzen, dass der Körper von einer einzigen Lichtquelle beleuchtet wird, so bilden sich doch durch diese (direkte) Quelle von selbst noch weitere (indirekte) Quellen die wir berücksichtigen müssen. Solche indirekte Lichtquellen sind alle beleuchteten Körper, welche an ihren beleuchteten Stellen das Licht reflektiren und so den beschatteten Stellen eines Körpers Licht zuführen. Man nennt daher die durch reflektirtes Licht erhellten Schattenstellen Reflexe.

Es ist klar, dass diese Reflexe, welche von der Anordnung und Beschaffenheit der verschiedenen reflektirenden Körper abhängen, sich nicht genau bestimmen lassen. Wenn man dieselben aber in der Natur beobachtet, so wird man gewisse Gesetze finden, nach denen die Schatten abgetönt sind. Diese Gesetze sind aber verschieden je nach der Art der Schatten, wir wollen daher voraus die verschiedenen Arten von Schatten genau feststellen.

508. Wird der Körper von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten, so dass jeder ebene Schnitt des Körpers eine durchaus konvexe Figur vorstellt, so sind seine sämmtlichen Streifschattengrenzen die Grenzen des Schattens und Lichtes und der ganze Schatten auf dem Körper wird sein Selbstschatten genannt. Hat aber der Körper konkave Stellen und in Folge dessen Schlagschattengrenzen (s. 468), so kann es sein und ist auch gewöhnlich der Fall, dass auf ihm zweierlei Schatten vorkommen, nemlich Selbstschatten und Schlagschatten. Wir haben nun festzustellen, wie wir diese beiden Arten von Schatten unterscheiden können. Ist nun (Fig. 192) A der Schnitt des Körpers mit einer den Stral B enthaltenden Ebene (hier deutet wieder die Schraffirung die Materie des Körpers an), so ist nach früheren Auseinandersetzungen b ein Punkt der reelen, c einer der virtuelen Streifschattengrenze und a Fig. 192.

ein Punkt der Schlagschattengrenze, und ist der Bogen bca beschattet. Es ist aber leicht zu erkennen, dass man den Schatten auf dem Bogen ac beseitigen kann (so dass dann dieser Bogen beleuchtet ist) wenn man das Stück dcb wegnimmt; dagegen lässt sich der Schatten auf $\widehat{bc}$ nicht entfernen. Durch eine Betrachtung dieser Art kann man stets den Selbstschatten vom Schlagschatten unterscheiden. Es ist nemlich der Schatten **Selbstschatten**, der sich nicht beseitigen lässt und derjenige Schatten **Schlagschatten**, der durch Hinwegnahme eines Theiles der vorhandenen Materie beseitigt werden kann.

Zugleich sieht man auch, dass die Grenze zwischen den beiden aneinander stossenden Schatten (Selbstschatten und Schlagschatten) die virtuele Schattenlinie ist.

509. Nachdem wir nun im Stande sind, die beiden Arten von Schatten, nemlich Selbstschatten und Schlagschatten, mit Sicherheit zu unterscheiden, wollen wir die Gesetze angeben, nach denen diese Schatten abgetönt werden müssen, damit sie mit den in der Natur beobachteten Abtönungen übereinstimmen. Zu dem Ende ist vorerst zu bemerken, dass auch auf den beschatteten Theilen der Flächen Isophoten gezeichnet werden müssen, welche Zonen bilden, nur dass wir für die beschatteten Stellen zwischen dem absoluten höchsten Lichte und der Schattenlinie nur vier Isophoten (mit den Qualitäten $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$) einfügen, und daher nur fünf Zonen (die Doppelzonen $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3$, $\mathfrak{Z}_4\mathfrak{Z}_5$, $\mathfrak{Z}_6\mathfrak{Z}_7$, $\mathfrak{Z}_8\mathfrak{Z}_9$) erhalten. Bezüglich der Abtönung dieser Zonen aber haben wir wesentlich zwischen Selbstschatten und Schlagschatten zu unterscheiden.

Für den Selbstschatten lässt man vom absoluten höchsten Lichte bis zur Schattenlinie den Ton an Stärke zunehmen, nur dass man am höchsten Lichte schon mit einem starken Tone anfängt. Man kann festsetzen, dass man die obengenannten fünf Doppelzonen mit folgenden darunter stehenden Tönen versieht, welche in ihrer Stärke beziehungsweise mit den oben (504) angegebenen Tönen (T_5 bis T_9) übereinstimmen:

$\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1$	$\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3$	$\mathfrak{Z}_4\mathfrak{Z}_5$	$\mathfrak{Z}_6\mathfrak{Z}_7$	$\mathfrak{Z}_8\mathfrak{Z}_9$
T_5	T_6	T_7	T_8	T_9

Für den Schlagschatten hingegen werden die Töne der Zonen um so dunkler gehalten, je heller der Ton der entsprechenden Zone wäre, wenn man den Schlagschatten beseitigen würde. Wir wollen übereinkommen, den fünf Doppelzonen des Schlagschattens folgende darunter stehenden Tonstärken zu geben:

$$\begin{matrix} \mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3 & \mathfrak{Z}_4\mathfrak{Z}_5 & \mathfrak{Z}_6\mathfrak{Z}_7 & \mathfrak{Z}_8\mathfrak{Z}_9 \\ T_{13} & T_{12} & T_{11} & T_{10} & T_9 \end{matrix}$$

Was hier unter den Tönen T_{10} bis T_{13} zu verstehen ist, wird man leicht nach dem oben (504) über die Töne T_0 bis T_9 Gesagten entnehmen können und wird in der folgenden Nr. noch deutlicher auseinander gesetzt.

510. Fassen wir nun das bisher über die Ausführung der Schattirung Gesagte zusammen, so sieht man, dass man in folgender Art vorzugehen hat.

1) Man zeichnet auf allen Flächen des zu schattirenden Körpers das absolute höchste Licht, die Schattenlinie und zwischen diesen beiden Dingen vier Isophoten (mit den Qualitäten $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$) entweder durch Konstruktion oder nach dem Augenmasse (bei hinreichender Uebung) mit oder ohne Zuziehung von guten Mustern. Sodann schaltet man auf dem beleuchteten Theil nach dem Augenmasse weitere fünf Isophoten (mit den Qualitäten $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$) ein, wodurch man im Lichte zehn einfache Zonen ($\mathfrak{Z}_0$ bis $\mathfrak{Z}_9$) und im Schatten je fünf Doppelzonen ($\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1$ bis $\mathfrak{Z}_8\mathfrak{Z}_9$) erhält. Bezeichnet man nun mit t_1 einen schwachen Tuschton, mit t_2 einen etwas stärkeren als t_1, mit t_3 einen etwas stärkeren als t_2 u. s. w., (so dass (s. 504) $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$ u. s. w.) $T_{10} = t_1 + \ldots t_{10}$ u. s. w., $T_{13} = t_1 + \ldots . t_{13}$) und die fünf Doppelzonen ($\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_8\mathfrak{Z}_9$) im Selbstschatten nacheinander mit $\mathfrak{Z}'_5$, $\mathfrak{Z}'_6 \ldots . \mathfrak{Z}'_8$, dagegen die fünf Zonen ($\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1 \ldots . \mathfrak{Z}_8\mathfrak{Z}_9$) im Schlagschatten nacheinander mit $\mathfrak{Z}''_{13}$, $\mathfrak{Z}''_{12} \ldots . \mathfrak{Z}''_9$, so erhält jede Zone einen Ton (T) dessen Index mit dem der Zone übereinstimmt, z. B. erhalten die Zonen $\mathfrak{Z}_9$, $\mathfrak{Z}'_9$ und $\mathfrak{Z}''_9$ den Ton $T_9 = t_1 + \ldots . t_9$. Hieraus geht dann klar hervor, wie man durch auf einander folgendes Uebertuschen mit den Tuschtönen t_1, t_2 etc. nach und nach jeder Zone den ihr entsprechenden Ton ertheilen kann.

511. Das eben beschriebene Tuschverfahren, das sich besonders für grössere Körperflächen eignet, bei welchen die Zonen nicht zu schmal ausfallen, kann man das Verfahren mit abgestuften Tönen nennen und ist nur annähernd richtig, da ja in den einzelnen Zonen die Töne von der einen Isophote zur andern stetig zunehmen sollten. Will man diese stetige Zunahme zum Vorschein bringen, so muss man die mit einem Pinsel aufgetragenen Töne durch einen zweiten Pinsel an den Rändern so verwaschen, dass die Töne sich stetig ändern. Man kann dieses Verfahren das mit verwaschenen Tönen nennen. Diesen stetigen Uebergang der Töne kann man aber auch durch Schattirung mit schwarzer Kreide oder mit Bleistift ausführen, wobei die Stärke der Töne an den verschiedenen Stellen durch das Auge beurtheilt werden müssen.

Endlich kann man auch die Schattirung durch Schraffirung (mit parallelen Strichen, deren Stärke man den Tonstärken entsprechend macht) ausführen.

512. In Folge der zwischen dem beleuchteten Körper und dessen Beschauer befindlichen Luft erscheint der Körper um so unklarer, umschleierter, je grösser seine Entfernung vom Beschauer ist. Man nennt diese von der unvollkommenen Durchsichtigkeit herrührende Beleuchtungsmodifikation die Luftperspektive. In Folge von dieser erscheinen gleich stark beleuchtete Flächen im Lichte um so dunkler und im Schatten um so weniger dunkel, je weiter sie vom Beschauer entfernt sind. Obgleich nun diese Luftperspektive sich erst geltend macht bei grössern Entfernungsdifferenzen, so benützt man sie doch schon bei geringen Differenzen, um die Zeichnungen zu verdeutlichen, in folgender Art.

1) Hat man zwei zur $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) parallele ebene Figuren, so denkt man sich die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) so gelegt, dass die Abstände der beiden Ebenen von der $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) positiv sind und hält die mit dem grösseren Abstand (also dem Beschauer näher liegende) deutlicher in der Beleuchtung (d. h. im Lichte heller und im Schatten dunkler), als die andere;

2) hat man eine begrenzte Ebene $\mathfrak{A}$, die schief gegen die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) steht und wieder im positiven Raume der Tafel liegt, so denkt man sich $\mathfrak{A}$ durch mehrere zur $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_1$)

parallele und gleichweit entfernte Ebenen geschnitten und so in Zonen getheilt, die man mit der Abnahme ihrer Entfernung von der Tafel im Lichte an Helligkeit, im Schatten an Dunkelheit abnehmen lässt.

§ 35.

Ausgeführte Schattenkonstruktionen.

513. Wir wollen nun an einigen Beispielen die bisher aufgestellten Regeln zur Anwendung bringen.

Aufg. Es ist ein zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechter Kreiscylinder (A_1) gegeben, der mit einer quadratischen Platte bedeckt ist; man soll die Schattenkonstruktion an ihm ausführen. Fig. 193.

Aufl. Man sucht zunächst die (in Bezug auf $\mathfrak{T}_2$ sichtbare) Schattenlinie ab des Cylinders. Sodann werden wir uns durch Anschauung überzeugen, dass die einzigen Kanten unseres Körpers, welche Schlagschatten auf ihn werfen, die Geraden ce (deren zweiter Riss c_2 ist) und cd sind. Sucht man nun den Schlagschatten von ce auf dem Cylinder, indem man sich durch ce alle möglichen Stralen gelegt denkt, welche eine Ebene B_2 geben, so ist der Schnitt dieser Ebene mit dem Cylinder eine Curve deren zweiter Riss in B_2 fällt. Weil aber der Schlagschatten, den c auf den Cylinder wirft, offenbar der Punkt c' ist, so sieht man, dass $f'_2 c'_2$ den zweiten Riss des verlangten Schlagschattens vorstellt. Will man den zweiten Riss des Schlagschattens von cd auf den Cylinder, so muss man durch cd eine Stralenebene legen und von deren Schnitt mit dem Cylinder den zweiten Riss suchen. Nun ist aber dieser Schnitt eine Ellipse deren zweiter Riss ihrem ersten Riss gleicht, da die obengenannte Stralenebene gegen die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gleich geneigt ist; da aber der erste Riss der Ellipse die Kreislinie A_1 ist, so ist deren zweiter Riss (A_2) eine Kreislinie von gleichem Halbmesser, und ist nur der Mittelpunkt zu suchen. Es ist aber der Mittelpunkt der Ellipse A offenbar der Schnittpunkt der durch cd gelegten Stralenebene mit der Axe (g_1) des Cylinders und fällt zusammen mit dem Schnitt der Ebene B_2 mit dieser Axe (g_1); demnach ist g dieser Mittelpunkt und g_2 der Mittelpunkt des Kreises A_2. — Warum nur der zwischen c'_2 und $a_2 b_2$ liegende

Theil von A_2 als Schlagschattengrenze gilt, geht aus den früher aufgestellten Regeln deutlich hervor.

Fig. 194. 514. Aufg. Die Schattenkonstruktion für eine auf einer Horizontalebene (die wir gleich als $\mathfrak{T}_1$ ansehen) liegende Kugel zu finden.

Aufl. Da die Schattenlinie auf der Kugel ein grösster Kreis ist, dessen Ebene auf dem Lichtstral senkrecht steht, so wäre der Riss dieser Schattenlinie eine Gerade, wenn die Tafel mit dem Lichtstral parallel liefe. Darum nehmen wir, wie dies oft von Vortheil ist, eine $\mathfrak{T}_3$ an, die parallel zum Lichtstral A (Fig. 194) ist und auf einer der alten Tafeln, hier auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht. Wir wollen eine solche $\mathfrak{T}_3$ eine Stralentafel nennen. Ist zugleich, wie hier, die Fläche eine Drehfläche deren Axe (wir betrachten hier die Gerade a_1 als Axe der Kugel) $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ ist, so klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ so um (wie wir das auch früher bei Drehflächen so gemacht haben), dass wir sie um die Drehungsaxe (a_1) drehen, bis sie mit der $\mathfrak{T}_2$ zusammenfällt und mit dieser gemeinschaftlich umklappen. Dann kommt $\mathfrak{K}_3$ auf $\mathfrak{K}_2$ und a_3 auf a_2; sucht man noch b_3 (aus b_1 und b_2) auf bekannte Art, so erhält man A_3, und ist $c_3 d_3$ ($\perp A_3$) der dritte Riss der Schattenlinie. Wie man daraus den ersten Riss (B_1) dieser Linie (welcher eine Ellipse ist) findet, ist bekannt. Will man das höchste Licht, so müssen wir parallel zu A eine Normale zur Kugel legen; der dritte Riss dieser Normalen ist aber A_3 und folglich e_3 der dritte Riss des höchsten Lichtes, woraus sich dessen erster Riss e_1 auf bekannte Art finden lässt.

Theilt man $\overline{a_2 e_3}$ in zehn gleiche Theile und zieht durch die Theilpunkte Parallele zu $c_3 d_3$, so stellen diese die dritten Risse der zwischen dem höchsten Lichte und der Schattenlinie einzuschaltenden neun Isophoten vor, deren erste Risse Ellipsen sind, (die man aus ihren dritten Rissen in derselben Art findet, wie B_1 aus $c_3 d_3$. (Wir überlassen die Ausführung dem Schüler).

Soll nun noch der Schlagschatten der Kugel auf $\mathfrak{T}_1$ gefunden werden, so ist dies der Schnitt des die Kugel nach der Schattenlinie B berührenden Stralencylinders mit der $\mathfrak{T}_1$ und dieser Schnitt ist eine Ellipse, deren kleine Axe gleich dem Halbmesser der Kugel und deren Mittelpunkt die erste Spur (b) des durch a gehenden Strales A ist. Legt man durch den

Punkt d einen Stral C (dessen dritter Riss durch d_3 geht und parallel A_2 ist), so ist der Schnitt (e) dieses Strals mit der $\mathfrak{T}_1$ ein Scheitel des verlangten Schlagschattens D, der sich nun zeichnen lässt.

515. Aufg. Es sei a_1 der erste Riss der Axe, A der Hauptmeridian einer Drehfläche und B ein sie begrenzender Parallelkreis, so dass zwischen B und A leerer Raum, also ausserhalb dieses Raumes und unterhalb B die Materie des Körpers sich befindet; man soll den Schlagschatten finden, welchen der Parallelkreis B in die Drehfläche wirft. Fig. 195.

Aufl. Zunächst hat man zu bedenken, dass dieser Parallelkreis B theilweise Schattenkante ist und dass die darauf liegenden Grenzpunkte (s. 465) die Schnittpunkte von B mit der Schattenlinie der Drehfläche sind. Um also diese Grenzpunkte zu finden, müssen wir die auf B liegenden Punkte der Schattenlinie suchen. Dies geschieht bekanntlich, indem wir einen Kegel, welcher die Drehfläche nach B berührt, zu Hilfe nehmen und an diesen parallel zum Lichtstral Tangentialebenen legen, welche den Kegel nach Erzeugenden berühren, deren Schnittpunkte mit B die verlangten Grenzpunkte b, c (von denen die zweiten auf B_2 liegenden Risse nicht gezeichnet wurden) sind. Zugleich sieht man durch Anschauung, dass der Bogen bdc die Schattenkante vorstellt.

Wollen wir nun den Schlagschatten den dieser Bogen auf die Drehfläche wirft, so müssen wir durch alle Punkte von B Stralen legen, wodurch wir einen Stralencylinder (mit der Axe C) erhalten, dessen Schnitt mit der Drehfläche ($A_1 a_1$) die verlangte Schlagschattengrenze ist. Um nun hievon einen Punkt zu finden, nehmen wir eine Ebene D_2 ($\parallel \mathfrak{T}_1$) zu Hilfe; diese schneidet die Drehfläche nach einem Parallelkreis und den Cylinder nach einem Kreise von der Grösse des Kreises B. Die Punkte f, g (es sind davon nur die ersten Risse zu zeichnen) in welchen sich die beiden Schnittkreise treffen, sind Punkte der gesuchten Schlagschattengrenze. Besondere Punkte dieser Curve sind noch die Punkte b und c; ferner noch der Schlagschatten des Punktes d auf der Drehfläche. Um diesen zu finden, legen wir durch d einen Lichtstral E dessen dritter Riss (wenn wir wieder die Stralentafel (s. 514) als $\mathfrak{T}_3$ annehmen und so, wie in vor-

ger Nr. umklappen) durch d_3 und h_2 geht. Wo nun E_3 und A_2 sich scheiden, da ist der dritte Riss (k_3) des gesuchten Punktes k, woraus wir leicht durch Zurückklappen k_1 finden.

Anm. Ist B der Aequator, so liegen die Punkte b_1, c_1 in einem zu C_1 senkrechten Durchmesser des Kreises B_1. Ist die Drehfläche zweiter Ordnung, so hat sie mit dem Stralencylinder der durch B gelegt wurde und der auch zweiter Ordnung ist, eine ebene Curve B gemein, woraus folgt, dass die gesuchte Schlagschattengrenze (und demnach auch ihr erster Riss) ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung ist. Benützt man in diesem Falle zur Aufsuchung der ganzen Schlagschattengrenze die Stralentafel, so ist der dritte Riss der gesuchten Curve eine Gerade, die leicht zu finden ist und wodurch man auch leicht die Axen seines ersten Risses findet; wir wollen die Ausführung dieses Falles dem Schüler überlassen.

Fig. 196. 516. Aufg. Den Schlagschatten in einer Nische zu konstruiren.

Aufl. Die Nische ist zusammengesetzt aus einem konkaven halben Kreiscylinder (A_1, Fig 196) der zwischen zwei parallelen Ebenen A_2, B_2 eingeschlossen ist und dem vierten Theile einer konkaven Kugel, als deren Axe wir die Gerade a_2 und als deren halben zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Meridian den Halbkreis C betrachten. In diesem Falle ist die Gerade cd des Cylinders Schattenkante. Sucht man nach Anleitung der vorigen Nr. (nur dass hier die Axe der Drehfläche senkrecht auf $\mathfrak{T}_2$ steht und dass der Parallelkreis C der Aequator ist) die Schlagschattengrenze auf der Kugel (s. Anm. der vorigen Nr.) so erhält man einen Ellipsenbogen b_2c_2 als zweiten Riss dieser Schlagschattengrenze. (Wie man von dieser Ellipse die Scheitel findet geht aus der vorigen Nr. hervor; wie man aber dann den in B_2 liegenden Punkt e_2 der Ellipse, als Schnitt dieser Curve mit der geraden Linie B_2 findet, ist von früher her bekannt). Will man noch die Schlagschattengrenze auf dem cylindrischen Theile der Nische, so besteht dieser Theil der Schlagschattengrenze theils aus dem geraden Theile f_2g_2, der von einem Theile der Geraden c d, theils aus dem Bogen e_2f_2, der von der Kreislinie C herrührt. Wie man Punkte des Bogens e_2f_2 findet

ist so einfach, dass wir deren Auffindung wohl dem Schüler überlassen können.

517. Aufg. An einem horizontalen Gesimse, das von zwei zu den beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$) senkrechten Ebenen A_2 u. B_2 begrenzt wird, die Schattenkonstruktionen auszuführen. Fig. 197.

Aufl. Ein solches Gesimse ist ein Cylinder, dessen Profil in einer zu den beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$) senkrechten Ebene liegt. Zur Darstellung dieses Körpers nehmen wir daher am Besten neben der $\mathfrak{T}_2$ nur noch eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, so dass wir von jedem Punkte den zweiten und dritten Riss zeichnen. Die Figur links von $\mathfrak{K}'_3$ soll das Profil also auch den dritten Riss unseres Gesimses vorstellen, während der zweite Riss zwischen A_2 und B_2 eingeschlossen ist, und die Mantelkanten und Erzeugenden unseres prismatisch-cylindrischen Körpers horizontal sind.

Suchen wir nun zunächst die Schattenlinien unseres Körpers, so finden wir*) eine einzige solche, die reel ist, nemlich die Gerade ab, wenn wir parallel zum Lichtstral an den Cylinder eine Tangentialebene (C_2) legen (s. 478), welche nach einer Geraden berührt, deren dritter Riss a_3 und deren zweiter Riss $a_2 b_2$ ist. In ähnlicher Art finden wir eine virtuele Schattenlinie cd. Nun ist es theils durch Anschauung, theils durch die früher (465) gegebenen Anleitungen leicht, die Schattenkanten zu finden, deren Schlagschatten auf unser Gesims wir zunächst suchen.

So ist der Bogen ec eine Schattenkante, deren Schlagschatten, nemlich der Bogen ce′ aus bekannten Gründen so gefunden wird, wie aus der Zeichnung hervorgeht. In ähnlicher Art findet man den Schlagschatten fa′ des Bogens af. Sucht man noch den Schlagschatten e′h′ der Mantelkante eg, so findet sich, dass nur das Stück eh seinen Schlagschatten auf das Gesimse selbst wirft. Ebenso ist von der Linie ab der Schlagschatten auf dem Gesimse die Gerade a′c′ entsprechend dem Stück ac von ab. Wir haben nun zwar alle Schatten auf dem Gesimse konstruirt und wären eigentlich fertig; wir wollen aber hier noch zeigen, wie man den Schlagschatten unseres Gesimses auf

*) Hier ist ganz besonders nothwendig, dass der Schüler die Zeichnung nach Anleitung des Textes selbst entwirft.

die $\mathfrak{T}_3$ findet, ohne überflüssige Linien (d. h. solche Linien, die wir nachher wieder weglöschen müssen) zu zeichnen. Zu dem Ende dürfen wir nur darauf sehen, dass wir blos die Schlagschatten von Streifschattengrenzen und zwar nur so weit sie nicht auf das Gesimse selbst schon Schatten geworfen haben, (s. 473) aufsuchen.

So sagt uns die Anschauung, dass von dem Bogen, dessen zweiter Riss in B_2 liegt und dessen dritter Riss $e_3c_3a_3f_3$ ist, nur das Stück, dessen zweiter Riss b_2h_2, der Schattenkante angehört, so dass wir blos hievon den Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_3$ in der durch die Zeichnung zu ersehenden Art suchen. Ebenso haben wir blos von den Stücken hg und bi (der Linien eh, ab) den Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_3$ zu suchen, da die Stücke eh, ai schon ihren Schlagschatten auf das Gesimse geworfen haben. Unter Berücksichtigung dieser Umstände finden wir dann, in der aus der Zeichnung deutlich hervorgehenden Art, die verlangte Schlagschattengrenze auf $\mathfrak{T}_3$ ohne jede überflüssige Linie.

Anm. Der Schüler versuche die Schattenkonstruktion für ein horizontales Gesimse wie das eben Behandelte, nur dass es nicht zwischen zwei Ebenen A_2, B_2 (die $\perp \mathfrak{T}_1$ und $\perp \mathfrak{T}_2$) liegt, sondern zwischen zwei blos zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Ebenen, die mit der $\mathfrak{T}_2$ Winkel von 45° bilden und sich nach einer hinter dem Gesimse liegenden Geraden schneiden.

Fig. 198. 518. Aufg. An einem Wulste $(A_1 a_1)$ dessen Axe a_1 auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, die Schattenkonstruktion auszuführen.

Aufl. Wir konstruiren zunächst die Schattenlinie des Wulstes nach den früher (394) gegebenen Regeln, wobei wir in jedem Riss nur die Theile der Schattenlinie zeichnen, welche in Bezug auf die entsprechende Tafel sichtbar sind. Wir erhalten zwei getrennte Schattenlinien (B, C); B gehört dem konvexen, C dem konkaven Theile des Wulstes an und ist C_2 ganz unsichtbar, während von C_1 die (gezeichnete) Hälfte sichtbar ist. Dieses C_1 berührt stets den ersten Riss des Wulstäquators in einem Punkte c_1 so, dass eine Tangente an C_1 im Punkte c_1 parallel mit S_1 (dem ersten Risse des Lichtstrals) ist. Wenn aber, wie in unsrer Zeichnung (Fig. 198), an C_1 noch eine Tangente parallel zu S_1 möglich ist, die nach einem (ausserhalb des ersten Risses des Aequators liegenden) Punkte b_1 berührt,

so kann man sich leicht überzeugen, dass der Bogen von C, dessen erster Riss b_1c_1 ist, eine virtuele Schattenlinie ist. Nimmt man nemlich eine Parallele zu S_1 an, die zwischen b_1 und c_1 liegt, z. B. die D_1 (dieses D_1 schneidet C_1 in d_1 und e_1) so schneidet die Ebene D_1 den Wulst nach einer Curve D_3 (Fig. 198 a). Legt man an diese Curve Tangenten parallel zum Lichtstral, so berühren sie nach Punkten d_3 und e_3 deren ersten Risse d_1, e_1 sind. Man sieht aber (aus 198 a), dass e (und somit alle zwischen b und c liegenden Punkte der Schattenlinie) der virtuelen Schattenlinie angehört. Zugleich aber sieht man (aus 198 a), dass der in d streifende Stral den Wulst in einem Punkte f schneidet, d. h. dass der reele Theil der Schattenlinie C auf den Wulst Schlagschatten wirft. Wir haben diesen Schlagschatten auf einer Seite von S_1 gezeichnet; wie man ihn findet ist bekannt. Wir denken uns nemlich durch alle Punkte von C Stralen gelegt, welche einen Stralencylinder geben und suchen den Schnitt dieses Cylinders mit dem Wulst (s. 441).

Siebenter Abschnitt.

Parallel-Perspektive.

§ 36.

Allgemeine Erklärungen darüber.

519. Die meisten in der Anwendung vorkommenden Körper enthalten rechtwinkelige Parallelepipede, oder wenigstens drei Systeme von Parallellinien (eines parallel zu X, eines zu Y, und eines zu Z), die gegenseitig auf einander senkrecht stehen, und so liegen, dass das eine (Z) vertikal steht, während die beiden andern (X, Y) horizontal liegen. Zur graphischen Bestimmung solcher Körper nehmen wir bekanntlich zwei aufeinander senkrechte Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) so an, dass die eine ($\mathfrak{T}_1$) horizontal (also senkrecht zum System Z), die andere ($\mathfrak{T}_2$) vertikal und parallel zum System X (also senkrecht zu Y) ist. Meistens brauchen wir noch eine dritte Tafel ($\mathfrak{T}_3$), die senkrecht zu X steht (die Seitentafel). Zeichnen wir die Risse der Punkte und Linien des bestimmenden Körpers auf diesen drei Tafeln, so ist dadurch der Körper bestimmt, und kann man auch aus diesen Rissen die Maſse für die vorkommenden Strecken und Winkel abnehmen. So sehr sich desshalb diese drei Risse für Zeichnungen eignen, nach denen gearbeitet wird, so haben sie doch den Nachtheil, dass sie nicht übersichtlich sind, da man die drei Risse zusammenhalten muss, um daraus die Gestalt des Körpers zu erkennen.

Zu einer übersichtlichen graphischen Darstellung des erwähnten Körpers eignet sich besser ein Riss auf einer neuen Tafel [wir wollen sie $\mathfrak{T}'$ (sprich: Tafel prim) und einen Riss auf ihr $\mathfrak{R}'$ (sprich: Riss prim) nennen] die gegen die drei Geraden X, Y, Z schief steht.

Fig. 199.b. 520. Hat man nun ein rechtwinkliches Parallelepiped — wir wollen diesen Körper von nun an kürzer Rechtseit nen-

nen — mit vertikalen Kanten, deren eine wir mit Z bezeichnen, und sucht man die Risse seiner Seitenflächen auf der 𝔗′, indem man durch die Ecken des Körpers parallele Stralen (die je nach Umständen zu der 𝔗′ senkrecht oder auch schief stehen) legt, und ihre Schnitte mit 𝔗′ sucht, so werden die 𝔑′ aller Seiten Parallelogramme, und der ganze 𝔑′ des Körpers wird die Gestalt (Fig. 199. b) annehmen.

Wie wir die 𝔗′ und die Stralen am besten annehmen, und wie wir daraus die Zeichnung finden, werden wir noch angeben. Zunächst sei nur bemerkt, dass wir stets diese den 𝔑′ vorstellende Zeichnung so in unser Blatt legen werden, dass die 𝔑′ derjenigen Kanten des Rechtseits (rechtwinkliches Parallelepiped), welche vertikal stehen, senkrecht zum unteren Rande des Blattes werden, und dass die unteren Punkte dieser Kanten den unteren Punkten ihrer 𝔑′ entsprechen.

521. Um den 𝔑′ eines Rechtseits zu finden, können wir so verfahren, dass wir, in seiner bequemsten Stellung gegen die Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$), seinen ersten und zweiten Riss (Fig. 199. a) zeichnen und dann die 𝔗′ und die Richtung der Stralen annehmen und daraus den 𝔑′ nach früheren Regeln suchen. Dann würde sich herausstellen, welchen Winkel die 𝔑′ (X′, Y′, Z′) mit einander bilden. Ferner würde sich dann ergeben, in welchen Verhältnissen die Längen dieser Kanten (X, Y, Z) zu den Längen ihrer 𝔑′ (X′, Y′, Z′) stehen. Allein wir ziehen es vor ein anderes Verfahren einzuschlagen, theils weil es bequemer ist, theils deshalb, damit die genannten Winkel sowie die genannten Verhältnisse so ausfallen, wie wir es für vortheilhaft halten. Wir werden uns nemlich überzeugen, dass, wenn das Rechtseit durch seine Risse (Fig. 199. a) gegeben ist, wir die 𝔑′ von drei in einem Ecke zusammenstossenden Kanten, und somit den (Fig. 199. b) des Rechtseits selbst annehmen dürfen, und es wird immer eine Lage der 𝔗′ und der Stralen sich finden, die dieser Annahme entspricht. Fig. 199. a.

522. Haben wir drei von einem Punkte o ausgehende auf einander senkrechte oder auch schief gegen einander gestellte Gerade $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}$ und legen wir durch o einen Stral, so können wir dessen Lage gegen die Geraden am Besten Fig. 200.

dadurch bestimmen, dass wir den Punkt o angeben, in welchem der von o ausgehende Stral die Ebene abc trifft.

Nehmen wir an, es liegen die Punkte a, b, c (Fig. 200. a) in unserem Zeichnungsblatt, und es treffe der durch o gehende Stral die Ebene abc (also unser Zeichnungsblatt) in o (Wir haben hier diesen Punkt ausserhalb des Dreiecks abc angenommen; er kann aber auch innerhalb desselben, ja selbst in einer Seite, sogar auch in einem Eckpunkte des Dreiecks liegen). Zieht man noch ab und co (welche sich in d schneiden) und denkt man sich durch a, b, c, d und o Stralen gelegt, die parallel oo sind, so werden diese von einer beliebig angenommenen Tafel ($\mathfrak{T}'$) nach den Punkten a′, b′, c′, d′ und o′ geschnitten, deren gegenseitige Lage, je nach der Lage der $\mathfrak{T}'$, verschieden ausfällt. Jedenfalls aber ist $\overline{a'd'} : \overline{b'd'} = \overline{ab} : \overline{bd}$ und $\overline{c'd'} : \overline{d'o'} = \overline{cd} : \overline{do}$. Ist also das Rechtseit gegeben (und damit auch das Dreieck abc, dessen Seiten drei Diagonalen der Seitenflächen des Rechtseits sind) und nimmt man die Figur a′b′c′d′o′ zuerst beliebig an, so ist daraus die Figur abcdo und damit die Richtung des Strales oo bestimmt. Denn zieht man in dem gegebenen Dreiecke abc die Seite ab, so kann man mittelst obiger Proportionen zuerst d und dann o finden. Man kann aber nun auch die Lage der $\mathfrak{T}'$ angeben. Denn denkt man sich durch a, b, c Stralen parallel zu oo gelegt, die man als Mantelkanten eines dreiseitigen Prisma's betrachtet, und dieses durch eine Ebene normal geschnitten, so kann man den Normalschnitt finden. Nun hat man aber noch die Aufgabe, die $\mathfrak{T}'$ so anzunehmen, dass sie das dreiseitige Prisma nach einem zur Figur a′b′c′ ähnlichen Dreieck schneidet — eine Aufgabe, die sich (s. 134) stets lösen lässt.

Fig. 199. 523. Man sieht also, dass, wenn man eine gegebene Pyramide oabc hat, die Gestalt ihres $\mathfrak{N}'$ beliebig angenommen werden kann, dass aber dieser angenommene $\mathfrak{N}'$ dem zu suchenden $\mathfrak{N}'$ nicht kongruent, sondern blos ähnlich ist. Man hätte also noch zu suchen, in welchem Verhältniss man den angenommenen $\mathfrak{N}'$ vergrössern oder verkleinern muss, um den wirklichen $\mathfrak{N}'$ zu erhalten. Da es uns aber stets frei steht eine Zeichnung in einem verkleinerten oder vergrösserten Massstab herzustellen, wenn wir nur das Verhältniss dieses

Mafsstabes zur wirklichen Grösse wissen, so können wir den 𝔑′ unseres Körpers in der That *beliebig annehmen*, wenn wir nur angeben, wie gross X, Y, Z *wirklich sein sollen*. Dieser Satz, dass man den 𝔑′ *einer dreiseitigen Pyramide beliebig annehmen* darf, wird, nach seinem Entdecker, der *Pohl'sche* Satz genannt.

524. Der 𝔑′ eines Rechtseits hat zum Umriss ein Sechseck Fig. 199 (Fig. 199 b), innerhalb desselben zwei Punkte (a′, b′) liegen, b u. c. welche die 𝔑′ von Ecken des Rechtsseits vorstellen und zwar ist a′ der 𝔑′ eines Punktes der *oberen*, b′ der *unteren* Seite des Rechtsseits. Zeichnen wir nun, wie in Fig. 199 b, die von a′ ausgehenden Kanten als *sichtbare*, so dass also die *obere* Fläche des Rechtsseits *sichtbar* ist, so wollen wir diesen 𝔑′ *Obersicht* heissen. Zeichnen wir aber, wie in Fig. 109 c so, dass die *untere* Fläche sichtbar ist, so wollen wir diesen 𝔑′ *Untersicht* nennen. In beiden Fällen wollen wir denjenigen *innerhalb* des Sechsecks liegenden Punkt, der als *sichtbar* angesehen wird, als den 𝔑′ des Anfangspunktes (Ursprung) und die von ihm ausgehenden Kanten (X′, Y, Z′) als *die* 𝔑′ *der Koordinatenaxen* betrachten, von denen, wir wiederholen es, X *parallel* und Y *senkrecht* zum Schnitt der beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$) ist. Zugleich setzen wir hier ein für allemal fest, dass in allen folgenden Parallel-Perspectiven der Ursprung stets ein *vorderer Eckpunkt* des Rechtsseits (Fig. 199 a) ist, der

1) für *Obersicht rechts oben*

2) für *Untersicht links unten*

liegt. Ferner setzen wir fest, dass X′

1) für *Obersicht links* von Z′

2) für *Untersicht rechts* von Z′

liegt, wie dies aus unserer Zeichnung zu ersehen ist. In Folge dieser Feststellungen können wir für *Ober-* und *Untersicht* stets angeben, welche Eckpunkte des Rechtseits den Eckpunkten in seinem 𝔑′ entsprechen.

525. Hat man von einem Rechtseit den 𝔑′ zu suchen, so hat das keine Schwierigkeit, da wir zunächst die 𝔑′ von X, Y, Z beliebig annehmen können. Sollen aber nun die 𝔑′ der übrigen

Ecken und Kanten gezeichnet werden, so müssen wir uns erinnern, dass für Parallelrisse der Satz gilt:

Parallele Gerade haben parallele $\mathfrak{R}'$.

Dadurch können wir leicht die $\mathfrak{R}'$ der Kanten des Rechtseits finden. Sollen aber die $\mathfrak{R}'$ von anderen Punkten gesucht werden, so brauchen wir noch den Satz:

Die $\mathfrak{R}'$ paralleler Strecken verhalten sich wie die Strecken selbst.

526. Ist ein Rechtseit durch seine Risse ($\mathfrak{R}_1$ u. $\mathfrak{R}_2$) gegeben und hat man seinen $\mathfrak{R}'$ angenommen und soll der $\mathfrak{R}'$ eines auf einer Kante (z. B. ab) des Körpers angenommenen Punktes m gefunden werden, so findet man m' durch die Proportion $\overline{a'm'} : \overline{am} = \overline{a'b'} : \overline{ab}$. Es ist also am wie eine vierte Proportionale (auf bekannte Art) durch Konstruktion zu finden.

Anm. Ist, wie gewöhnlich, die Länge der Kante ab ebenso wie alle anderen Strecken durch eine Anzahl Längeneinheiten eines bestimmten Maſsstabs gegeben, so bestimmt man ihren $\mathfrak{R}'$, den man, wie oben gezeigt, beliebig annehmen kann, indem man den Maſsstab für diesen $\mathfrak{R}'$ festsetzt. In diesem Falle findet man a'm', indem man am nach dem Maſsstab von ab und für a'm' ebensoviele Längeneinheiten nach dem Maſsstab des $\mathfrak{R}'$ von a'b' nimmt.

Fig. 201. 527. Ist, ausser den Rissen und dem $\mathfrak{R}'$ eines Rechtseits (von dem $\mathfrak{R}'$ sind hier blos drei zusammenstossende Kanten gezeichnet) ein beliebiger Punkt a durch seine Risse (a_1, a_2) gegeben (Fig. 201 a) und sollen wir seinen $\mathfrak{R}'$ suchen, so betrachten wir drei in einem Ecke o zusammenstossende Kanten des Rechtseits als Koordinatenaxen (X, Y, Z) und bestimmen, wie aus der Zeichnung (Fig. 201 a) ersichtlich, die Koordinaten (x, y, z) des Punktes a. Hieraus suchen wir die Längen dieser Koordinaten im $\mathfrak{R}'$ (Fig. 201 b), wobei wir, wie aus voriger Nr. hervorgeht, x', y', z' entweder als vierte Proportionalen konstruiren, oder ausser dem Maſsstab für X, Y, Z noch drei Maſsstäbe, nemlich für X', für Y' und für Z' geben und darnach x', y' und z' beziehungsmessen. Wie man nun in dem $\mathfrak{R}'$ aus x' y' z' den $\mathfrak{R}'$ von a, nemlich a' (Fig. 201 b) findet, geht klar aus der Zeichnung hervor.

Hiebei sieht man, dass der (in Fig. 201 b) mit a_1' bezeichnete Punkt der $\mathfrak{N}'$ des in der $\mathfrak{T}_{1}$, (als welche, wir stets XY ansehen), liegenden ersten Risses (a_1) von a ist.

528. Hat man wieder den $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{N}'$ eines Rechtseits und sind (in Fig. 201 b) a_1' und a' gegeben und sollen hieraus a_1 und a_2 (Fig. 201 a) des entsprechenden Punktes a gesucht werden, so dürfen wir nur den umgekehrten Weg der vorigen Nr. einschlagen, um die verlangten Risse (a_1' und a_2) zu erhalten. Fig. 201.

Hätte man aber blos a' gegeben (und a_1' nicht) so könnte man von a' eine Parallele zu Z' zeichnen, darauf den Punkt a_1' beliebig annehmen und dann a_1, a_2 suchen; es gäbe also unendlich viele Punkte a, die dem a' entsprechen. Während also, sobald $X'\,Y', Z'$ angenommen sind aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes sich sein $\mathfrak{N}'$ bestimmt finden lässt, ist umgekehrt aus a' das a_1 und a_2, also auch der Punkt a nicht bestimmt. Dies lässt sich leicht erklären; denn a' ist ein einziger Riss des Punktes a, und mit einem Riss ist ein Punkt nicht bestimmt, sondern nur ein Stral, in dem der Punkt liegen soll.

Will man also mit dem oben angegebenen Verfahren nicht blos den $\mathfrak{N}'$ eines Körpers aufsuchen, sondern auch den Körper bestimmen, so muss man für jeden Punkt a, dessen $\mathfrak{N}'$ (a') gezeichnet ist, auch noch den $\mathfrak{N}'$ seines ersten Risses (nemlich a_1) kennen.

529. Sucht man den $\mathfrak{N}'$ eines Körpers nach den angegebenen Regeln auf, indem man zuerst den $\mathfrak{N}'$ des Theiles des Körpers, welcher ein Rechtseit ist (sollte ein solcher Theil nicht vorhanden sein, so fügen wir ein Rechtseit, etwa als Unterlage, dem Körper an) beliebig annimmt und dann den $\mathfrak{N}'$ eines beliebigen Punktes mittelst der R' seines Koordinaten (x, y, z) sucht, so nennt man diesen $\mathfrak{N}'$ die Parallelperspektive des Körpers. Um also die Parallelperspektive eines Körpers zu finden, beginnen wir mit der Annahme der Perspektive des Rechtseits und suchen die $\mathfrak{N}'$ der übrigen Punkte wie a' in der vorigen Nummer.

530. Will man aus dem $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ (Fig. 202 a) und dem $\mathfrak{N}'$ (Fig. 202 b) eines Rechtseits die Richtung der zur Aufsuchung des $\mathfrak{N}'$ anzunehmenden Stralen finden, so kann dies folgendermassen leicht geschehen. Der Punkt o' (Fig. a) ist zugleich Fig. 202.

der $\mathfrak{R}'$ eines Punktes der unteren Fläche, dessen Koordinaten (x', y') aus Figur b hervorgehen. Sucht man daraus x und y und trägt diese nach Fig. a, so erhält man einen Punkt a (Fig. a), der mit o denselben $\mathfrak{R}'$ hat und ist demnach oa die Stralenrichtung für Obersicht. In ähnlicher Art finden wir diese Richtung für Untersicht.

§ 37.

Arten von Parallel-Perspektiven.

531. Wir haben gesehen, dass man die Perspektive eines Parallelepipeds beliebig annehmen kann. Man darf also

1) die Winkel, welche X' und Y' mit Z'

2) die Verhältnisse $\frac{X'}{X}, \frac{Y'}{Y}, \frac{Z'}{Z}$

beliebig annehmen.

Was nun den letzteren Punkt betrifft, so ist klar, dass es am vortheilhaftesten ist, wenn wir die drei Verhältnisse $= 1$ annehmen. Dann ist auch für jeden Punkt a sein $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ und wird dadurch die Aufsuchung von a' aus a_1 und a_2 (s. 527) ausserordentlich einfach, da wir keine vierten Proportionalen zu konstruiren brauchen. Wir werden daher von nun an stets die genannten Verhältnisse $= 1$ gesetzt voraussetzen.

Anm. Es kann sich treffen, dass diese einfache Einnahme der genannnten Verhältnisszahlen auf Zeichnungen führt, die nicht schön aussehen, oder sonst wie nicht passend erscheinen, indem vielleicht Flächen sich decken, wodurch die Zeichnung unklar wird. Dies ist namentlich der Fall wenn man die Perspektiven von Kristallen, mit denen wir uns aber hier nicht abgeben, darstellen will. Dann nimmt man diese Verhältnisse anders an. Das Verfahren zur Aufsuchung von a' aus a_1 und a_2 ist aber auch dann (aus Nr. 527) bekannt und wird nur umständlicher, indem man x', y', z' aus x, y, z durch Konstruktion von Proportionalen finden muss.

Setzt man voraus, dass die Stralen durch welche man die $\mathfrak{R}'$ der Punkte auf $\mathfrak{T}'$ findet, zu dieser Tafel senkrecht stehen, so nennt man eine solche Parallelperspektive axonometrische Projektion; man unterscheidet drei Fälle:

1) Die isometrische Projektion, wenn die 𝔗′ gegen X, Y und Z gleiche Neigungen hat;

2) die monodymetrische oder dymetrische Projektion wenn die 𝔗′ blos zu zwei Axen gleich geneigt ist;

3) die anisometrische oder trimetrische Projektion, wenn die 𝔗′ gegen alle drei Axen ungleiche Neigung hat.

Wir werden aber in Folgendem, wie schon gesagt, stets nur solche Perspektiven darstellen, bei welchem $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$ genommen wird.

532. Legt man die Stralen zur Aufsuchung der Parallelperspektive eines Körpers so, dass sie mit den drei Koordinatenaxen X, Y, Z gleiche Winkel bildet und stellt die 𝔗′ senkrecht zu diesen Stralen, so bilden diese Axen auch mit der 𝔗′ gleiche Winkel und sind demnach die drei Verhältnisse $\frac{X'}{X}, \frac{Y'}{Y}, \frac{Z'}{Z}$ einander gleich und zwar ist jedes dieser Verhältnisse $= \sqrt{\frac{2}{3}}$. Denken wir uns demnach den Körper, welchen wir zur Aufsuchung des 𝔑′ benützen in einem $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösseren Mafsstabe, als den darzustellenden Körper, angenommen, so werden alle mit den Koordinatenaxen parallele Gerade in der Perspektive ihre Längen behalten. Was aber die spitzen Winkel betrifft, welche die Axen X′ und Y′ mit Z′ machen, so sind diese $= 60^0$. Nehmen wir daher die Axen in der Perspektive gleich den entsprechenden Axen selbst und die Winkel (an den Eckpunkten innerhalb der 𝔑′) von X′, Y′, Z′ je gleich 120^0 so entsprechen diese Annahmen, wie oben gesagt, dem Falle, wo die 𝔗′ auf den Stralen senkrecht steht und die Stralen mit den Axen gleiche Winkel bilden. Man nennt diese Parallelperspektive die isometrische Projektion.

533. Denkt man die Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) des Parallelepipeds wie oben (Fig. 199 a) angenommen und betrachtet man die $\mathfrak{T}_2$ als 𝔗′, die Stralen aber so gerichtet, dass sie mit der $\mathfrak{T}_2$ Winkel von 45^0 bilden, so werden dadurch nicht blos der 𝔑′ der Axen X und Z, sondern auch die 𝔑′ aller Linien, die in Ebenen ‖ 𝔗′, liegen, mit den Linien selbst parallel und gleich ausfallen. Es wird aber auch der 𝔑′ der Axe Y so lange werden, als die Axe selbst ist. Es sind also auch hier, wie wir es ja haben wollen, die 𝔑′ der Koordinatenaxen so lange als die ent-

sprechenden Axen selbst. Zugleich ist aber auch der Winkel von X' und $Z' = 90^0$, während man den spitzen Winkel von Y' und Z' beliebig wählen kann, aber gewöhnlich $= 45^0$ macht.

Diese Parallelperspektive führt den Namen Kavalierperspektive.

Anm. Obgleich man wohl selten eine Anwendung davon machen wird, wollen wir doch bemerken, dass wenn wir bei der Kavalierperspective (wo also die $\mathfrak{T}_2$ als $\mathfrak{T}'$ angenommen wird und die Stralen unter 45^0 gegen $\mathfrak{T}_2$ stehen) eine Ebene annimmt die senkrecht $\mathfrak{T}_2$ ist und deren zweite Spur senkrecht zu den Stralen steht, jede in dieser Ebene liegende Figur zur Perspektive eine ihr kongruente Figur hat. Den Beweis hiefür zu finden sei dem Schüler überlassen.

534. Die beiden genannten besonderen Arten von Parallelperspektiven, nemlich die isometrische Projektion und die Kavalierperspektive sind die gewöhnlich vorkommenden und die wir auch zur Anwendung empfehlen wollen, da sie vor anderen Perspektiven gewisse Eigenschaften voraus haben, die für die Anwendung bequem sind.

Die isometrische Projektion bietet, wie wir sehen werden, unter Umständen dadurch Vortheile, dass für sie die Stralen auf der $\mathfrak{T}'$ senkrecht stehen; besonders angenehm ist sie aber aus folgenden Rücksichten. Die drei eine Ecke bildenden Seiten des Parallelepipeds, welche ursprünglich Rechtecke sind, gehen in der Perspektive gewöhnlich in Rhomboide über, werden also im $\mathfrak{R}'$ verzerrt. Diese Verzerrung eines in ein Rhomboid übergegangenen Rechteckes ist um so geringer, je grösser der spitze Winkel des Rhomboids ist. Bei der isometrischen Projektion nun ist für alle Seitenflächen des Rechtseits die Verzerrung gleich und für alle nicht gross da hier der genannte spitze Winkel $= 60^0$ ist. Dadurch erhält hier die Perspektive ein hübsches Ansehen und ist für jede Seitenfläche der Flächenraum der Perspektive nicht viel kleiner als er ursprünglich war.

Dagegen ist bei der Kavalierperspektive die Verzerrung der Flächen XY, ZY sehr bedeutend, wogegen allerdings die Fläche XZ gar keine Verzerrung zeigt. Aber es sieht eben nicht gut aus, dass diese drei Flächen so sehr verschiedene Ver-

zerrungen haben. Sehr vortheilhaft ist es aber bei dieser Perspektive, dass für die Fläche XZ Alles in der Perspektive gerade so aussieht, wie in der Fläche selbst, was namentlich vortheilhaft ist, wenn in einer solchen Fläche Curven, besonders Kreise, vorkommen, da die Perspektiven der letzteren wieder Kreise sind.

Wir werden daher in der Anwendung für gewöhnlich einer der beiden letztgenannten Perspektiven meistens aber der isometrischen Projektion (deren Vorzüge in den folgenden Aufgaben noch besonders hervortreten werden) uns bedienen; nur wenn wir in einem besonderen Falle wahrnehmen, dass die perspektivischen Bilder, welche uns diese beiden Perspektiven liefern, unschön oder unvortheilhaft sind, werden wir die Winkel X′Z′ und Y′Z′ anders und zwar so wählen, dass das Bild besser ausfällt. Ja wenn auch dadurch dem Uebel nicht abgeholfen werden kann, werden wir versuchen durch passende Annahmen der Verhältnisse $\frac{X'}{X}$, $\frac{Y'}{Y}$; $\frac{Z'}{Z}$ zu einem guten Ziele zu gelangen. Aber es ist in diesem Falle vortheilhafter keine axonometrische Projektion (s. 530 Anm.), bei welcher die Stralen auf der 𝔛′ senkrecht stehen und daher die Verhältnisszahlen von den Winkeln X′Z′, Y′Z′ abhängen, also das eine aus dem andern gesucht werden muss, vorauszusetzen, sondern diese Winkel und Verhältnisse nach Bedürfniss willkürlich zu wählen.

§ 35.

Parallelperspektivische Aufgaben.

535. **Aufg.** Es sind gegeben (Fig. 203a) ein Körper, der besteht aus einem Rechtseit und einer Pyramide (deren Grundfläche auf der oberen Seitenfläche des Rechtseits steht), Fig. 203 zusammengesetzt ist; man soll die Perspektive (Fig. 203b) dieses Körpers finden. Fig. 203.

Aufl. Wir zeichnen zunächst die Perspektive des Rechtseits (Fig. 203b)*) und suchen dann zuerst die Perspektive

*) Der Allgemeinheit wegen, haben wir die Winkel X′Z′ u. Y′Z′ beliebig angenommen; der Schüler kann dieselben so wählen, dass er entweder eine isometrische Projektion oder eine Kavalierperspektive erhält.

(a', b', c') der Eckpunkte a, b, c der Grundfläche unserer Pyramide. Da diese Punkte auf der oberen Fläche des Rechtseites liegen, so werden sie sichtbar, wenn wir, wie es in unserer Zeichnung geschehen ist, Obersicht wählen. Dann betrachten wir zugleich die obere Fläche als $\mathfrak{T}_1$. Demnach liegen a, b, c in der $\mathfrak{T}_1$ und sind deren z Koordinaten = o. Tragen wir daher, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, die Koordinaten x, y (Fig. a) des Punktes a nach x', y' (Fig. b) so erhalten wir a' und in ähnlicher Art finden wir b', c' und d'_1, woraus wir (durch Uebertragung der z Koordinate des Punktes d nach der Perspektivzeichnung (Fig. b) die Perspektive d' erhalten.

Wäre blos die Perspektive (Fig. b) unseres Körpers gegeben ohne Buchstaben und ohne erläuternden Text und sollten wir aus ihr die Risse ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, Fig. a) finden, so wäre das eigentlich nicht möglich, da wir ja blos einen Riss (nemlich den $\mathfrak{R}'$) des Körpers haben und durch einen Riss sich ein Gebilde nicht bestimmen lässt. Allein wir dürfen erstens voraussetzen, dass der eine Theil der Perspektive den $\mathfrak{R}'$ eines Rechtsseits vorstellt; dann können wir aus dem $\mathfrak{R}'$ (Fig. b) die Risse (Fig. a) ohne weiteres zeichnen. Wir setzen zweitens voraus, dass die Punkte a, b, c in der oberen Fläche des Rechtseits liegen; denn unter der oberen Fläche können sie nicht liegen, da sich dort die Materie des Rechtseits befindet; und oberhalb dieser Fläche auch nicht, weil sonst die Pyramide, (die doch ein materieller, also auch schwerer Körper ist) keine Stütze hatte. Liegen aber a, b, c in der oberen Fläche (die wir als $\mathfrak{T}_1$ ansehen) so ist es leicht, wie aus der Zeichnung ersichtlich, aus a', b', c' die ersten Risse (a_1, b_1, c_1) zu finden. Darf man endlich (für den Fall die Buchstaben in Fig. b weggelöscht sind) annehmen, dass das untere Ende des aus d' gezogenen Kantenlothes d'_1 ist, so lässt sich auf bekannte Art auch d_1 und d_2 finden.

Anm. Der Schüler versuche dieselbe Aufgabe für den Fall zu lösen, dass die Grundfläche der Pyramide auf der unteren Fläche des Rechtseits liegt und ihre Spitze unterhalb der Grundfläche. Für diesen Fall wird man Untersicht nehmen und die untere Fläche des Rechtseits als $\mathfrak{T}_1$ ansehen.

Fig. 204. 536. Aufg. Von einem Kreise A, der in einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene liegt, die Perspektive zu suchen.

Aufl. Wir setzen hier, wie immer voraus, dass ausser dem gegebenen Gebilde, also hier ausser dem Kreise noch ein Rechtseit gegeben ist, etwa so, dass auf einer Seite dieses Körpers der Kreis liegt. In diesem Falle nun würde sich besonders empfehlen, die Kavalierperspektive anzuwenden, da hier die Perspektive des Kreises wieder ein Kreis ist, der mit dem gegebenen gleichen Halbmesser hat. Man brauchte dann blos die Perspektive des Mittelpunktes zu suchen.

Ist aber die Kavalierperspektive nicht zulässig, sondern ist die isometrische Projektion (oder eine andere Parallelperspektive) angewendet und sucht man den 𝔓′ des Kreises A (dieser 𝔓′ ist bekanntlich eine Ellipse), so nehme man ein in den Kreis eingeschriebenes Quadrat, dessen Seiten mit X, Z beziehungsweise parallel sind, zu Hilfe. Sucht man nemlich die Perspektive dieses Quadrats (in bekannter Weise, wie aus der Zeichnung (Fig. 204) zu ersehen) und zeichnet die Perspektiven seiner Diagonalen, so sind dies offenbar die Axen der Ellipse, welche den 𝔓′ des Kreises vorstellt.

Anm. Ist, wie in unserer Figur (204b) die isometrische Projektion A′ des Kreises gezeichnet und bezeichnet man den Halbmesser des Kreises A mit r, so ist, da die Seite des eingeschriebenen Quadrates $= r\sqrt{2}$, die kleine Axe der Ellipse $A' = r\sqrt{2}$ und die grosse Axe $= 2r\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ferner bilden die Seiten des eingeschriebenen Quadrats in der isometrischen Projektion mit der grossen Axe von A′ Winkel von 30^0. Läge der Kreis A (statt auf der Ebene XZ) auf der Ebene XY oder YZ, so würde seine isometrische Projektion dieselbe Gestalt wie A′ haben (der Schüler wolle diese beiden Fälle durchführen). Endlich haben wir noch zu bemerken, dass man die Ellipse A′ (also die isometrische Projektion eines Kreises auf XY, YZ, oder XZ) sehr leicht als Korbbogen darstellen kann. Trägt man nemlich von der Mitte a′ von A′ auf die grosse Axe $\overline{a'b'}$ gleich der kleinen Halbaxe und auf die kleine Axe $\overline{a'c'}$ gleich der grossen Halbaxe, so sind b′ und c′ die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen, welche sich auf der Geraden c′b′ in einem Punkte d′ berühren und einen Quadranten des Korbbogens bilden, der die Ellipse vorstellen soll. Denn macht man $\overline{b'd'} = \overline{b'e'}$ (Fig. 204b), so ist, (wenn man die Halbaxen

der Ellipse A′ mit α, β bezeichnet) weil $\overline{a'c'} = \alpha$ und $\overline{a'b'} = \beta$ gemacht ist, $\overline{b'e'} = \alpha - \beta$, $\overline{b'c'} = \overline{e'f'} = 2\beta$, also $\overline{c'd'} = \alpha + \beta$; da aber auch $\overline{c'f'} = \alpha + \beta$ ist, so folgt, dass, wenn $\overline{b'e'} = \overline{b'd'}$ auch $\overline{c'd'} = \overline{c'f'}$.

537. Liegt in einer der Seitenflächen (z. B. in der XZ) eines Rechtseits eine beliebige Curve A und soll man deren Perspektive A′ suchen, so darf man nur die Perspektiven von vielen nicht zu weit von einander liegenden Punkten suchen und dieselben durch eine Curve (A′) verbinden. Will man in einem Punkt (a′) von A′ die Tangente finden, so konstruirt man die Tangente an A im Punkte a und sucht die Perspektive dieser Tangente (indem man von einem beliebigen Punkte b der Tangente die Perspektive b′ sucht und a′ mit b′ verbindet).

Ist die Curve A zweiter Ordnung, z. B. eine Ellipse, so kann man in ihr zwei konjugirte Durchmesser annehmen, deren Perspektiven (die wieder conjugirte Durchmesser der Perspektive vorstellen) suchen, und daraus die Axen der Perspektive der Ellipse bestimmen.

Fig. 205. 538. Aufg. Die Parallelperspektive einer Curve A zu finden, die in einer zu einer Tafel (z. B. zur $\mathfrak{T}_1$) senkrechten Ebene liegt (deren erster Riss also eine Gerade ist).

Aufl. Im Allgemeinen nimmt man auf der Curve so viele Punkte an, als man zur Verzeichnung derselben nöthig zu haben glaubt und behandelt jeden Punkt a so, wie oben (527) angegeben, dass man den $\mathfrak{N}'$ seines ersten Risses, nemlich a_1' und daraus mittelst seiner z Koordinate a′ sucht. Liegen dann, wie in unserm Beispiele, alle ersten Risse der Curvenpunkte in einer Geraden, so gilt dies auch für die Perspektiven dieser ersten Risse.

Ist aber, wie in unserer Zeichnung (Fig. 205 a) der $\mathfrak{R}_2$ der Curve ein **Kreis** (die Curve A selbst also eine **Ellipse**), so nimmt man die Axen X, Y, Z wie in unserer Zeichnung so an, dass der Ursprung o in den Mittelpunkt von A fällt und sucht auf schon bekannte und in der Zeichnung deutlich angedeutete Art die $\mathfrak{N}'$ (a′, b′, c′, d′) der Scheitel (a, b, c, d) der Ellipse A, wodurch man von dem $\mathfrak{N}'$ unserer Ellipse, der eine Ellipse A′ (Fig. 205 b) wird, zwei konjugirte Durchmesser erhält und diese Ellipse konstruirt werden kann. — Man wird leicht sehen, dass,

wenn (wie in unserer Zeichnung) das x und y des Punktes a einander gleich sind und die Perspektive eine isometrische Projektion ist, die Perspektiven a′, b′, c′, d′ die Scheitel von A′ werden. Ferner, dass dann das Axenverhältniss der Ellipse A′ dasselbe ist, wie das oben (536. Anm.) angegebene, und demnach auch diese Ellipse sich in ähnlicher Art wie oben, als Korbbogen darstellen lässt.

Anm. Wäre A_2 (statt eines Kreises) eine Curve zweiter Ordnung, deren Axen irgendwie liegen, so würde man auf der Curve die beiden Axen, oder eine Axe und eine dazu konjugirte Sehne annehmen, deren Perspektiven suchen und wieder zwei konjugirte Durchmesser oder einen Durchmesser und eine dazu konjugirte Sehne erhalten.

539. Aufg. Die isometrische Projektion A′ (Fig. 206 b) einer Schraubenlinie A zu finden deren Axe auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (Fig. 206 a). Fig. 206.

Aufl. Nachdem wir in der vorigen Nummer schon angegeben haben, wie man überhaupt die Parallelperspektiven von Curven findet, wird es genügen, wenn wir die isometrische Projektion A′ eines halben Ganges unserer Schraubenlinie zeichnen und es dem Schüler überlassen, die Konstruktion dieser Perspektive selbst zu finden. Zugleich möge er auch versuchen in einem Punkte (a′) von A′ die Tangente dadurch zu finden, dass er in dem entsprechenden Punkte (Fig. 206 a) die Tangente konstruirt (s. 226) und die isometrische Projektion dieser Tangente aufsucht.

540. Hat man die Perspektive eines Cylinders zu suchen, so sucht man die Perspektiven der Grundflächen und die einer geraden Erzeugenden, so kann man die verlangte Perspektive zeichnen. Wir wollen hierüber zunächst folgendes Beispiel machen.

Aufg. Von einer Konsole deren geraden Erzeugenden parallel zu X laufen, sind gegeben (Fig. 207 a) die Risse ($\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$); man sucht ihre Perspektive. Fig. 186.

Aufl. Es wird genügen, wenn wir (in Fig. 207 b die Obersicht, in Fig. 207 c die Untersicht) die Perspektiven, beispielsweise die Kavalierperspektiven, darstellen und die Konstruktion dem Schüler überlassen.

Anm. Hat man die Perspektive eines Kegels zu finden, so sucht man natürlich die Perspektive A' seiner Grundlinie (A) und die a' seiner Spitze (a), und zieht von a' Tangenten an A' (und wenn A' begrenzt, noch von a' Gerade nach den Endpunkten von A').

Fig. 208. 541. Denkt man sich in einer Vertikalebene, die mit der $\mathfrak{T}_2$ einen Winkel von 45⁰ (Gehrungswinkel nennt man den Winkel von 45⁰ in der Praxis) bildet, irgend eine Figur (Gehrungslinie) und betrachtet diese als Schneidlinie eines Cylinders der || X ist und zugleich als Schneidlinie eines Cylinders || Y, so haben wir zwei gleichgestaltete Cylinder, die, wie man sagt, auf Gehrung zusammengefügt sind. Der zweite Riss der Gehrungslinie ist dann zugleich der zweite Riss des Cylinders || Y (denn dieser Cylinder steht ja senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$) und da beide Cylinder gleiche Gestalt haben, so gibt der R_2 der Gehrungslinie das Profil beider Cylinder an. Da die Gehrungslinie eine Curve ist, wie wir sie oben (538) behandelt haben, so wird der Schüler im Stande sein, die $\mathfrak{R}'$ von solchen auf Gehrung zusammenstossenden Cylindern zu suchen. Wir geben (Fig. 208 a) den Aufriss und den (von unten nach oben gesehenen) Grundriss eines Körpers, der (wie man wohl erkennen wird) aus einem Rechtseit besteht, das vier auf Gehrung zusammengefügte Cylinder bedeckt. Wie man hieraus den $\mathfrak{R}'$ (in unserer Zeichnung die isometrische Projektion) findet und warum hier die $\mathfrak{R}'$ zweier Gehrungslinien Gerade werden, wollen wir dem Schüler zu untersuchen überlassen.

542. Sucht man die Parallelperspektive einer Kugel, so findet sich, dass dieser $\mathfrak{R}'$ im Allgemeinen eine Ellipse ist. Stehen jedoch, wie bei der isometrischen Projektion, die Stralen senkrecht zur $\mathfrak{T}'$, so ist der $\mathfrak{R}'$ der Kugel ein Kreis. Aber nicht etwa ein Kreis vom Halbmesser der Kugel; denn wir haben ja oben (532) gesehen, dass wir, um die isometrische Projektion eines Körpers zu erhalten, seinen Mafsstab $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösser nehmen müssen. Haben wir daher den $\mathfrak{R}'$ des Kugelmittelpunktes gefunden, so beschreiben wir aus ihm mit einem $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösseren Halbmesser, als des der Kugel, einen Kreis, so ist das der gesuchte $\mathfrak{R}'$.

Ist $\overline{ab}$ (Fig. 209) der Halbmesser der Kugel, $\wedge b = 60^0$, $\wedge d = 45^0$ und $ac \perp bd$, so ist $\overline{ad}$ der verlangte Halbmesser des Kreises.

Man sieht also hier einen grossen Vortheil den die axonometrische Projektion gewährt und der noch in anderen Fällen zur Geltung kommt, wie folgende Nummer zeigt.

543. Aufg. Die isometrische Projektion (Fig. 210) eines Wulstes zu finden, dessen Mittellinie in einer horizontalen Ebene liegt. Fig. 212.

Aufl. Man sucht zuerst die isometrische Projektion A′ der Mittellinie des Wulstes (s. 536); denkt man sich nun den Wulst als Umhüllungsfläche einer Kugel und demnach mit einem Halbmesser α, der $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösser ist, als der Halbmesser der erzeugenden Kugel, aus allen Punkten von A′ Kreise beschrieben, so ist die Umhüllung dieser Kreise der verlangte $\mathfrak{K}'$. Demnach darf man, um diesen zu finden, nur Parallele B′, C′ (Fig. 210) zu A′ zeichnen [hier hat die innere Parallele vier Grate (Rückkehrpunkte), die von A′ um $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal den Kugelhalbmesser entfernt sind], so hat man das Gesuchte.

Anm. In ähnlicher Art kann man bei allen Röhrenflächen, z. B. bei einer Serpentine verfahren. Der Schüler mag sich daran versuchen.

544. Die Parallelperspektive einer beliebigen Drehfläche zu finden, die von zwei Parallelkreisen A, B, welche gleichweit vom Aequator C abstehen, begrenzt und, wie in unserer Zeichnung, nur wenig ausgebaucht ist. Fig. 211.

Aufl. Wir suchen die Perspektiven (A′, B′) der begrenzenden Parallelkreise und dann noch die Perspektive C′ des Aequators und legen an A′, B′, C′ berührende Curven, so erhalten wir die verlangte Perspektive.

Ist, wie in unserer Zeichnung, die Perspektive eine isometrische Projektion, so braucht man von C′ nur die Punkte a′ b′ (also die Hauptscheitel von C′) zu zeichnen.

Anm. Dieses Verfahren passt für alle Parallelperspektiven und zeigt wie man überhaupt bei diesen Zeichnungen verfahren kann, um die Perspektiven von Drehungsflächen zu erhalten.

Wenn, wie hier die Ausbauchung gering ist, so genügen die drei Parallelkreise; wenn nicht, so muss man noch weitere Parallelkreise einschalten.

§ 39.

Schattenkonstruktion an Parallelperspektiven.

545. Wie wir schon gesehen haben, wird ein Körper durch seine Perspektive nicht bestimmt, sondern ist es nothwendig, dass man von jedem Punkte ausser seiner Perspektive auch die seines ersten Risses kennt (s. 535). Sind nun viele Punkte vorhanden und keine Buchstaben an denselben geschrieben (wie dies ja praktisch stets der Fall ist), so wird selbst, wenn die Perspektiven der ersten Risse gezeichnet sind, die Zeichnung undeutlich. Dann lässt sich, wie man sehen wird, dadurch abhelfen, dass man Schattenkonstruktionen an den Perspektiven ausführt.

Man kann die Perspektiven der Schattengrenzen dadurch finden, dass man in den Rissen ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) die Schattengrenzen (nach 6. Abschnitt) konstruirt und dann daraus die Perspektiven derselben sucht. Es gibt aber in vielen Fällen einfachere Mittel zur Aufsuchung der Schattengrenzen.

546. Behalten wir die gebräuchliche Richtung der Lichtstralen bei und suchen wir die Perspektive A′ eines Lichtstrales A und die A'_1 seines ersten Risses A_1, so können wir dadurch leicht den Schlagschatten, den ein gegebener Punkt a auf die $\mathfrak{T}_1$ wirft aufsuchen. Denn dieser Schlagschatten kann offenbar dadurch gefunden werden, dass man durch den Punkt a einen Lichtstral A und durch a_1 den ersten Riss (A_1) des Lichtstrales legt und zusieht von A und A_1 sich schneiden. Hat man daher von einem Punkte a seine Perspektive (a′) und die seines ersten Risses, nemlich a'_1, und legt man A′ durch a′ und A'_1 durch a'_1 so ist der Schnitt von A′ und A'_1 die Perspektive des Schlagschattens von a auf $\mathfrak{T}_1$. Wir können also diese Schattenkonstruktion gleich an der Perspektive ausführen. Wie sich diese Konstruktion gestaltet, wird folgendes Beispiel zeigen.

Fig. 212. 547. Aufg. Es sei (Fig. 212a) ein Rechtseit durch seine Risse ($\mathfrak{R}_1 R_1$) gegeben und sei (Fig. 212b) seine nach der früher gegebenen Anleitung aufgesuchte Perspektive. Man sucht von

einem durch seine Risse (A_1, A_2) gegebenen Lichtstral die Perspektive, sowie die seines ersten Risses.

Aufl. Da wir hier Obersicht angenommen haben, so betrachten wir die obere Seite des Rechtseits als $\mathfrak{T}_1$. Suchen wir nun die $\mathfrak{R}'$ der Punkte a_1, b_1 (in welchen A_1 die X und Y schneidet, so erhalten wir A'_1; suchen wir noch a' mit Hilfe seiner z Koordinate) und ziehen $a' b'_1$ (b' fällt hier offenbar mit b'_1 zusammen) so haben wir A'.

Anm. Für die isometrische Projektion und Obersicht wird A'_1 parallel zum unteren Rande des Blattes, A' aber parallel zu X'.

548. Aufg. Ein aus einem Rechtseit und einer darauf stehenden abgestumpften Pyramide bestehender Körpér ist durch seine Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$,) gegeben und sein $\mathfrak{R}'$ (Fig. b) auf bekannte Art gesucht; man soll seine Schatten konstruiren. Fig. 213.

Aufl. Wir haben hier Obersicht und betrachten daher die obere Fläche des Rechtseits als $\mathfrak{T}_1$; demnach fallen die Eckpunkte der unteren Pyramiden-Grundfläche mit ihren Schlagschatten (auf $\mathfrak{T}_1$) zusammen. Will man von einem Punkte der oberen Grundfläche der Pyramide, z. B. von a, den auf $\mathfrak{T}_1$ fallenden Schlagschatten gleich in der Perspektive finden, so legt man durch a' die Perspektive A' eines Lichtstrals und A'_1 durch a'_1; wo A' und A'_1 sich schneiden das ist der verlangte Schlagschatten. Sucht man so alle Schlagschatten der oberen Punkte, so erhält man den Schlagschatten der Pyramide auf $\mathfrak{T}_1$ und weiss zugleich welche Flächen derselben beschattet sind. (Wir haben alle beschatteten Flächen schraffirt).

Hat man so die Schatten angedeutet und löscht man jetzt alle Buchstaben in der Perspektive, aber auch alle Perspektiven von ersten Rissen, wie a'_1 weg und behält blos die Perspektiven aller Ecken und Linien, nebst den Schatten, so kann man dennoch Fig. a (wir verstehen unter Fig. a, die wir in unserer Zeichnung weggelassen haben, die Risse ($\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$) unseres Körpers) aus Fig. b finden. Denn man sieht zunächst aus dem Schlagschatten, dass die unteren Punkte der Pyramide auf der oberen Fläche des Rechtseits liegen, da diese Punkte mit ihren Schlagschatten zusammenfallen. Man kann ferner auf die in der Figur angegebene Art die Perspektive s' der Pyramidenspitze und die $\mathfrak{s}'$ ihres Schlagschattens finden. Zieht man nun

durch $\mathfrak{s}'$ die Perspektive des ersten Lichtstrales (d. h. eine mit A'_1, dessen Richtung man kennt, parallele Linie), so liegt in dieser Linie s'_1. Dadurch ist man aber im Stande die Perspektiven der ersten Risse aller Mantelkanten und mit diesen aller oberen Eckpunkte der Pyramide zu finden. Wie man aber von jedem Punkte, von welchem die Perspektive und die seines ersten Risses bekannt ist, die Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) findet, haben wir früher (528.) gezeigt. (Der Schüler wolle die Aufsuchung der Risse unseres Körpers versuchen). Man sieht also in der That, dass hier die Perspektive allein in Verbindung mit der Schattenkonstruktion zur Bestimmung des Körpers genügt.

Fig. 214. 549. **Aufg.** Auf einem Rechtseit steht ein Kreiskegel mit kreisförmiger Grundfläche; man sucht seine Perspektive und die Schatten in derselben.

Aufl. Wir überlassen diese Aufgabe dem Schüler und geben zu seiner Unterstützung (in Fig. 214) das Resultat an (in welcher Figur A', A'_1 die Perspektive des durch die Kegelspitze s gehenden Lichtstrales und seines ersten Risses bedeuten). In ähnlicher Art versuche der Schüler dieselbe Aufgabe, nur dass statt des Kegels ein von zwei Parallelkreisen begrenzter Kreiscylinder gegeben ist.

Fig. 215. 550. In unseren bisherigen Beispielen haben wir, um die Schattenkonstruktion gleich in der Perspektive auszuführen, nicht blos die Richtung der Perspektive (A') des Lichtstrales selbst, sondern auch die (A'_1) seines ersten Risses (547.) aufgesucht. Wir wollen jetzt ein Beispiel geben, in welchem man (statt A'_1) A'_3, nemlich die Perspektive des dritten Risses des Lichtstrales (auf einer $\mathfrak{T}_3$, die parallel ist zur Y Z Ebene) aufsucht, und zu dem Ende eine Konsole (s. 517 und 540) als Beispiel wählen (Fig. 215).

Da wir schon früher (540.) gezeigt haben, wie man aus den Rissen ($\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$) die Perspektive einer Konsole findet, so haben wir hier (Fig. 215) gleich die Perspektive (und zwar die isometrische Projektion mit Untersicht) angenommen und zeigen nur, wie man in dieser die Schattenkonstruktion ausführt, wobei wir uns auf die oben (517.) ausgeführte Schattenkonstruktion stützen.

Nach Anleitung der Nr. 544, in welcher gezeigt wurde, wie man für Obersicht A′ und A'_1 des Lichtstrales A findet, kann man eben so gut für Untersicht A′ und A'_3 erhalten. Macht man (Fig. 215) $\overline{a'b'} = \overline{a'c'}$ so ist b′c′ ∥ A'_3; sucht man noch A′, so wird man für isometrische Projektion mit Untersicht finden, dass A′ ∥ Z′ wird.

Zieht man nun ∥ b′c′ eine Tangente an das Profil e′d′f′, welche dieses in d′ berührt, so ist d′ ein Punkt der Schlagschattengrenze d′g′. Legt man durch e′ eine Gerade e′f′ ∥ b′c′ so geht durch f′ die Erzeugende unseres Cylinders auf welcher der Schlagschatten (g′) des Punktes e′ liegt. Zieht man daher durch e′ noch eine Parallele (A′) zu Z′ (welche den 𝔑′ des durch e′ gehenden Lichtstrales vorstellt) so schneidet sie B′ in g′. Nimmt man zwischen d′ und e′ einen Punkt auf dem Bogen d′e′ an, so findet man in ähnlicher Art seinen Schlagschatten auf Bogen d′g′. Zieht man ∥ b′c′ an dem Profil unseres Cylinders eine Tangente, die nach h′ berührt, so erhalten wir die Schattenlinie des Cylinders; ferner in ähnlicher Art wie oben den Schlagschatten des Bogens b′i′.

551. Hat man an Parallelperspektiven Schattenkonstruktionen zu machen, die sich nicht unmittelbar in der Perspektive finden lassen, so muss man nach den früher (6. Abschnitt) gegebenen Regeln die Schattengrenzen an den Rissen ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$) konstruiren, und die 𝔑′ derselben suchen.

Achter Abschnitt.

Central-Perspektive.

§ 40.

Allgemeine Erklärungen.

552. Alle bisher aufgeführten graphischen Darstellungsarten, sowohl die gewöhnlichen Risse ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$) als auch die Parallelperspektiven können dazu dienen, Körper graphisch zu bestimmen; sie werden aber niemals (wie sich in Folgendem herausstellen wird) dazu dienen können, auf unser Auge, wenn es die Zeichnungen betrachtet, den Eindruck zu machen, den der Gegenstand selbst auf es zu machen im Stande ist. Es gibt aber viele Fälle, in denen man mit Hilfe einer Zeichnung dem Auge zeigen will, wie ihm der zu verfertigende Körper von einem gewissen Standpunkte aus erscheinen wird; so dass es schon im Voraus (vor Anfertigung des dargestellten Gegenstandes) beurtheilen kann, ob ihm der Anblick gefällt oder nicht. Wie man solche Zeichnungen erhält, soll hier untersucht werden.

553. Jeder leuchtende Punkt sendet einem ihn betrachtenden menschlichen Auge einen Stralenkegel zu, dessen Spitze der leuchtende Punkt, und dessen Basis das Schwarze im Auge (die Oeffnung in der Iris) ist. Diese Stralen aber werden im Innern des Auges wieder zu einem Punkte auf der Netzhaut, der in der Axe des genannten Stralenkegels liegt, vereinigt, so dass die Wirkung auf die Netzhaut dieselbe ist, als wenn die Oeffnung in der Iris nur ein Punkt wäre (der mit dem Mittelpunkte der Oeffnung zusammenfällt und den wir schlechtweg das Auge heissen wollen), und der leuchtende Punkt nur einen einzigen Stral dem Auge zuführte. Wir wollen daher sagen:

Jeder leuchtende Punkt führt dem Auge (das wir durch einen an bestimmter Stelle befindlichen Punkt, der eigent-

lich den Mittelpunkt der Irisöffnung vorstellt, repräsentiren) einen Lichtstral zu, der die Netzhaut in einem bestimmten Punkte trifft.

Dieses Auftreffen des Strales auf die Netzhaut sagt uns, dass auf der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Auge (d. h. dem Mittelpunkte der Irisöffnung) ein leuchtender Punkt sein müsse, oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, in Folge des Auftreffens des Strales auf die Netzhaut sehen wir den leuchtenden Punkt, und zwar in der Verbindungslinie des getroffenen Punktes (in der Netzhaut) mit dem Auge. Wo aber der leuchtende Punkt in dieser Verbindungslinie liegt, das empfindet das Auge zunächst nicht. Wenn wir also von dem Eindruck den der leuchtende Punkt auf das Auge (durch den ihm zugesendeten Stral) macht nur in so weit Notiz nehmen, als dadurch das Auge einen Punkt in einer bestimmten Geraden sieht, so können wir sagen, wenn man von einem leuchtenden Punkte nach dem (als Punkt an gewisser Stelle aufgefassten) Auge einen Stral zieht, so machen alle Punkte dieses Strales denselben Eindruck auf das Auge, wie der leuchtende Punkt selbst.

554. Haben wir daher eine (eigenes oder reflektirtes) Licht ausstralende Curve, von welcher also jeder Punkt dem (an einer bestimmten Stelle aufgestellten und dem Körper zugekehrten) Auge einen Stral zusendet, so dass diese Stralen im Allgemeinen einen Stralenkegel bilden, und schneiden wir diesen Kegel durch eine Ebene (Tafel), auf welcher wir den Schnitt mit dem Kegel zeichnen, so fallen von dieser Zeichnung aus dieselben Stralen in's Auge wie von der Linie selbst. Es macht also diese Zeichnung, von der Stelle aus gesehen, an welcher sich das Auge befindet, denselben Eindruck auf das Auge, wie die leuchtende Linie selbst.

Da aber diese Zeichnung nichts anderes ist, als der Centralriss (Centralprojektion) der gegebenen Linie auf eine Tafel für ein bestimmtes Centrum (an welches wir bei Betrachtung der Zeichnung das Auge setzen müssen, um von ihr denselben Eindruck zu empfangen, den die Linie selbst machen würde), und da das was wir in Bezug auf eine Linie gesagt haben in gleicher Art auch für Flächen gilt, so sehen wir:

Will man von einem darzustellenden Körper auf einer Tafel eine Zeichnung entwerfen, die auf ein Auge von einem bestimmten Punkte aus betrachtet denselben Eindruck, wie der Gegenstand selbst macht, so betrachtet man den Punkt als Centrum eines Stralensystems, und zeichnet den Centralriss des Gegenstandes auf einer Tafel, die zwischen dem Centrum und dem Gegenstande angenommen wird. Diesen Centralriss nennt man dann die **Perspektive**, oder Centralperspektive des Gegenstandes.

555. Wie wir eben gesehen haben, ist die Centralperspektive eines Körpers nichts weiter als ein Centralriss, den wir dann Perspektive heissen, wenn wir beabsichtigen, die Zeichnung von dem Centrum aus anzusehen (um den Eindruck zu erfahren, den der dargestellte Körper selbst auf das Auge machen würde). Demnach aber müssen wir bei der Wahl des Centrums und der Tafel die beabsichtigte Beschauung der Zeichnung berücksichtigen. Dazu gehört vor Allem, dass wir die Tafel, wie es gewöhnlich vorausgesetzt wird, zwischen dem Auge und dem Gegenstande aufstellen, oder auch noch weiter von dem Auge entfernen, also immer so, dass das Auge gegen die Tafel und den Gegenstand gleichzeitig hinsieht. Es kann also für die Perspektive die Tafel nicht so gestellt werden, dass das Auge zwischen ihr und dem Gegenstande sich befindet.

556. Da wir ferner die ganze Zeichnung von dem Centrum aus auf einmal betrachten wollen, so muss die Entfernung des Auges von der Tafel gross sein im Verhältniss zu den Dimensionen der Perspektivzeichnung. Denken wir uns diese Zeichnung durch ein möglichst eng anschliessendes Rechteck umrahmt, so soll die Entfernung des Auges von der Tafel gleich ein bis anderthalbmal der grösseren Rechteckseite sein.

557. Da es bekannt ist, dass das Auge einen Gegenstand der ihm zu nahe liegt, nicht deutlich sieht, so darf die Entfernung des Auges von der Tafel nicht zu klein, etwa nicht kleiner als 30 Centimeter sein.

558. Wenn wir die in den letzten drei Nummern bezüglich der Wahl des Centrums und der Tafel aufgestellten Gesetze berücksichtigen, so fällt die Aufgabe, die Centralperspektive eines Körpers zu suchen, zusammen mit der Aufgabe, den Centralriss des Körpers zu finden. Wir wollen daher in dem Folgenden § zeigen, wie man diese Aufgabe löst.

§ 41.

Aufsuchung von Centralperspektiven.

559. Bei weitem die meisten Bilder, die Perspektiven von Körpern vorstellen, werden an vertikalen Wänden angebracht, so dass die Ebene der Zeichnung (Perspektivtafel, oder schlechtweg Tafel) vertikal ist. Wir wollen daher die Tafel als die verticale Tafel ($\mathfrak{T}_2$) betrachten, und alle Risse von Punkten und Linien in ihr mit dem Index 2 bezeichnen. Zur Bestimmung des Auges (Centrums), das wir stets mit o bezeichnen, geben wir seinen Riss (o_2) und seinen Abstand von der Tafel. Wir nennen von nun an diesen Abstand schlechtweg Distanz und den Riss (o_2) des Auges den Augpunkt. Um die Distanz zu bestimmen zeichnet man entweder aus o_2 mit der Distanz einen Kreis (Distanzkreis), oder man gibt sie in Zahlen nach einem bestimmten Mafsstabe an, oder man zeichnet sie in wirklicher Grösse oder im verkleinerten Mafsstabe auf. Man kann aber auch durch das Auge (o) eine horizontale Ebene legen, die man als erste Tafel ($\mathfrak{T}_1$) betrachtet, und welche die Tafel ($\mathfrak{T}_2$) nach einer Geraden schneidet, die man Horizont nennt und mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Kluppt man die $\mathfrak{T}_1$ um $\mathfrak{H}$ in das Zeichnungsblatt, so kommt o nach einem Punkt o_1 so, dass $o_1 o_2 \perp \mathfrak{H}$ und $\overline{o_1 o_2}$ = der Distanz wird. Obgleich wir auf diese Art wieder zwei Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) erhalten, so werden wir doch meistens nur von der $\mathfrak{T}_2$, der Perspektivtafel Gebrauch machen, und sie daher, wie schon bemerkt schlechtweg Tafel nennen. Ebenso werden wir unter Riss, Spur stets den Riss oder die Spur auf der zweiten Tafel (der Perspektivtafel) verstehen.

560. Wenn wir nun zeigen wollen, wie man die Perspektiven von Körpern konstruirt, so werden wir begreiflicherweise

zuerst diese Aufgabe an einfachen Gebilden lösen. Hiebei machen wir von den früher (im ersten Bande, Nr. 75) gegebenen Gesetzen über Centralrisse Anwendung, von denen wir die wichtigsten hier wiederholen und noch weitere hinzufügen wollen. Wir werden aber Auge statt Centrum und Perspektive statt Centralriss sagen.

1) Jede durch das Auge gelegte Gerade heisst ein Stral.

2) Die Perspektive eines Strales ist ein Punkt, und zwar der, in welchem der Stral die Tafel trifft (die Spur des Strales). Steht der Stral senkrecht zur Tafel, so ist seine Perspektive der Augpunkt (o_2).

3) Die Perspektive eines Punktes ist die Spur des durch den Punkt gelegten Strales.

4) Nach einer unbegrenzten Geraden (die kein Stral ist) lassen sich unzählige Stralen führen, von denen einer mit der Geraden parallel ist, und der Hauptstral der Geraden heissen soll. Die Spur dieses Hauptstrals (welche also die Perspektive des unendlich fernen Punktes der Geraden ist) wird der Fluchtpunkt oder die Flucht der Geraden genannt.

5) Alle nach einer Geraden A gezogenen Stralen bilden eine Ebene, die Stralenebene der Geraden, welche die Tafel nach einer Geraden A′ schneidet; A′ heisst die Perspektive der Geraden A. Um also A′ zu erhalten braucht man blos zwei Punkte davon zu finden. Wo möglich werden wir als solche Punkte die Spur (Schnitt mit der Tafel) und die Flucht von A suchen.

6) Die Hauptstralen von Parallellinien fallen zusammen, also auch ihre Fluchtpunkte. Wir haben also den Satz:

Die Perspektiven paralleler Geraden schneiden sich in einem Punkte, dem **Fluchtpunkte.**

7) Ist eine Gerade A mit der Tafel parallel, so hat sie keinen Fluchtpunkt. Dagegen ist ihre Perspektive A′ parallel mit der Geraden A selbst. Da aber auch ihr Riss A_2 mit ihr parallel ist, so folgt der Satz:

Ist eine gerade A parallel zur Tafel, so ist $A' \parallel A_2$.

8) Jede Ebene, welche durch das Auge geht heisst Stralenebene; ihre Spur ist ihre Perspektive. Steht die Ebene noch senkrecht zur Tafel, so geht die Perspektive der Ebene durch o_r.

9) Hat man eine beliebige Ebene 𝔄 und nimmt man in ihr eine Gerade A an, und sucht den Fluchtpunkt von dieser, so muss man durch o eine Parallele B zu A legen; thut man dasselbe für alle Geraden von 𝔄 so bilden die geraden B eine Ebene 𝔅, welche ‖ 𝔄 ist, und die Hauptstralenebene von 𝔄 heissen soll. Die Spur (Schnitt mit der Tafel) von 𝔅, welche offenbar alle Fluchtpunkte der Geraden der Ebene 𝔄 enthält, soll die Fluchtlinie oder die Flucht der Ebene 𝔄 heissen. Offenbar enthält die Spur von 𝔄 alle Spuren von Linien der Ebene 𝔄 und sind die Spur und die Flucht der Ebene 𝔄 einander parallel. Wir haben daher folgende Sätze:

a) Um die Flucht einer Ebene 𝔄 zu erhalten legt man durch o eine Ebene (Hauptstralenebene) 𝔅 ‖ 𝔄, so ist die Spur von 𝔅 die verlangte Flucht;

b) Spur und Flucht einer Ebene sind parallel;

c) liegt eine Gerade A in einer Ebene 𝔄, so liegen Spur und Flucht von A in Spur und Flucht von 𝔄.

10) Schneiden sich zwei Gerade, so liegen sie in einer Ebene, deren Spur die Spuren der beiden Geraden, und deren Flucht die Fluchten derselben enthält. Demnach hat man den Satz:

Wenn zwei Gerade sich schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer Spuren parallel zu der ihrer Fluchten.

11) Ist eine Gerade A mit einer Ebene 𝔄 parallel, und sucht man die Flucht von A und 𝔄 (mittelst des Hauptstrals B von A, und der Hauptstralenebene 𝔅 von 𝔄), so liegt B in 𝔅. Hieraus folgt:

Wenn eine Gerade A parallel einer Ebene 𝔄 ist, so liegt der Fluchtpunkt von A in der Fluchtlinie von 𝔄.

12) Die Fluchtlinien paralleler Ebenen fallen zusammen.

Fig. 216. 561. Wir bestimmen eine unbegrenzte Gerade A durch ihre Spur a und ihre Flucht $\mathfrak{a}$ (Fig. 216); dann ist a$\mathfrak{a}$ die Perspektive A'. (Wir setzen hier gleich fest, dass wir die Spur einer Geraden, so wie jeden in der Tafel liegenden Punkt eines gegebenen Gebildes mit einem kleinen lateinischen Buchstaben ohne Index bezeichnen; ferner, dass wir jeden Fluchtpunkt einer Geraden mit einem kleinen deutschen Buchstaben versehen; dann, dass wir die Gerade $o_2\mathfrak{a}$, welche durch den Augpunkt o_2 und den Fluchtpunkt der Geraden A geht, den Horizont von A nennen, und mit $\mathfrak{H}_A$ bezeichnen). Da aber der Hauptstral von A parallel zu A ist und durch o geht, so ist $o_2\mathfrak{a} \parallel A_2$; und weil A_2 durch die Spur a geht, so sieht man Folgendes:

1) Ist a die Spur und $\mathfrak{a}$ die Flucht einer Geraden A, so ist a$\mathfrak{a}$ die Perspektive A' der Geraden, und die durch a zu $o_2\mathfrak{a}$ gezogene Parallele A_2 der Riss der Geraden.
2) Der Winkel der Geraden A mit der Tafel ist gleich dem Winkel ihres Hauptstrales o$\mathfrak{a}$ mit $o_2\mathfrak{a}$, also gleich dem Winkel $o\mathfrak{a}o_2$ eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich der Distanz und dessen andere Kathete $= \overline{o_2\mathfrak{a}}$ ist.

Anm. Man sieht zugleich, dass die in unserer Zeichnung erkennbaren Beziehungen zwischen Spur, Flucht, Riss und Perspektive unabhängig sind von der Distanz die wir zunächst nicht gegeben haben, während von ihr der Winkel der Geraden mit der Tafel abhängt, und zu dessen Aufsuchung also die Distanz gegeben sein müsste.

Fig. 217. 562. Aufg. Auf eine durch Spur a und Flucht $\mathfrak{a}$ gegebene Gerade A soll von a aus eine Strecke $\overline{ab}$ aufgetragen, und die Perspektive b' des Punktes b gesucht werden.

Aufl. Wir denken uns durch b eine zweite Gerade (B) gelegt, und suchen die Perspektive B' dieser Geraden, so ist der Schnitt von B' mit A' die gesuchte Perspektive b'. Um nun b' leicht zu finden wählen wir B möglichst bequem, nemlich so, dass die Spur von B, die wir mit b_α bezeichnen wollen, von

a so weit entfernt ist, als $\overline{ab}$ lang ist, d. h wir machen $\overline{ab_\alpha} = \overline{ab}$. Suchen wir nun die Flucht von B, indem wir durch o eine Parallele zu B (dessen Hauptstral) legen, und den Punkt α suchen, in welchem dieser Hauptstral die Tafel trifft, so ist bb_α die Gerade B und $o\alpha$ deren Hauptstral, demnach ist

1) $bb_\alpha \parallel o\alpha$; es ist aber auch
2) $ab \parallel o\mathfrak{a}$, weil $o\mathfrak{a}$, der Hauptstral von ab, also auch
3) Ebene $(abb_\alpha) \parallel$ Ebene $(o\mathfrak{a}\alpha)$, demnach auch
4) $ab_\alpha \parallel \mathfrak{a}\alpha$ und
5) $\triangle abb_\alpha \sim \triangle o\mathfrak{a}\alpha$, folglich auch
6) $\overline{\mathfrak{a}\alpha} = \overline{o\mathfrak{a}}$, da auch $\overline{ab_\alpha} = \overline{ab}$.

Zieht man also (Fig. 217) ab_α beliebig und macht $\overline{ab_\alpha} = \overline{ab}$ (gegebene Strecke), so ist b_α die Spur der Hilfslinie B; zieht man ferner $\mathfrak{a}\alpha \parallel ab_\alpha$ und macht $\overline{\mathfrak{a}\alpha} = \overline{\mathfrak{a}o}$ oder $= \overline{\mathfrak{a}o_1}$ (vorausgesetzt, dass $o_1o_2 \perp o_2\mathfrak{a}$ und $\overline{o_1o_2}$ die Distanz ist) so ist α die Flucht der B, und demnach ab_α die Perspektive B′, welche A′ in b′ schneidet. Hat man von der Spur a aus eine andere Strecke, $\overline{ac}$, auf A aufzutragen, so denkt man sich wieder durch c eine Hilfsgerade (C) gelegt, und macht diese parallel zu B; dann ist auch für C der Punkt α die Flucht, und muss $\overline{ac_\alpha} = \overline{ac}$ gemacht werden. Hat man sich daher für die Annahme der Hilfslinie entschieden, so kann man den Punkt α (Flucht der Hilfslinie) für alle auf A aufzutragenden Strecken beibehalten, und ihn so zur Eintheilung der Geraden A benützen. Deshalb heisst man diesen Punkt α Theilungspunkt der Geraden A. Man sieht also:

1) Theilungspunkt einer Geraden ist der Punkt der Tafel, welcher von der Flucht der Geraden so weit, als das Auge, entfernt ist; es gibt also unendlich viele Theilungspunkte (darunter auch o_1) einer Geraden, die einen Kreis bilden, den wir **Theilungskreis** nennen wollen,
2) hat man einen Theilungspunkt α der Geraden A (oder $a\mathfrak{a}$) gewählt, und will man von ihrer Spur a aus eine Strecke ab darauf abtragen, so zieht man $ab_\alpha \parallel \mathfrak{a}\alpha$, macht $\overline{ab_\alpha} = \overline{ab}$, und verbindet α mit b_α, so liegt in dieser Verbindungslinie b′, demnach

3) α, b' und b_α liegen in einer Geraden;

4) sind ab_α und $\mathfrak{a}\alpha$ (wie in unserer Figur) **entgegengesetzt** gerichtet, so liegt b' **zwischen a und $\mathfrak{a}$**, also b **hinter** der Tafel.

563. Da man α (in der Entfernung $\overline{o_1\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$) beliebig annehmen kann, so ist es zweckmässig es so zu wählen, dass αb_α und A′ sich möglichst rechtwinkelig schneiden, und demnach b' sich möglichst scharf ergibt. Abgesehen hievon kann man α auch so wählen, dass es auf o_1 fällt, und so, dass es auf $\mathfrak{H}_A$, und demnach b_α auf A_2 fällt. Jedenfalls wollen wir hier festsetzen, dass wir den Theilungspunkt einer Geraden mit demselben Buchstaben aus dem kleinen griechischen, wie die Flucht aus dem kleinen deutschen und die Gerade aus dem grossen lateinischen Alphabete bezeichnen. Heisst also die Gerade A, B, C etc. so wird ihre Flucht mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ etc. und ihr Theilungspunkt mit α, β, γ etc. bezeichnet. Ferner wollen wir die Punkte b_α, c_α etc. Theilungsrisse der Punkte b, c etc. nennen, und, wie in unserer Figur mit denselben, wie die Punkte selbst bezeichnen, aber versehen (als Index) mit dem Buchstaben am Theilungspunkte.

Fig. 217. 564. Hätte man von der Geraden A ausser der Flucht $\mathfrak{a}$ noch den Riss (A_2) und die Perspektive A, und sollte man von einem durch seine Perspektive b' gegebenen Punkte b der Geraden eine Strecke $\overline{ab}$ auftragen, so müsste man zunächst die Spur a (als Schnitt von A_2 und A′) suchen, nun durch a eine Parallele zu $\mathfrak{a}\alpha$ zeichnen, so läge darauf der Theilungsriss b_α des Punktes b und ist daher $\overline{ab_\alpha} = \overline{ab}$. Soll nun von b aus die Strecke $\overline{bc}$ z. B. nach rückwärts aufgetragen werden, so ist $\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}$ und $\overline{ac_\alpha} = \overline{ac}$ also auch $\overline{b_\alpha c_\alpha} = \overline{bc}$. Macht man also $b_\alpha c_\alpha = \overline{bc}$ und zieht αc_α; so erhält man c'. Man sieht also:

Die Theilungsrisse zweier Punkte einer Geraden, sind so weit von einander entfernt, als die Punkte selbst.

Fig. 218. 565. Ist wieder o_2 der Augpunkt, a_2 der Riss eines Punktes a, sind ausserdem die Distanz (des Auges o von der Tafel) und die Distanz (der Abstand) des hinter der Tafel liegenden Punktes (von der Tafel) bekannt, und soll man die Perspektive des

Punktes a suchen, so hat man einen speziellen Fall des oben (562) behandelten allgemeinen Falles. Denn der Punkt a liegt auf einer bekannten Geraden (a_2), nemlich auf der in a_2 zur Tafel gedachten Senkrechten, deren Spur offenbar in a_2 und deren Flucht in o_2 liegt. Ferner ist wieder bekannt, wie weit der Punkt a von der Spur a_2 entfernt ist (nemlich so weit, als die Distanz des Punktes lang ist). Wir dürfen also nur wieder den Theilungspunkt der Geraden a_2 suchen. Allein da hier der Fluchtpunkt unserer Geraden mit o_2 zusammenfällt, so kann jede durch o_2 in der Tafel gezogene Gerade als Horizont unser Geraden angesehen werden. Wir zeichnen dann gewöhnlich eine Horizontale (Parallele zum oberen Rande des Blattes) durch o_2 und nennen diese schlechtweg Horizont (im Gegensatz dazu nennt man oft den Horizont einer Geraden, der nicht horizontal ist, schiefen Horizont), und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{H}$. Tragen wir daher die Entfernung von o bis o_2 (d. h. die Distanz) auf den Horizont von o_2 (etwa nach links) auf, so bekommen wir den Punkt ω (der von o_2 um die Distanz entfernt ist, und deshalb Distanzpunkt genannt wird), welcher den Theilungspunkt eines Lothes (d. i. einer senkrechten zur Tafel) verstellt [auch hier gibt es wie oben (563) einen Theilungskreis dessen Halbmesser gleich der Distanz ist, und dessen Peripheriepunkte alle als ω angesehen werden können]. Will man nun a′ finden, so muss man (s. 562) durch a_2 eine Parallele zu $\mathfrak{H}$ (nach rechts, weil $o_2\omega$ nach links gerichtet ist) ziehen, und darauf die Distanz des Punktes, nemlich $\overline{a_2 a_\omega}$ auftragen. Verbindet man nun a_ω mit ω, so erhält man dadurch a′ (als Schnitt von $a_2 o_2$ und $a_\omega\,\omega$). Hieraus sieht man, dass, wenn o_2 und die Distanz bekannt sind, jeder Punkt a durch a′ und a_2 sich bestimmen lässt (da wir hieraus die Distanz des Punktes finden können). Wir werden daher künftig einen Punkt a durch a_2 und a′ geben und ihn dann Punkt a nennen. Ferner geht aus unserer Figur zugleich der Satz hervor:

Der Riss (a_2), die Perspektive (a′) eines Punktes und der Augpunkt (o_2) liegen in einer Geraden.

Anm. Wenn daher in Fig. 217, wo von dem Punkte b nur die Perspektive b′ nicht aber der Riss (b_2) gegeben ist, dieser Riss angegeben werden sollte, so dürfte man nur durch

o_2 und b′ eine Gerade legen, und sehen, wo sie A_2 (worin b_2 offenbar liegen muss) trifft.

566. Ist wieder o_2 der Augpunkt, ω der Distanzpunkt, und ein Punkt a (durch a_2 und a′) gegeben, durch welchen wir eine zur Tafel parallele Gerade A legen sollen, so geben wir diese Gerade durch ihren Riss (A_2) mit welchem sie ja parallel ist, und die Perspektive der Geraden ist A′, welches durch a′ geht, und parallel zu A_2 ist. Einen Fluchtpunkt hat die Gerade A nicht, folglich auch keinen Theilungspunkt. Sollen wir nun auf eine solche Gerade (die parallel zur Tafel ist) von a aus ein Stück $\overline{ab}$ auftragen, so können wir zunächst den Riss (b_2) von b finden, denn es ist hier offenbar $\overline{a_2 b_2} = \overline{ab}$. Da aber b_2, b′ und o_2 in einer Geraden liegen, so finden wir aus b_2 leicht auch b′.

§ 42.

Aufgaben aus der Perspektive.

567. Die Aufgaben, welche wir lösen wollen, sollen darin bestehen, die Perspektiven von gesuchten Gebilden zu finden, welche gegen gegebene Dinge in bestimmten Beziehungen stehen. Zur Bestimmung der gegebenen Dinge bedienen wir uns wie in den beiden letzten § nur einer einzigen Tafel, und geben

1) einen Punkt durch Riss und Perspektive oder durch Riss und Distanz (des Punktes von der Tafel);
2) eine Gerade durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und die Flucht;
3) eine Ebene durch Spur und Flucht, durch drei Punkte, durch einen Punkt und eine Gerade, oder durch zwei Gerade.

Von dem Gesuchten aber haben wir eigentlich blos die Perspektive anzugeben; allein wir können immerhin, bis wir zu praktischen Beispielen kommen, ausser der Perspektive des Gesuchten auch noch weitere Bestimmungsmittel desselben angeben. Zur Lösung unserer Aufgaben machen wir besonders von dem im vorigen § aufgefundenen Gesetzen über Flucht und Theilungspunkt einer Geraden, nebst den daraus hervorgegangenen Beziehungen zwischen Riss, Distanz und Perspektive eines

Punktes Gebrauch. Wir wollen nun zunächst einige Aufgaben über Punkte, gerade Linien und Ebenen lösen, und noch weitere Aufgaben dem Schüler zur Lösung vorlegen.

568. Aufg. Es sind gegeben zwei Punkte a und b (durch ihre Risse a_2, b_2 und ihre Perspektiven a', b'); man sucht die Spur und Flucht der Geraden ab. Fig. 220.

Aufl. Offenbar ist die Verbindungslinie von a_2 und b_2 der Riss (A_2) und die Verbindung von a' und b' die Perspektive (A') der Geraden ab; demnach der Schnitt m von A_2 und A' die Spur der Geraden A. Zieht man durch den Augpunkt o_2 eine Parallele zu A_2, so ist dies der Horizont ($\mathfrak{H}_A$) von A, in welchem die Flucht $\mathfrak{a}$ der Geraden A liegt. Es erscheint daher $\mathfrak{a}$ als Schnitt von $\mathfrak{H}_A$ und A'.

Anm. Ist noch ein dritter Punkt (c) gegeben, und sucht man noch Spur (n) und Flucht ($\mathfrak{b}$) der Geraden ac, so ist die Gerade mn die Spur und $\mathfrak{ab}$ die Flucht der Ebene abc (s. 560.$_9$).

569. Aufg. Es sei, ausser dem Augpunkt o_2 und seiner Distanz o_2o_1, ein Punkt a (durch Riss und Distanz) und die Flucht $\mathfrak{a}$ einer durch a gehenden Geraden A gegeben; man soll auf diese von a aus eine Strecke $\overline{ab}$ nach rückwärts auftragen (d. h. die Perspektive des Punktes b suchen). Fig. 221.

Aufl. Da $o_2\mathfrak{a}$ der Horizont von A ist, so nehmen wir diese Linie als Horizont an und tragen darauf von o_2 die Distanz $o_2\omega$ auf, wodurch wir den Distanzpunkt ω erhalten. Ziehen wir nun $\overline{a_2a_\omega} \parallel \mathfrak{H}$ (nach links, da $o_2\omega$ nach recht gerichtet ist) und machen $\overline{a_2a_\omega}$ gleich der gegebenen Distanz (von der Tafel) des Punktes a, so erhalten wir (565), als Schnitt der Geraden ωa_ω und a_2o_2, die Perspektive a' und daraus (durch Verbinden von a' und $\mathfrak{a}$) A'. Zieht man nun durch a_2 eine Parallele zu $\mathfrak{H}$ worauf hier α liegen soll, so erhält man A_2, auf welcher Linie der Theilungsriss a_α (s. 564) liegt, und zwar in der Verbindungslinie vom Theilungspunkt α (den man nach 563 erhält, wenn man $\mathfrak{a}\alpha = \overline{\mathfrak{a}o_1}$ macht) und a'. Macht man nun noch $\overline{a_\alpha b_\alpha} = \overline{ab}$ (aufzutragende Strecke) und zieht αb_α, so erhält man b'.

570. Aufg. Es sind gegeben drei Gerade A, B, C (durch ihre Spuren a, b, c und ihre Fluchtpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$); man sucht eine Gerade D, die mit A parallel ist, und B, C schneidet. Fig. 222.

Aufl. Bekanntlich findet man D, wenn man durch B eine Ebene $\mathfrak{A}$ legt parallel zu A, ebenso durch C eine Ebene $\mathfrak{B}$ parallel zu A, und den Schnitt beider Ebenen sucht. Es müssen demnach die Fluchtlinien (s. $560._9$) beider Ebenen durch $\mathfrak{a}$ gehen da jede eine Parallele zu A, deren Flucht $\mathfrak{a}$ ist, enthalten muss. Ausserdem muss die Flucht von $\mathfrak{A}$ auch durch $\mathfrak{b}$ gehen, und da ihre Spur parallel zur Flucht ist, so ist die durch b zu zu $\mathfrak{ab}$ gezogene Parallele M die Spur von $\mathfrak{A}$; ebenso N die Spur von $\mathfrak{B}$, und daraus d (der Schnitt von M und N) die Spur der gesuchten Geraden. Da die Flucht derselben aber $\mathfrak{a}$ ist, so ist d$\mathfrak{a}$ die gesuchte Perspektive D′.

Fig. 223. 571. Aufg. Es ist gegeben eine Gerade A durch Spur a und Flucht $\mathfrak{a}$; man sucht eine Ebene, die auf dieser Geraden senkrecht steht.

Aufl. Verbindet man o_2 und $\mathfrak{a}$ so erhält man den Horizont ($\mathfrak{H}$) von A, welcher bekanntlich parallel zum Riss von A ist; und da auf diesem die Spur unserer Ebene senkrecht stehen muss, und die Flucht der Ebene parallel ihrer Spur ist, so erhält man folgenden Satz:

1) *Wenn eine Ebene auf einer Geraden senkrecht steht, so ist auch die Flucht der Ebene senkrecht zum Horizont der Geraden.*

Um aber die Flucht der Ebene zu erhalten muss man durch das Auge eine Ebene parallel zur gesuchten, also durch das Auge eine Ebene legen, die auf der Geraden, oder auf ihrem Hauptstral, d. i. auf der Geraden o$\mathfrak{a}$ senkrecht steht, und welche die in der Geraden $\mathfrak{H}$ zur Tafel senkrechte Ebene, die wir als $\mathfrak{T}_1$ ansehen wollen, nach einer Geraden o$\mathfrak{b}$ schneidet, welche auf o$\mathfrak{a}$ senkrecht steht. Klappen wir daher die $\mathfrak{T}_1$ um $\mathfrak{H}$ in die Tafel wodurch o nach o_1 kommt (wenn $\overline{o_1 o_2}$ gleich der Distanz) und ziehen wir $o_1\mathfrak{b} \perp o_1\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{b}$ ein Punkt der Flucht und $\mathfrak{B}$ (durch $\mathfrak{b}$ und senkrecht zu $\mathfrak{H}$) die Flucht der gesuchten Ebene. Wir sehen also

2) *Wenn eine Gerade A auf einer Ebene senkrecht steht und wir ziehen vom Auge o nach der Flucht $\mathfrak{a}$ der Geraden die Gerade o$\mathfrak{a}$, und nach dem Punkt $\mathfrak{b}$, in welchem die Flucht der Ebene den*

Horizont von A schneidet, eine Gerade $o\mathfrak{b}$, so ist $o\mathfrak{a} \perp o\mathfrak{b}$.

Anm. Da die Hauptstralen aller auf A senkrechten Geraden in der Ebene $\mathfrak{B}$ liegen, so ist die Flucht einer jeden auf A senkrechten Geraden in $\mathfrak{B}$. Wenn demnach o_2 und die Distanz gegeben sind, so kann man leicht untersuchen, ob zwei Gerade, deren Fluchtpunkte gegeben sind, auf einander senkrecht stehen oder nicht.

572. Der Schüler versuche folgende Aufgaben zu lösen.

1) Den Schnitt zweier durch Spuren und Fluchten gegebenen Ebenen zu suchen;

2) den Schnittpunkt einer Geraden $(a, \mathfrak{a})$ und einer Ebene $(A, \mathfrak{A})$ zu finden (beide durch Spur und Flucht gegeben). Zur Lösung dieser Aufgabe legt man durch die Gerade $(a, \mathfrak{a})$ eine beliebige Ebene (Spur und Flucht), sucht den Schnitt beider Ebenen, und wo die Perspektive des Schnittes die der Geraden $(a, \mathfrak{a})$ schneidet, ist die Perspektive des Schnittpunktes;

3) durch einen Punkt (a_2, a') eine Ebene parallel einer gegebenen $(A, \mathfrak{A})$ finden.

4) durch einen Punkt (a_2, a') eine Gerade zu legen, die eine gegebene Gerade $(b, \mathfrak{b})$ rechtwinkelig schneidet.

573. Aufg. Die Perspektive einer ebenen Curve B zu Fig. 224.
finden.

Aufl. Wir nehmen an, dass von der Ebene der Curve B Spur A und Flucht $\mathfrak{A}$ bekannt sind, und legen durch das Auge eine als $\mathfrak{T}_1$ betrachtete Ebene, welche auf der Spur A der gegebenen Ebene senkrecht steht, und klappen diese $\mathfrak{T}_1$ um ihren Horizont ($\mathfrak{H}$) nebst dem Auge um. Ferner betrachten wir die Ebene $(A\mathfrak{A})$ der Curve B als neue Tafel $(\mathfrak{T}_3)$, und klappen sie um A in die Tafel, so dass B nach B_3 kommt. Soll man nun von einem Punkte b der Curve (dessen dritter Riss b_3 ist) die Perspektive suchen, so denken wir uns durch b **eine in der Ebene $(A, \mathfrak{A})$ der Curve liegende Gerade** gelegt, am besten eine Paralelle (C) zur $\mathfrak{T}_1$, deren Riss (C_3) demnach parallel zu $\mathfrak{H}$ ist und durch b_3 geht. Dann ist aber der Schnittpunkt $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ die Flucht und der Schnitt c von C_3 und A die Spur von C. Da ferner b von der Spur c um $\overline{bc} = \overline{b_3c}$ entfernt ist, so haben wir die früher (562) besprochene Aufgabe zu lösen.

Suchen wir daher den Theilungspunkt (γ) der Geraden C, so finden wir auf bekannte Art (s. 563) b'. In ähnlicher Weise verfahren wir für jeden anderen Punkt der Curve (für welchen c und γ dieselbe Lage, wie für b behalten), wodurch wir von der gesuchten Perspektive B' so viele Punkte finden können, als wir nöthig zu haben glauben.

Wollen wir die Tangente der gesuchten Perspektive B' im Punkte b', so zeichnen wir die Tangente D_3 an B_3 im Punkte b_3 und suchen die Perspektive dieser Tangente. Offenbar ist aber der Punkt d (in welchem D_3 und A sich schneiden) die Spur der gesuchten Tangente, demnach auch ein Punkt der Perspektive dieser Tangente. Man sieht also:

Zieht man in b_3 eine Tangente D_3 an B_3 und verbindet den Punkt d, in welchem D_3 und A sich schneiden, mit b', so ist db' die Tangente an B' im Punkte b'.

Anm. Als besondere Punkte der Curve B_3 wird man diejenigen betrachten dürfen, nach denen B_3 von Parallelen zu $\mathfrak{H}$ und zu A, dann von Geraden, die durch γ gehen, berührt wird.

Fig. 225. 574. Ist die ebene Curve B, deren Perspektive gesucht wird ein Kreis, der durch Umklappung um A nach B_3 kommt, so nehmen wir hier die zur $\mathfrak{T}_1$ paralle Gerade C so an, dass sie durch den Mittelpunkt von B geht, und suchen, nach Anleitung der vorigen Nummer die Perspektiven b', c' der im Durchmesser C des Kreises liegenden Punkte. Die Tangenten der Perspektive B' in den Punkten b', c' sind dann parallel zu A. Da nun die gesuchte Perspektive des hinter der Tafel vorausgesetzten Kreises B eine Ellipse ist, und die Tangenten derselben in b' und c' parallel laufen zu A, so ist b'c' ein Durchmesser und die Mitte d' von $\overline{b'c'}$ der Mittelpunkt der Ellipse. Sucht man den Punkt d_3 auf b_3c_3 der d' entspricht (d. h. der mit d' verbunden nach dem Theilungspunkt γ führt), zieht $d_3e_3 \perp b_3c_3$, und sucht die Perspektive e' des in B_3 liegenden Punktes e_3, so sind $\overline{d'e'}$ und $\overline{b'd'}$ konjugirte Halbmesser der gesuchten Ellipse, und man kann diese nun konstruiren (s. 210. Anm.)

Anm. 1. Läge der Kreis in einer Ebene parallel zur Tafel, so wäre seine Perspektive B' wieder ein Kreis. Ist dann der Riss und die Distanz des Kreismittelpunktes a gegeben, so kann

man dessen Perspektive a′ finden (s. 565). Zeichnet man noch den Riss des Kreises und nimmt darauf einen Punkt b_2 an (die Distanz von b ist gleich der von a) so erhält man b′, wodurch B′ gehen muss.

Anm. 2. Hätte man statt des Kreises B eine Ellipse (die wieder hinter der Tafel liegt), so dass die Perspektive der Ellipse B eine Ellipse B′ wäre, so würde man an B_3 zu A parallele Tangenten legen, die B_3 nach b_3, c_3 berühren, und nun mit dem Durchmesser $\overline{b_3c_3}$ ähnlich wie oben mit dem Durchmesser des Kreises verfahren; man erhielte dann wieder zwei konjugirte Halbmesser der Ellipse B′.

575. Soll die Perspektive einer unebenen Curve A gefunden werden, so muss der Riss ($\mathfrak{R}_2$) dieser Curve gegeben sein, und ausserdem noch der Riss auf der ersten Tafel ($\mathfrak{T}_1$) die wir durch das Auge o horizontal legen und umklappen. Nimmt man dann auf dem Riss (A_2) einen Punkt a_2 an und sucht den entsprechenden ersten Riss (a_1) so kann man aus diesem den Abstand (Distanz) des Punktes a von der Tafel ermitteln. Haben wir aber von dem Punkte a seinen Riss (a_2) und seine Distanz, so können wir (s. 565) dessen Perspektive a′ finden. Verfahren wir so für viele nicht zu weit von einander entfernte Punkte und verbinden ihre Perspektiven durch eine Curve, so erhalten wir die verlangte Perspektive A′.

Wollen wir in a′ die Tangente B′ für A′, so zeichnen wir zuerst die Tangenten B der Curve A im Punkte a (durch ihre Risse (B_1, B_2), nehmen auf B einen Punkt b an und suchen seine Perspektive b′. Am Zweckmässigsten nimmt man auf B den Punkt b so an, dass er die Spur von B ist, dann ist b zugleich b′, und ba′ die verlangte Tangente. — Der Schüler wird gut thun, wenn er diese Aufgabe zu lösen versucht; er mag als Beispiel eine Schraubenlinie wählen deren Axe vertikal ist.

576. Hat man die Perspektive eines durch eine ebene Grundlinie A und Spitze a gegebenen Kegels zu suchen, so kann man die Grundlinie, wie oben (573) geben, und ihre Perspektive A′ suchen. Zeichnet man noch die Perspektive a′ der Spitze a, und zieht (wenn möglich) von a′ Tangenten an A′ so erhält man noch den Perspektiv-Umriss des Kegels.

577. Hat man die Perspektive eines von zwei ebenen Curven begrenzten Cylinders, so sucht man (wieder nach 574) die Perspektiven der beiden Curven, und legt daran gemeinschaftliche Tangenten, welche die perspektivischen Umrisse des Cylinders vorstellen. Da aber diese Umrisse zugleich Perspektiven von Erzeugenden des Cylinders sind, so müssen sie durch den Fluchtpunkt der Erzeugenden (den man also suchen muss) gehen, oder, wenn die Erzeugenden parallel zur Tafel sind (und daher keine Flucht haben) mit den Erzeugenden parallel laufen.

578. Hat man die Perspektive einer anderen Fläche, z. B. einer Drehfläche, zu finden, so ist es am Besten, sich dazu der Methode der darstellenden Geometrie zu bedienen. Man wird nemlich zunächst die Fläche nach den Regeln der darstellenden Geometrie in Bezug auf die beiden Tafeln (die Perspektivtafel als $\mathfrak{T}_2$ und die durch das Auge gelegte horizontale Tafel als $\mathfrak{T}_1$) bestimmen; steht also die Axe der Drehfläche senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so wird man die Axe und den Hauptmeridian durch ihre Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) zeichnen. Nur etwas von der gewöhnlichen Art abweichendes wollen wir hier empfehlen. Gewöhnlich, wenn man die beiden Tafeln so annimmt, dass $\mathfrak{T}_1$ horizontal und $\mathfrak{T}_2$ vertikal ist, betrachtet man den ersten Riss als eine Ansicht von oben nach unten, und klappt die $\mathfrak{T}_1$ so um dass ihr vor der $\mathfrak{T}_2$ liegende Theil nach unten kommt. Für Perspektivzeichnungen aber, wo die darzustellenden Gebilde gewöhnlich hinter der Tafel ($\mathfrak{T}_2$) liegen, würde bei der üblichen Umklappungsart der $\mathfrak{T}_1$ der erste Riss den zweiten mehr oder weniger decken und die Zeichnung dadurch unklar werden. Darum empfiehlt sich's hier, die $\mathfrak{T}_1$ so umzuklappen, dass ihre vordere Hälfte und mit ihr o_1 nach oben kommt, und demnach der erste Riss des hinter der Tafel liegenden Gebildes nach unten.

Hat man nun so die Fläche in Bezug auf die beiden Tafeln bestimmt, so löst man die Aufgabe (391.) vom Punkte o aus an die Drehfläche einen berührenden Kegel zu legen, und sucht die Spur (Schnitt mit der $\mathfrak{T}_2$) dieses Kegels, so ist diese die verlangte Perspektive.

Anm. Für diejenigen, welche mit der Methode der darstellenden Geometrie nicht bekannt sind, muss folgendes Verfahren

gewählt werden. Man nimmt auf der Drehfläche einen Parallelkreis an, sucht (nach 574) die Perspektive dieses Kreises, wiederholt dieses Verfahren für sehr viele Kreise und zeichnet aus freier Hand eine Curve M, welche die Perspektiven aller der Kreise berührt. Hiebei kann es vorkommen, dass manche der gezeichneten Kreise innerhalb der Curve M liegen, ohne sie zu berühren, und dass man daher diese Kreise umsonst gezeichnet hat. Dieses Verfahren ist überhaupt sehr umständlich, führt zu sehr ungenauen Ergebnissen, und ist demnach für solche, die mit der darstellenden Geometrie bekannt sind, nicht zu empfehlen.

579. Hat man die Perspektive einer Kugel zu finden, so müsste man eigentlich vom Auge o aus an dieselbe einen berührenden Kegel legen, dessen Schnitt mit der Tafel die verlangte Perspektive wäre. Dieser Schnitt ist aber nur dann ein Kreis wenn die Axe des Kegels senkrecht zur Tafel steht, ausserdem eine Ellipse. Allein bei der gewöhnlichen Lage des Auges gegen die Tafel (s. 556) weicht der Winkel, den die Axe des eben genannten berührenden Kegels mit der Tafel bildet von einem rechten Winkel so wenig ab, dass wir die Perspektive der Kugel stets als Kreis zeichnen dürfen; als Mittelpunkt dieses Kreises betrachten wir die Perspektive des Kugelmittelpunktes, und als dessen Halbmesser, wenn wieder wie gewöhnlich die Kugel hinter der Tafel liegt, eine Strecke, die sich zum Kugelhalbmesser verhält, wie die Distanz des Auges zur Summe der Distanz des Auges und der Distanz des Kugelmittelpunktes.

Anm. Wenn man vielleicht unbegreiflich findet, wie die Perspektive einer Kugel eine Ellipse sein kann, da man die Kugel doch stets als vollkommen runden Kreis sieht, so darf man nur nicht vergessen, dass man die Perspektive, wenn sie den rechten Eindruck machen soll stets vom Auge o aus ansehen muss; von diesem Punkte aus erscheint aber die Ellipse als Kreis. Denn die von der Ellipse nach o gedachten Stralen bilden ja den obengenannten berührenden Kegel, der die Kugel nach einem Kreise berührt, welcher dieselben Stralen dem Auge zusendet, wie die Ellipse.

Fig. 226. 580. Aufg. Man soll die Perspektive des Spiegelbildes eines Punktes a finden, wenn die Horizontalebene A_2 die Spiegelfläche ist.

Aufl. Es versteht sich wohl von selbst, dass, wenn a sich in A_2 spiegeln und sein Bild vom Auge o gesehen werden soll, a und o über A_2 liegen müssen. Ist nun a_2 der Riss, a′ die Perspektive des Punktes a, und denken wir uns von a auf die Ebene A_2 eine Senkrechte gefällt, welche A_2 in einem Punkte b schneidet, so liegt bekanntlich das Spiegelbild von a so tief unter b, als sich a über b befindet. Bezeichnet man nun das Spiegelbild von a mit c, so ist offenbar b_2 (der Punkt auf der Vertikalen $a_2 b_2$, welcher in A_2 liegt) der Riss von b, und der Punkt c_2, welcher auf $a_2 b_2$ so weit unter, als a_2 über b_2 liegt, der Riss von c. Wie man nun noch die Perspektiven b′, c′ findet, geht aus der Zeichnung hervor und ist leicht zu erklären. Es ist aber noch zu bemerken, dass in praktischen Fällen die Ebene A_2 begrenzt ist, und dass dann die Perspektiven ihrer Grenzen gezeichnet werden. In diesem Falle gilt der Punkt c′ nur, wenn er innerhalb der perspektivischen Grenzen der Spiegelfläche liegt; wo nicht, so spiegelt sich der Punkt in der Fläche für unser Auge (o) nicht.

Anm. Ist a′ die Perspektive eines unendlich fernen Punktes (z. B. des Mittelpunktes der Sonne, den wir ja als unendlich ferne betrachten können), dann ist auch b in unendlicher Ferne; es fällt daher in diesem Falle $o_2 b_2$ also auch b′ in $\mathfrak{H}$, a′ über $\mathfrak{H}$ und c′ so weit unter $\mathfrak{H}$, als a′ über $\mathfrak{H}$ liegt.

Fig. 227. 581. Aufg. Es sind gegeben die Perspektiven zweier Rechtecke, die eine horizontale Seite (ab) gemein haben, und von denen eines horizontal und eines vertikal steht. Ferner eine begrenzte vertikale Gerade gh, deren unterer Punkt g in dem horizontalen Rechtecke liegt; man sucht die Perspektive des Schlagschattens, den hg auf die beiden Rechtecke wirft, wenn die Lichtstralen mit einer gegebenen Geraden parallel laufen.

Aufl. Nehmen wir an, dass die beiden Seitenrichtungen des horizontalen Rechteckes zu Hauptstralen die (auf einander senkrechten) A_1, B_1 und demnach als Fluchtpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ haben, so erhalten die Perspektiven der gegebenen Rechtecke die Gestalten a′b′c′d′ und a′b′e′f′, so dass a′b′ die Perspektive der

gemeinschaftlichen Geraden beider Rechtecke vorstellt. Ist nun $g'h'$ die Perspektive der auf dem horizontalen Rechtecke stehenden Vertikalen, und ist die Richtung des Lichtstrales durch seine beiden Risse ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$) gegeben, so legt man durch das Auge o eine Parallele C zum Lichtstral, und sucht von diesem (nach den Regeln der darstellenden Geometrie) die Spur (d. h. die Spur auf $\mathfrak{T}_2$), also $\mathfrak{c}$, so ist dies der Fluchtpunkt des Lichtstrales, während offenbar $\mathfrak{c}_1$ (der Schnitt von C_1 mit $\mathfrak{H}$) der Fluchtpunkt von C_1 ist. Will man nun den Schlagschatten von h auf dem horizontalen Rechtecke, so darf man nur bedenken, dass g der Riss des Punktes h auf diesem Rechtecke ist, dass also wenn man durch g eine Parallele zu C_1 (dem ersten Risse des Lichtstrales) und durch h eine Parallele zu C (zum Lichtstral selbst) sich gelegt denkt, der Schnitt dieser beiden Parallelen der verlangte Schlagschatten ist. Zieht man daher in unserer Zeichnung (Fig. 227) durch g' eine Gerade nach $\mathfrak{c}_1$ (die Perspektive der Parallelen zu C_1) und durch h' eine Gerade nach $\mathfrak{c}$ (die Perspektive der Parallelen zu C), so ist der Schnitt k' dieser beiden Geraden die Perspektive des Schlagschattens von h und demnach $g'k'$ die der Vertikalen gh auf dem horizontalen Rechtecke. Da aber in unserem Beispiele k' über die Grenzen des horizontalen Rechtecks hinausfällt, so gilt auf diesem nur $g'l'$ (l' liegt auf $a'b'$) als Schlagschatten, und fällt ein Theil unseres Schlagschattens auf das vertikale Rechteck, demnach auf die Vertikale $l'm'$ auf welcher also auch der Schlagschatten liegt, den h auf das vertikale Rechteck wirft. Da aber dieser Schlagschatten auch auf $h'\mathfrak{c}$ fällt, so ist m' dieser Schlagschatten.

Hat man also von einer horizontalen und einer vertikalen Ebene die Perspektive ihres Schnittes und von beliebig vielen Punkten die Perspektiven der Punkte selbst, so wie die ihrer Risse auf der horizontalen Ebene, so kann man gleich in der Perspektive selbst die Schlagschatten dieser Punkte auf beiden Ebenen konstruiren.

582. Soll man Schatten konstruiren, von denen man nicht weiss, wie man sie in der Perspektive unmittelbar findet, so konstruirt man die Schatten in den Rissen, und sucht aus den Rissen der Schattengrenzen deren Perspektiven.

§ 43.

Ueber praktische Aufgaben aus der Perspektive.

583. Indem wir jetzt dreierlei Methoden der graphischen Darstellung von räumlichen Gebilden, nemlich Risse ($\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$), Parallelperspektive und Centralperspektive kennen gelernt haben, hat sich zugleich herausgestellt, dass wir stets die Risse anwenden, wenn wir Zeichnungen machen sollen, nach denen man soll arbeiten können; dass wir uns der Parallelperspektiven bedienen, wenn man eine übersichtliche Zeichnung haben will, aus welcher die Dimensionen des Körpers sich theilweise (in den Richtungen X, Y, Z) entnehmen lassen: dass wir aber die eigentliche Perspektive, die Centralperspektive, benützen, wenn wir eine Zeichnung wollen, die uns den ästhetischen Eindruck erfahren lässt, den der Körper selbst, von einem bestimmten Punkte aus gesehen, auf uns macht. Die fertige Perspektivzeichnung enthält daher nichts weiter, als die Perspektive des darzustellenden Körpers, und werden daher die während der Konstruktion der Zeichnung nothwendigen Risse von Punkten und Linien, der Augpunkt, die Fluchtpunkte etc. weggelöscht.

Die Herstellung einer solchen Perspektive geschieht dann entweder deshalb, um von einem auszuführenden Körper, z. B. einer Kirche, Villa, Brücke etc., vor seiner Anfertigung zu erfahren, welche Erscheinung er von einem bestimmten Standpunkte aus gewährt, damit sowohl der Baumeister als der Besteller, wenn ihnen die Erscheinung nicht gefällt, Abänderungen veranlassen können; oder es wird eine solche Perspektive hergestellt, ohne dass man den dargestellten Gegenstand ausführen zu lassen beabsichtigt, lediglich deshalb, um als Bild dem Beschauer einen Kunstgenuss zu gewähren. Wir wollen hier hauptsächlich den ersten Fall in's Auge fassen, also den, wo ein Bauwerk, das ausgeführt werden soll, den Gegenstand der Perspektivzeichnung bildet. In diesem Falle werden gewöhnlich von dem Baumeister nach dem ihm vorgelegten Programm zuerst die Risse (Grund- und Aufriss) gezeichnet, und dann erst die Perspektive hergestellt.

Fig. 228. 584. Die meisten Bauwerke, deren Perspektiven gezeichnet werden, haben parallelepipedische Grundform, deren drei Kan-

tenrichtungen X, Y, Z mit Länge, Tiefe (oder Breite), Höhe bezeichnet werden; Länge und Tiefe sind horizontal, die Höhe ist vertikal gerichtet. Wir wollen daher unsere Betrachtung an einem rechtwinkeligen Parallelepiped dessen eine Kantenrichtung vertikal steht, vornehmen.

Stellen nun von den in unserer Zeichnung (Fig. 228) dargestellten Rechtecken das untere den Grund- und das obere den Aufriss eines Parallelepipeds vor, dessen Perspektive man zu zeichnen beabsichtigt, so wird man vor Allem feststellen müssen, von welchem Standpunkte aus der Körper angesehen werden soll, namentlich, welche Flächen desselben angesehen werden. Zeichnen wir im Grundriss eine Gerade $a_1 o_1$ und betrachten o_1 als den ersten Riss des Auges, so wird man von der Seite $a_1 c_1$ um so mehr und zugleich von $a_1 b_1$ um so weniger sehen, je kleiner man den Winkel $c_1 a_1 o_1$ macht. Wird dieser Winkel ein rechter, so sieht man von $a_1 b_1$ gar nichts. Hat man sich nun für die Richtung $o_1 c_1$ entschieden, so fragt es sich zunächst, an welcher Stelle darauf der Punkt o_1 (erster Riss des Auges o) angenommen wird. Hier kommt nun in Betracht, dass wir bei Beschauung des Objektes unser Auge so aufstellen müssen, dass wir jenes auf einmal überblicken können, d. h. dass wir ohne unseren Kopf zu bewegen, blos durch kleine Bewegungen des Auges (die also den Punkt o nicht merklich verrücken) alle Punkte des Objektes deutlich wahrnehmen können. Dies ist nahezu der Fall, wenn, bei nicht sehr hohen Objekten, d. h. solchen deren Höhe nicht grösser ist als die Länge oder Breite, (und solche kommen gewöhnlich vor) der Winkel (der ersten Risse der äussersten Sehstralen) $b_1 o_1 c_1 = 40^0$ ist; man kann aber, wenn es die Umstände verlangen, auch noch bis zu einem Winkel von 60^0 vorzugehen sich gestatten, wogegen wir bei verhältnissmässig höheren Objekten noch unter 40^0 herunter gehen.

585. Die in voriger Nr. gegebenen Auseinandersetzungen lassen sich nur dann buchstäblich verwenden, wenn die Dimensionen des parallelepipedischen Objektes so klein sind, dass man sie auf dem Zeichnungsblatte in ihrer wirklichen Grösse auftragen kann, und auf demselben noch Raum bleibt zur Darstellung des Punktes o_1. Dies ist aber in der Regel nicht der Fall; denn praktische Perspektivaufgaben beziehen sich, wie schon Fig. 228.

erwähnt, auf Bauwerke, deren Dimensionen die des Zeichnungsblattes bei Weitem überschritten. Um nun aber dennoch das in voriger Nummer Gesagte anwenden zu können, denke man sich das Objekt in seiner wahren Grösse aufgestellt und irgendwo das Auge des Beschauers (als Punkt o) und von allen Ecken (a, b, c etc.) des Objektes nach o Stralen (oa, ob, oc etc.) gezogen. Tragen wir nun von o aus auf diese Stralen Strecken o*a*, o*b*, o*c* etc. auf, die in einem bestimmten Verhältnisse zur wirklichen Grösse der betreffenden Strecken verkleinert sind, so bilden die Punkte *a*, *b*, *c* etc. die Ecken eines dem gegebenen ähnlichen Objektes, welches letztere ein verjüngtes Modell des gegebenen Objektes genannt werden soll. Dieses verjüngte Modell führt dem Auge dieselben Stralen zu, wie das Objekt selbst, und leistet demnach bei der Aufsuchung der Perspektive ganz dieselben Dienste, wie dieses.

Will man demnach die Perspektive eines projektirten Objectes, zunächst die Lage von o_1 gegen dasselbe aufsuchen, so zeichnet man es (Fig. 228) in einem verjüngten Maſsstabe, und sucht o_1 nach Anleitung der vorigen Nummer.

586. Nachdem wir so im Stande sind, die Lage von o_1 gegen $a_1 b_1 c_1 d_1$ (Fig. 228) zu finden, fragt es sich, wie man die Höhe des Punktes o über der Grundfläche des Objektes bestimmt.

Denken wir uns durch das Auge (o) eine Horizontalebene gelegt, die wir wie früher als $\mathfrak{T}_1$ ansehen, (und deren Schnitt mit der Perspektivtafel wir Horizont genannt und mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet haben), so wird in jedem gegebenen Falle bekannt sein, in welchem Punkte diese $\mathfrak{T}_1$ irgend eine Vertikale des Bauwerkes (z. B. eine vertikale Mauerkante ab) schneidet. Denn entweder setzen wir, wie gewöhnlich, den Beobachter auf derselben Horizontalebene stehend voraus, wie die Grundfläche des Bauwerkes, dann wird die Mauerkante von der $\mathfrak{T}_1$ in einem Punkte c geschnitten, der über dem Punkte a, in welchem die Mauerkante die Grundfläche des Baues schneidet, so hoch liegt, als die Höhe des Auges eines stehenden Erwachsenen über seiner Sohle, und dafür können wir 160^{cm} annehmen. Oder der Beobachter steht tiefer oder höher, dann muss bekannt sein, wie tief er und somit auch sein Auge steht, und damit lässt sich wieder der Punkt c angeben, in welchem die Mauerkante ab von der $\mathfrak{T}_1$ geschnit-

ten wird. Sucht man nun die Perspektive $\overline{a'b'}$ der ab und die (c') von c, so verhält sich $\overline{a'c'} : \overline{b'c'} = \overline{ab} : \overline{cb}$.

587. Hat man nun den Standpunkt des Auges gegen das Objekt oder dessen verjüngtes Modell gewählt, so wird der Eindruck, den dieses Objekt von dem angenommenen Standpunkte auf das Auge des Beobachters macht, wiedergegeben, durch die Perspektive auf einer Tafel, die wir gewöhnlich zwischen o und dem Objekt aufstellen, und von o aus betrachten. Wie wir auch die Tafel aufstellen, immer wird die darauf konstruirte Perspektive von o aus betrachtet denselben Eindruck auf das Auge des Beschauers machen. Aber je nach der Lage der Tafel wird das perspektivische Bild selbst die oder jene Gestalt annehmen, und wird sich das Auge des Beschauers des Bildes entweder vor dessen vertikaler Mittellinie (was gewöhnlich geschieht) oder rechts oder links von dieser Linie aufstellen. Es wird wohl für gewöhnlich, der Gewohnheit der Beschauer entsprechend, am Zweckmässigsten sein, die Tafel (hier die Ebene A_1) so zu stellen, dass A_1 mit den ersten Rissen (o_1c_1 und o_1b_1) der äussersten Stralen gleiche (oder nahezu gleiche) Winkel bilden, so dass der Augpunkt auf dieser Tafel in (oder nahezu in) die vertikale Mitte der Perspektive kommt; von dieser Regel wird man nur dann abweichen, wenn das dadurch entstandene Bild ästhetisch nicht befriedigend ausfällt. Zugleich ist es bequem die Tafel (A_1) wie in unserer Zeichnung so zu legen, dass eine Kante des Parallelepipeds, hier ae, in der Tafel liegt. Fig. 228.

Allein wir haben in Bezug auf die Annahme der Tafel, wie wir schon früher angegeben, noch eine sehr wesentliche Bedingung zu erfüllen, nemlich die, dass die Distanz (welche offenbar gleich der Entfernung $\overline{o_1 \mathfrak{o}_1}$ von o_1 nach A_1 ist) nicht zu klein, etwa nicht kleiner als 30^{cm} ist, damit wir das Bild deutlich sehen können. Haben wir daher nach den in den letzten Nummern gegebenen Anleitungen mittelst des verjüngten Modells o_1 gefunden, und die Richtung von A_1 gewählt, so müssen wir dieses parallel verschieben, bis die Distanz gleich oder grösser als 30^{cm} wird. Wollen wir dann, dass dennoch die vordere Kante des verjüngten Modells in A_1 liegt, so dürfen wir nur statt des angenommenen Modells ein entsprechend grösseres annehmen. Denkt man sich zu dem Ende A_1 parallel verschoben,

bis man die gewünschte Distanz erhalten hat, so darf man nur suchen wo dieses neue A_1 von o_1a_1 geschnitten wird, und von diesem Punkte aus Parallele zu a_1c_1 und a_1b_1 ziehen, und nachsehen wo sie die Linien o_1c_1 und o_1b_1 schneiden, wodurch man das neue (minder verjüngte) Modell erhält.

Anm. Nimmt man A_1 so an, wie oben angegeben, so ist das zwischen o_1b_1 und o_1c_1 liegende Stück (m) von A_{11}, welches offenbar die Breite des ganzen perspektivischen Bildes vorstellt, $= 2d \operatorname{tg} 20^0$ wenn d die Distanz bedeutet. Also ist, für $d = 30^{cm}$, m gleich nahezu 22^{cm}. Dies ist also bei unserer Annahme des Winkels $b_1o_1c_1$ (nemlich $= 40^0$) die kleinste Breite, welche man der Perspektive geben kann, wenn sie von o aus betrachtet noch deutlich wahrnehmbar sein soll. Wollte man diese Breite kleiner haben, (und doch $d = 30^{cm}$) so müsste man $\wedge b_1o_1c_1 < 40^0$ machen. Soll aber die Bildbreite grösser als 22^{cm} werden, und behalten wir $b_1o_1c_1 = 40^0$ bei so muss in demselben Verhältniss auch die Distanz vergrössert werden.

Fig. 228. 588. Fassen wir das in den letzten Nummern über die Annahme des Auges und der Tafel Gesagte zusammen, so sieht man, dass zur Bestimmung dieser Dinge folgender Weg eingeschlagen werden kann.

Wir zeichnen den Grundriss $a_1b_1c_1d_1$ des Parallelepipeds in irgend einem verjüngten Mafsstabe, und dann die Linien o_1b_1 und o_1c_1 so dass der Winkel bei o_1 40^0 misst, und man von o_1 die Seiten a_1b_1 und a_1c_1 in solchen Verhältnissen sieht, wie der Zeichner es wünscht. Nun zeichnet man A_1 so, dass es mit o_1b_1 und o_1c_1 ein gleichschenkliges Dreieck bildet und von o_1 so weit entfernt ist, als die Distanz sein soll (wie oben gesagt, muss diese Distanz mindestens 30^{cm} betragen, in welchem Falle die Bildbreite 22^{cm} wird; soll die Bildbreite aber n mal 22^{cm} werden, so muss die Distanz 30 n genommen werden). Sucht man nun, wo o_1a_1 die Linie A_1 schneidet und bezeichnet diesen Punkt mit a_{11}, legt durch dieses a_1 Parallele zu a_1c_1 und a_1b_1, nennt die Punkte, wo diese Parallelen die o_1b_1 und o_1c_1 schneiden, b_{11}, c_{11}, ergänzt diesen neuen Winkel $b_1a_1c_1$ zu einem Rechteck $a_1b_1c_1d_{11}$, und löscht dafür das ursprüngliche Rechteck weg, so erhält man eine Figur gleich dem Grundriss unserer Zeichnung (Fig. 228),

so dass die vordere Vertikalkante des Parallelepipeds in der Perspektivtafel liegt (was für die Ausführung der Perspektive sehr bequem ist). Ist noch die Höhe des Auges über der Ebene A_2 der Grundfläche unseres Objektes bekannt, ist z. B. hier vorausgesetzt, dass der Beobachter auf der Grundflächen-Ebene steht, und daher das Auge 160^{cm} über dieser Ebene (A_2), so ist o_2 über A_2 um 160^{cm} zu nehmen aber auf einem verjüngten Mafsstabe gemessen, dessen Verjüngung gleich der des verjüngten Modells ist, also nach dem Mafsstabe des Rechteckes $a_1 b_1 c_1 d_1$.

589. Hat man auf diese Art die gegenseitige Lage des Objekts, der Tafel und des Auges mittelst einer Nebenzeichnung ähnlich der der vorigen Nummer festgestellt, dann kann man die Perspektive des Parallelepipeds nach den früheren Regeln finden. Fig. 229.

Wir zeichnen nemlich (Fig. 229) den Horizont $\mathfrak{H}$, darauf den Augpunkt o_2, dann das umgeklappte Auge o_1 so, dass die Distanz $\overline{o_1 o_2}$ gleich der in der vorigen Nummer angenommen ist, hierauf die in der Tafel liegende Vertikalkante ae so gross, als sie nach dem (in der vorigen Nummer angenommenen) Verjüngungsmafsstab sein muss, und ausser dem so, dass a um 160^{cm}, gemessen nach demselben Mafsstab, unter o_2 liegt, und dass die Abscisse von a (o_2 als Ursprung betrachtet) $=$ $\overline{a_1 o_1}$ der Fig. 228 ist. Endlich sind noch die umgeklappten Hauptstralen der Horizontalkanten unseres Objektes, nemlich $o_1 \mathfrak{a}$ und $o_1 \mathfrak{b}$ so zu zeichnen, dass sie mit $\mathfrak{H}$ die Winkel bilden, welche in der Fig. 228 $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$ mit A_1 einschliessen. Wie man weiter verfährt, die Perspektive des Parallelepipeds zu konstruiren ist von früher her bekannt, und aus der Zeichnung zu ersehen. — Um den Punkt c′ recht scharf zu erhalten, haben wir $\mathfrak{a}\alpha$ (α ist der Theilungspunkt, der dem Fluchtpunkt $\mathfrak{a}$ entspricht) und die damit Parallele $a c_\alpha$ ($\overline{a c_\alpha}$ ist offenbar $=$ $\overline{a_1 c_1}$ der vorigen Nr.) so gelegt, dass die Linie αc_α die $a \mathfrak{a}$ fast rechtwinkelig schneidet, also $\mathfrak{a}\alpha$ nicht mit $\mathfrak{H}$ zusammenfallen lassen, wesshalb es besonders angenehm ist, dass ae in der Tafel liegt und daher a die Spur der Linie ac ist. Ein Aehnliches ist in Bezug auf b′ zu sagen.

Anm. Da der Beschauer der Perspektive sein Auge vor o_2 (und zwar in der gehörigen Distanz) aufstellen muss, so wird man das perspektivische Bild so an eine Wand hängen, dass

der in ihm liegende Horizont $\mathfrak{H}$ in einer Höhe von 160^{cm} über dem Fussboden liegt. Wenn sich dann der Beschauer so aufstellt, dass sein Auge vor der Mitte der Bildbreite steht und etwa um die 1½fache Bildbreite davon entfernt, so hat er den rechten Standpunkt.

590. Wie aus Obigem hervorgeht ist die Distanz grösser als die Breite des Bildes. Führt man daher die Zeichnung auf einem Blatte aus, das nicht viel breiter als die Bildbreite ist, so fallen die Distanzpunkte und ausserdem viele Fluchtpunkte über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinaus, und man müsste dann Linien nach Punkten ziehen, die auf dem Blatte nicht gezeichnet sind. Um nun dennoch zum Ziele zu kommen, kann man folgendermassen verfahren. Man führt die in voriger Nummer beschriebene graphische Operation, wie auch wir es gethan haben, in einem verkleinerten Mafsstabe aus. Zieht man nun von o_2 aus nach allen gefundenen Perspektiven von Punkten gerade Linien, die man von o_2 aus in demselben Verhältnisse vergrössert, als man in der Zeichnung den Mafsstab verjüngt genommen hatte, so erhält man die verlangte Perspektive, deren Augpunkt wieder o_2 ist, deren Distanz aber in demselben Verhältniss grösser (als die der Zeichnung) ist, als sie ursprünglich in der Zeichnung verjüngt wurde.

Fig. 230. 591. Andere Mittel, um auf einem Blatte, auf dem die Distanzen verjüngt gegeben sind, und daher die Distanz- und Fluchtpunkte über die Grenzen des Blattes hinausfallen, dennoch Perspektiven finden zu können, sollen in Folgendem angegeben werden.

Ist $\mathfrak{H}$ (Fig. 130) der Horizont und o_2 der Augpunkt, so macht man in der um $\mathfrak{H}$ umgeklappten Horizontalebene $\overline{o_2 o_1}$ nicht gleich der Distanz, sondern gleich einem bestimmten Theile z. B. (wie in unserer Zeichnung vorausgesetzt ist) gleich dem dritten Theile der Distanz, und eben so gross macht man dann auch $\overline{o_2 \omega}$, so dass der Distanzpunkt nicht in ω liegt, sondern von o_2 um dreimal $\overline{o_2 \omega}$ entfernt liegt.

Fig. 230. 592. Soll nun von einem Punkte a, der durch seinen Riss (a_2) und seine Distanz gegeben ist, die Perspektive gefunden werden, so trägt man, nicht, wie früher angegeben, diese ganze Distanz von a_2 horizontal auf, sondern hier nur ihren dritten

Theil ($\overline{a_2 a_\omega}$) und verbindet a_ω mit ω, so ist der Schnitt a' dieser Verbindungslinie mit $a_2 o_2$ die verlangte Perspektive. Denn man bekommt offenbar denselben Punkt, wenn man von o_2 nach links die wirkliche Distanz (also $3 \cdot \overline{o_2 \omega}$) und von a_2 nach rechts die wirkliche Distanz des Punktes a (also $3 \cdot \overline{a_2 a_\omega}$) aufgetragen.

Hieraus sieht man, dass es gar keine besondere Mühe macht mit verjüngter Distanz die Perspektiven von Punkten zu finden, nur ist zu wünschen, dass man im Besitze eines verstellbaren Proportionalzirkels ist. Stellt man diesen auf die angenommene Verjüngung ein, so darf man nur die wirklichen Distanzen mit den längeren Schenkeln messen, um mit den kürzeren dann die verjüngten unmittelbar auftragen zu können.

593. Hat man von einer Geraden A, die durch a geht, Fig. 280.
die Perspektive zu suchen, so legt man durch o_1 eine Parallele zu A (den Hauptstral) so ist der Punkt $\mathfrak{a}$, in welchem sie den Horizont von A (hier $\mathfrak{H}$) trifft, nicht der Fluchtpunkt von A, sondern es ist der eigentliche Fluchtpunkt von o_2 um $3 \cdot \overline{o_2 \mathfrak{a}}$ entfernt. Um demnach A' zu finden muss man von a' nach einem Punkte der $\mathfrak{H}$ ziehen, der um $3 \cdot \overline{o_2 \mathfrak{a}}$ von o_2 entfernt ist. Trägt man daher auf $o_2 a'$ eine Strecke $\overline{o_2 m} = \frac{\overline{o_2 \mathfrak{a}'}}{3}$ auf, so ist $A' \| m\mathfrak{a}$.

594. Sollte noch endlich auf die Gerade A von a aus eine Fig. 280.
gegebene Strecke ab aufgetragen werden, so müssten wir, wenn unsere Distanzen keine verjüngten wären, zunächst den Theilungspunkt α (der Geraden A) suchen (s. 562—564), indem wir $\overline{\mathfrak{a}\alpha} = \overline{\mathfrak{a} o_1}$ machen. Zugleich wollen wir voraussetzen, weil sich dies hier als vortheilhaft herausstellt, dass wir α auf $\mathfrak{H}$ annehmen. Dann wäre der Theilungsriss a_α auf A_2 so, dass α, a' und a_α in einer Geraden liegen. Macht man nun $\overline{a_\alpha b_\alpha} = \overline{ab}$ und zieht αb_α, so wäre der Schnitt von αb_α mit A' die Perpektive des gesuchten Punktes. So wäre es, wenn unsere Strecken nicht verjüngt wären; sie sind es aber, und zwar in unserem Falle $\frac{1}{3}$ der wirklichen Grösse. Dies gilt von $\overline{o_2 a}$, $\overline{a_2 a_\alpha}$, $\overline{a_\alpha b_\alpha}$ (von dieser Strecke setzen wir voraus, dass sie dem dritten Theil der gegebenen Strecke $\overline{ab}$ gleich sei). Demnach ist der wirkliche Theilungspunkt nicht α sondern der mit 3α bezeichnete Punkt (welcher von o_2 um $3 \cdot \overline{o_2 \alpha}$ entfernt ist); ebenso der wirkliche Theilungsriss von b nicht b_α, sondern der mit $3 b_\alpha$ bezeichnete

Punkt (der von a_2 um $3 \cdot \overline{a_2 b_\alpha}$ entfernt ist), und ist daher der gesuchte Punkt b′ der Schnitt von A′ mit der Verbindungslinie der Punkte 3α und $3b_\alpha$. Betrachtet man aber den Punkt n, in welchem diese Verbindungslinie die $a_2 o_2$ schneidet, so sieht man (mit Hilfe der in unserer Zeichnung vorhandenen ähnlichen Dreiecke), dass die den verjüngten Distanzen entsprechende Linie αb_α denselben Punkt n liefert. Zieht man daher (wenn man die Punkte 3α oder $3b_\alpha$ nicht aufsuchen will oder kann) von n nach einem Punkte, der auf $\mathfrak{H}$ von o_2 um $3 \cdot o_2\alpha$ entfernt ist eine Gerade, so schneidet diese A′ in b′. — Man sieht also:

> Um auf eine Gerade A von a aus eine bei verjüngten Distanzen (z. B. $\frac{1}{3}$ wirklicher Grösse) eine ebenfalls verjüngt gegebene Strecke $\overline{ab}$ (so dass also die wirkliche Strecke $= 3 \cdot \overline{ab}$ ist) abzutragen verfahren wir zunächst ganz so, als ob die Distanzen nicht verjüngt wären (nur dass wir hier a auf $\mathfrak{H}$ und a_α auf A_2 annehmen) suchen aber aus der Geraden αb_α zunächst den Punkt n, wo diese $a_2 o_2$ schneidet, und ziehen von n nach dem (mittelst α verjüngt gegebenen) Theilungspunkt. Wie dies auszuführen ist, haben wir in voriger Nummer gezeigt, wo wir von a′ nach dem verjüngt gegebenen Fluchtpunkt gezogen haben.

595. Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass wenn erwachsene Personen von der Grösse des Beobachters auf einer Horizontalebene mit diesem stehen, die Augen derselben in einer Horizontalebene mit seinem Auge liegen; demnach liegen die Perspektiven dieser Augen im Horizont, gleichviel wie weit die Personen von der Tafel entfernt sind.

Nachtrag zur Schattenkonstruktion.

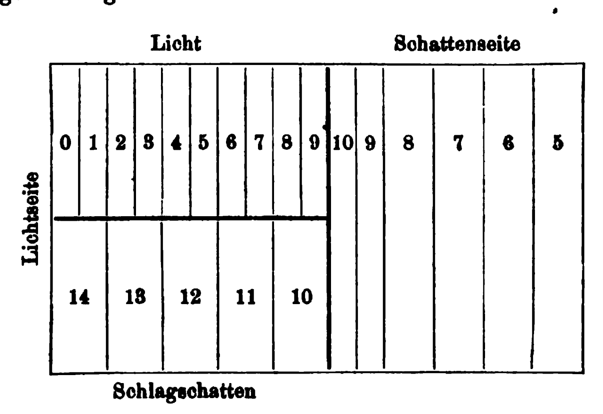
In Folge verschiedener Ausführungen von Schattirungen, die wir, seit dem der zweite Bogen des vorliegenden III. Bandes korrigirt ist, vorgenommen haben, finden wir uns veranlasst, die früher angegebene Ausführungsart ein klein wenig zu modifiziren. Wir wollen deshalb hier noch einmal zusammenhängend diese gegen früher theilweise modifizirte Ausführungsart von Schattirungen angeben.

Man zeichnet auf der ganzen zu schattirenden Fläche ausser dem absoluten höchsten Lichte (wenn ein solches vorhanden) und der Schattenlinie alle Isophoten von der Qualität 8, 6, 4 und 2 Zehntel, sodann auf der Lichtseite, so weit kein Schlagschatten liegt, noch die Isophoten 9, 7, 5, 3 und 1 Zehntel, hierauf aber noch auf der Selbstschattenseite die Isophote $\frac{1}{10}$ (also zwischen der Schattenlinie und der Isophote $\frac{2}{10}$; diese Isophote bildet die Modifikation der früheren Aufstellungen). Demnach ist die Lichtseite, so weit kein Schlagschatten darauf liegt, in 10 Zonen, so weit Schlagschatten sich darauf befindet, in 5 (Doppel) Zonen getheilt; dagegen die Selbstschattenseite in 6 Zonen (2 einfache und 4 Doppelzonen). Die Töne der aufeinanderfolgenden Zonen auf der Lichtseite heissen, vom höchsten Licht anfangend, T_0, T_1, T_2 .... T_9, auf der Schattenseite, von der Schattenlinie anfangend: T_{10}, T_9 (für die beiden einfachen Zonen) T_8, T_7, T_6, T_5 (für die 4 folgenden Doppelzonen); dagegen sollen die Töne im Schlagschatten auf der Lichtseite von der Schattenlinie anfangend, heissen: T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}.

Bei der Ausführung lassen wir die Zone T_0 (soll bedeuten die Zone mit dem Tone T_0) weiss, und überziehen alle andere Zonen mit einem schwachen Tuschtone t_1; dann alle Zonen mit Ausnahme der T_1 mit einem zweiten etwas verstärkten Tuschtone t_2 u. s. w. wie wir es früher angegeben. Nur wollen wir hier noch festsetzen, dass zwar, wie früher angegeben, t_3 stärker als t_2, t_4 stärker als t_3 genommen wird, dass aber mit dieser Verstärkung nur fortgefahren werden soll, bis zu t_{10}, während die Tuschtöne t_{11} bis t_{14} gleich t_{10} bleiben. Im Uebrigen ist wie

früher $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$, ... $T_{14} = t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_{14}$.

In untenstehender Figur sind die ebengenannten Eintheilungen in Zonen, und die diesen Zonen entsprechenden Töne schematisch angegeben. Es sind darin die Doppelzonen von den einfachen Zonen durch doppelte Breite der ersteren im Vergleich mit den letzteren unterschieden. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten die Tonstärken, so dass 1, 2, ... so viel als T_1, T_2 etc. Die mittlere verstärkte Vertikallinie stellt die Schattenlinie vor und die mittlere Horizontallinie zur Linken bezeichnet die Schlagschattengrenze.



Druck von G. P. J. Bieling (G. Dietz) in Nürnberg.



3 2044 091 922 385